ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 11 (426)

УДК 517.988

Т.М. ЛЕДЕНЕВА

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ОПЕРАТОРОВ ОТНОШЕНИЕМ ДВУХ МНОГОЧЛЕНОВ

Агрегирование нечеткой информации в системах принятия решений, которые разрабатываются как составная часть экспертных систем, связано с использованием нечетких операторов объединения и пересечения, поэтому актуальными являются исследования, связанные с выявлением некоторых свойств этих операторов, полезных для приложений, их структуры, а также взаимосвязи различных представлений. Решение этих задач позволит осуществить целенаправленный выбор оператора и тем самым повысить уровень адекватности соответствующей модели.

Среди нечетких операторов, упоминаемых в литературе, можно выделить класс операторов объединения и пересечения, которые представляются отношением многочленов или, в частном случае, многочленом. К таким операторам относятся следующие:

$$F_m(x,y)=\max(x+y-1,0); \qquad G_m(x,y)=\min(x+y,1);$$
$$F_p(x,y)=xy; \qquad G_p(x,y)=x+y-xy;$$
$$F_0(x,y)=\frac{xy}{x+y-xy}, \quad F_0(0,0)=0; \qquad G_{-1}(x,y)=\frac{x+y-2xy}{1-xy}, \quad G_{-1}(1,1)=1;$$
$$F_\alpha(x,y)=\frac{xy}{\alpha+(1-\alpha)(x+y-xy)}; \qquad G_\beta(x,y)=\frac{(\beta-1)xy+x+y}{1+\beta xy}.$$

Здесь F_m, F_p, F_0, F_α — операторы пересечения, G_m, G_p, G_{-1}, G_β — операторы объединения ([1], с.221).

Нечеткие операторы обобщаются представлением их в классе треугольных норм и конорм, причем операции пересечения определяются через T-нормы, а объединения — через S-конормы ([2], с.30).

Треугольная T-норма есть операция $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, удовлетворяющая условиям коммутативности, ассоциативности, монотонности и ограниченности $T(0,0)=0$, $T(1,x)=x$. Ее конорма (S-конорма) определяется соотношением $S(x,y)=1-T(1-x,1-y)$, удовлетворяет тем же условиям, но ограниченность задается в виде $S(1,1)=1$, $S(0,x)=x$.

Пусть

$$\widetilde{\Phi}(x,y)=\frac{a_0+a_1x+a_2y+a_3xy}{b_0+b_1x+b_2y+b_3xy} \tag{1}$$

реализует операцию объединения или пересечения нечетких множеств.

Рассмотрим свойства коммутативности и ассоциативности для $\widetilde{\Phi}(x,y)$, которые запишутся соответственно в виде:

$$\widetilde{\Phi}(x,y)=\widetilde{\Phi}(y,x), \tag{2}$$
$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\Phi}(x,y),z)=\widetilde{\Phi}(x,\widetilde{\Phi}(y,z)). \tag{3}$$

Найдем условия на коэффициенты $\widetilde{\Phi}(x,y)$, при которых выполняются (2) и (3). Подставляя $\widetilde{\Phi}(x,y)$ в виде (1) в (2) и (3), а затем приравнивая после соответствующих преобразований коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях выражений (2) и (3), получим ряд соотношений, анализ которых позволяет сделать следующие выводы:

$\widetilde{\Phi}(x,y)$ коммутативна при выполнении соотношений

$$\begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \tag{4}$$

и ассоциативна при выполнении соотношений

$$\begin{cases} a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2; \\ b_1 a_0 + a_1^2 = a_1 b_0 + a_3 b_0; \\ b_3 a_1 + b_1^2 = b_0 b_3 + a_3 b_1; \\ a_1 b_1 = a_0 b_3. \end{cases} \tag{5}$$

Учитывая соотношения (4), которые также входят в (5), в дальнейшем коммутативную и ассоциативную операцию будем рассматривать в виде

$$\Phi(x,y) = \frac{a_0 + a_1(x+y) + a_2 xy}{b_0 + b_1(x+y) + b_2 xy}, \tag{6}$$

а соотношения (5) при этом запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} b_1 a_0 + a_1^2 = a_1 b_0 + a_2 b_0, \\ b_2 a_1 + b_1^2 = b_0 b_2 + a_2 b_1, \\ a_1 b_1 = a_0 b_2. \end{cases}$$

Известно, что ассоциативная операция представима в виде ([2], с.30)

$$\Phi(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y)),$$

где $\varphi : [0,1] \to R^+$ — непрерывная монотонная функция, определяемая с точностью до положительной константы и называемая аддитивным генератором; φ^{-1} — псевдообратная функция такая, что $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$.

Согласно Де Финетти, если $\Phi(x,y)$ симметрична (обладает свойством коммутативности) и имеет производную, то необходимым и достаточным условием для ее ассоциативности является то, чтобы отношение двух частных производных Φ было отношением функции одного x к той же функции одного y. В этом случае φ определяется следующим образом:

$$\frac{\Phi'_x(x,y)}{\Phi'_y(x,y)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi'(y)}. \tag{7}$$

Рассмотрим задачу: *как для известной $\Phi(x,y)$ в виде (6) определить аддитивный генератор $\varphi(x)$?*

Заметим, что для $\Phi(x,y)$ в виде (6) справедливо (7) с

$$\varphi'(x) = \frac{1}{(a_1 b_0 - a_0 b_1) + x(a_2 b_0 - a_0 b_2) + x^2(a_2 b_1 - a_1 b_2)},$$

тогда

$$\varphi(x) = \int \frac{dx}{(a_1 b_0 - a_0 b_1) + x(a_2 b_0 - a_0 b_2) + x^2(a_2 b_1 - a_1 b_2)} + C. \tag{8}$$

В зависимости от коэффициентов $\Phi(x, y)$ возможны следующие ситуации (табл. 1), в каждой из которых аддитивный генератор получается в результате вычисления соответствующего неопределенного интеграла.

Таблица 1

Ситуация	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
$\alpha = a_1b_0 - a_0b_1$	+	+	+	+	−	−	−	−
$\beta = a_2b_0 - a_0b_2$	+	+	−	−	+	+	−	−
$\gamma = a_2b_1 - a_1b_2$	+	−	+	−	+	−	+	−

(Здесь “+” означает, что выражение равно 0, “−” — иначе.)

Рассмотрим, например, ситуацию S_4. В этом случае

$$\varphi(x) = \int \frac{dx}{x(a_2b_0 - a_0b_2) + x^2(a_2b_1 - a_1b_2)} = \int \frac{dx}{\beta x + \gamma x^2} = \frac{1}{\gamma} \int \frac{dx}{x(x + \frac{\beta}{\gamma})} =$$
$$= \frac{1}{\beta}\Big(\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x + \frac{\beta}{\gamma}}\Big) = \frac{1}{\beta}\Big(\ln|x| - \ln\big|x + \frac{\beta}{\gamma}\big|\Big) = \frac{1}{\beta} \ln\Big|\frac{x}{x + \frac{\beta}{\gamma}}\Big| = \frac{1}{\beta} \ln\Big|\frac{\gamma x}{\gamma x + \beta}\Big| + C.$$

Таким образом, для каждой из перечисленных ситуаций имеем

S_1: аддитивного генератора не существует;

S_2: $\varphi(x) = -\dfrac{1}{\gamma x} + C$;

S_3: $\varphi(x) = \dfrac{1}{\beta} \ln|x| + C$;

S_4: $\varphi(x) = \dfrac{1}{\beta} \ln\Big|\dfrac{\gamma x}{\gamma x + \beta}\Big| + C$;

S_5: $\varphi(x) = \dfrac{1}{\alpha} x + C$;

S_6: если $\dfrac{\alpha}{\gamma} > 0$, то $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}} \operatorname{arctg}\Big(x\sqrt{\dfrac{\gamma}{\alpha}}\Big) + C$, иначе $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}} \ln\left|\dfrac{x - \sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}}{x + \sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}}\right| + C$;

S_7: $\varphi(x) = \dfrac{1}{\beta} \ln|\alpha + \beta x| + C$;

S_8: пусть $D = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, тогда возможны случаи

если $D > 0$, то $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{D}} \ln\Big|\dfrac{2\gamma x + \beta - \sqrt{D}}{2\gamma x + \beta + \sqrt{D}}\Big| + C$,

если $D = 0$, то $\varphi(x) = -\dfrac{1}{\gamma x + \frac{\beta}{2}} + C$,

если $d < 0$, то $\varphi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \dfrac{2\gamma x + \beta}{\sqrt{-D}} + C$.

При использовании приведенных формул следует иметь в виду, что $x \in [0, 1]$, а константа C находится из дополнительных условий: в случае операции пересечения аддитивный генератор должен быть монотонно убывающей функцией, для которой $\varphi(1) = 0$; для операции объединения генератор представляется монотонно возрастающей функцией, причем $\varphi(0) = 0$.

В качестве примера рассмотрим операцию объединения

$$G_{-1}(x, y) = \frac{x + y - 2xy}{1 - xy}.$$

Здесь $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -1$, $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$. Следовательно, имеем ситуацию S_8 с $D = 0$. Тогда

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\gamma x + \dfrac{\beta}{2}} + C = \frac{1}{1-x} + C.$$

Из условия $\varphi(0) = 0$ определяется константа $C = -1$, и аддитивный генератор имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{x}{1-x} = g_{-1}(x),$$

что соответствует результату, изложенному в ([1], с.221).

Возможность выписать в явном виде аддитивный генератор позволяет решить ряд проблем, среди них — определение операции отрицания, с помощью которой для нечетких операторов объединения и пересечения вводится понятие двойственности – n-дуальности ([1], с.222). Операция отрицания $n(x)$ на $[0,1]$, которая в общем случае может быть не единственной, определяется следующим образом:

$$n = f^{-1} \circ l_t \circ g = g^{-1} \circ l_{1/t} \circ f,$$

где g, f — генераторы объединения и пересечения соответственно, $l_t(x) = tx$ $(t > 0)$.

Рассмотрим известные пары двойственных операторов ([1], с.222) и выпишем операции отрицания. Для $F_p(x,y)$, $G_p(x,y)$ генераторы $g_p(x) = -\ln(1-x)$ и $f_p(x) = -\ln x$ определяют единственную функцию сильного отрицания $n(x) = 1 - x$. Для $F_0(x,y)$, $G_{-1}(x,y)$ генераторы $f_0(x) = \dfrac{1-x}{x}$ и $g_{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x}$ определяют множество функций сильного отрицания Суджено при $t > 0$ в виде $n(x) = \dfrac{1-x}{1+(t-1)x}$. Для $F_\alpha(x,y)$ и $G_\beta(x,y)$ имеем единственное отрицание Суджено

$$n(x) = \frac{1-x}{1 + \dfrac{1-\alpha+\beta}{\alpha}x},$$

полученное с помощью генераторов $f_\alpha(x) = \ln\dfrac{\alpha-(\alpha-1)x}{x}$ и $g_\beta(x) = \ln\dfrac{1+\beta x}{1-x}$.

Как видно из полученных результатов, аддитивный генератор для $\Phi(x,y)$ в виде (6) относится к одному из следующих типов:

$$\varphi_1(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \varphi_2(x) = \ln\frac{ax+b}{cx+d}, \quad \varphi_3(x) = \operatorname{arctg}\frac{ax+b}{cx+d}.$$

Рассмотрим обратную задачу: *как с помощью известного генератора $\varphi(x)$ построить $\Phi(x,y)$ в виде* (6)?

При решении этой задачи получены выражения для коэффициентов a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 через коэффициенты аддитивных генераторов, причем

$\varphi_1(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ определяет коммутативную и ассоциативную операцию $\Phi(x,y)$ с коэффициентами $a_0 = bd^2$, $a_1 = ad^2$, $a_2 = 2adc - bc^2$, $b_0 = ad^2 - 2bcd$, $b_1 = -bc^2$, $b_3 = -ac^2$;

$\varphi_2(x) = \ln\dfrac{ax+b}{cx+d}$ генерирует коммутативную и ассоциативную операцию $\Phi(x,y)$ и, если $ad \neq bc$, то

$$a_0 = \frac{db^2 - bd^2}{ad-bc}, \quad a_1 = \frac{bd(a-c)}{ad-bc}, \quad a_2 = \frac{a^2d - bc^2}{ad-bc},$$
$$b_0 = \frac{ad^2 - cb^2}{ad-bc}, \quad b_1 = \frac{ac(d-b)}{ad-bc}, \quad b_2 = \frac{ac^2 - a^2c}{ad-bc};$$

$\varphi_3(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{ax+b}{cx+d}$ определяет коэффициенты $\Phi(x,y)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&a_0 = b(d^2+b^2), && a_1 = a(d^2+b^2), && a_2 = 2acd - b(c^2-a^2),\\
&b_0 = a(d^2-b^2) - 2bcd, && b_1 = -b(a^2+c^2), && b_2 = -a(a^2+c^2).
\end{aligned}$$

Практический смысл результатов, полученных при решении сформулированных выше задач, заключается в том, что, используя полученные соотношения между коэффициентами $\Phi(x,y)$ и $\varphi(x)$, для любой коммутативной и ассоциативной операции, представленной выражением (6), можно определить аддитивный генератор, а также для любого аддитивного генератора найти соответствующую ему операцию $\Phi(x,y)$ в виде (6).

Определим теперь условия, при которых $\Phi(x,y)$ задается как T-норма, т.е. помимо коммутативности, ассоциативности и монотонности выполняются соотношения

$$\begin{cases} \Phi(0,0) = 0, \\ \Phi(1,x) = x. \end{cases} \tag{9}$$

Рассмотрим различные типы аддитивных генераторов.

Используя представление коэффициентов $\Phi(x,y)$ через коэффициенты a, b, c, d генератора $\varphi_1(x)$, получим, что при $c \neq 0$ (9) справедлива при $\begin{cases} d \neq 0, \\ a+b=0, \end{cases}$ что обусловливает единственность генератора $f_0(x)$ и соответствующей ему операции пересечения нечетких множеств $F_0(x,y)$, доопределенной соотношением $F_0(0,0) = 0$.

При $c = 0$ $\varphi_1(x)$ представляется линейной функцией, и для выполнения условий (9) необходимо, чтобы $a+b=0$, что соответствует $f_m(x) = 1-x$ и оператору $\Phi(x,y) = x+y-1$, проектируя который на $[0,1]$ получим $F_m(x,y)$.

В случае $\varphi_2(x)$ соотношения (9) справедливы при $\begin{cases} a = d = 0, \\ b = c \neq 0 \end{cases}$ с аддитивным генератором $f_p(x)$ и операцией пересечения $F_p(x,y)$, а также для $\begin{cases} d = 0, \\ a+b = c, \\ bc \neq 0, \end{cases}$ при этом $\varphi(x) = \ln \dfrac{ax+b}{(a+b)x}$ $(a/b > -1)$ порождает пересечение вида $\Phi(x,y) = \dfrac{(a+b)xy}{b+a(x+y-xy)}$. Положив $\dfrac{b}{a+b} = \alpha$, получим $f_\alpha(x)$ и $F_\alpha(x,y)$.

Определим теперь условия, при которых $\Phi(x,y)$ задается как S-конорма, т.е. наряду с условиями коммутативности, ассоциативности и монотонности, выполняются следующие:

$$\begin{cases} \Phi(1,1) = 1, \\ \Phi(0,x) = x. \end{cases} \tag{10}$$

В случае $\varphi_1(x)$ соотношения (10) выполняются при $\begin{cases} b = 0, \\ c+d = 0, \end{cases}$ что соответствует аддитивному генератору $g_{-1}(x)$ и операции объединения $G_{-1}(x,y)$, доопределенной соотношением $G_{-1}(1,1) = 1$.

Рассматривая $\varphi_1(x)$ при $c = 0$, можно показать, что при $ad \neq 0$ условия (10) справедливы только при $b = 0$, тогда имеем $g_m(x)$, порождающий $\Phi(x,y) = x+y$, проектируя который на $[0,1]$, получим $G_m(x,y)$.

Для $\varphi_2(x)$ существует несколько возможностей выполнения (10).

i) $\begin{cases} a = 0 \\ d = b = -c \end{cases}$ определяет аддитивный генератор $g_p(x)$ и соответствующую ему операцию объединения $G_p(x, y)$;

ii) $\begin{cases} a \neq c \\ d = b = -c \end{cases}$ соответствует генератору $\varphi(x) = \ln \dfrac{ax + b}{b(1 - x)}$ $(a/b > 1)$ и операции объединения $\Phi(x, y) = \dfrac{b(x + y) + (a - b)xy}{b + axy}$. Если положить $a/b = \beta$, то получим $g_\beta(x)$ и $G_\beta(x, y)$;

iii) $b = d = a = -c$ позволяет получить аддитивный генератор $\varphi(x) = \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$ и операцию объединения $G_l(x, y) = \dfrac{x + y}{1 + xy}$, известную под названием оператора Лоренца.

$\varphi_3(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{ax + b}{cx + d}$ ни при каких условиях на коэффициенты a, b, c, d не порождает треугольные нормы и конормы.

Анализ условий, накладываемых на коэффициенты аддитивных генераторов, позволяет сделать вывод о невозможности получить другие представления нечетких операторов объединения и пересечения, отличные от известных (в том числе параметрических) в виде отношения двух многочленов (в частном случае — многочленом).

Исследуем взаимосвязи, существующие между различными представлениями нечетких объединений и пересечений. Выберем в качестве базовых операций на $[0, 1]$ алгебраическую сумму $x \oplus y = x + y - xy$ $(x \oplus 0 = x,\ x \oplus 1 = 1)$ и алгебраическое произведение xy $(x \cdot 0 = 0,\ x \cdot 1 = 1)$ и покажем, что с их помощью могут быть выражены рассматриваемые нечеткие операторы.

Заметим, что $G_p(x, y) = x \oplus y$, $F_p(x, y) = xy$.

Если $x, y \in [0, 1]$, $x + y - xy = z$, то

$$x = \frac{z - y}{1 - y} = z\theta y, \qquad y = \frac{z - x}{1 - x} = z\theta x,$$

где θ — операция вычитания для операции сложения $\oplus$, которую будем называть нормированной разностью между x и y. Справедливы следующие свойства операции θ:

$$x\theta 0 = x; \quad x\theta x = 0; \quad 1\theta x = 1; \quad x\theta y \neq y\theta x.$$

Заметим, что операция вычитания θ связана с процессом нормирования, представляющим собой линейное преобразование, при котором область значений любого ограниченного действительного отображения f переводится в интервал $[0, 1]$, т.е.

$$f \to (f - \inf f)/(\sup f - \inf f).$$

Пусть $t(x_{\min}, x, x_{\max}) = \dfrac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$ — функция нормирования, заданная на $[x_{\min}, x_{\max}]$, тогда на $[0, 1]$ при $0 < x < y < 1$ $t(0, x, y) = \dfrac{x}{y}$ — это нормированное значение x на $[0, y]$; $t(x, y, 1) = \dfrac{x - y}{1 - y} = x\theta y$ — это нормированное значение x на $[y, 1]$. $[0, y]$ и $[y, 1]$ будем называть интервалами нормирования.

Отметим свойства функции $t(x_{\min}, x, x_{\max})$.

Свойство 1. Если $0 < x < x_1 < x_2$, то $t(0, x, x_2) = t(0, x, x_1) \cdot t(0, x_1, x_2)$, т.е. при расширении интервала нормирования новое нормированное значение представляет собой произведение старого нормированного значения и нормированного значения прежней границы на новом интервале нормирования.

Свойство 2. Если $x_2 < x_1 < x < 1$, то $t(x_1, x, 1) \oplus t(x_2, x_1, 1) = t(x_2, x_1, 1)$ — при расширении интервала нормирования, т.е. если вместо x_1 выбрать значение $x_2 < x_1$, то нормированное значение x на $[x_2, 1]$ представляет собой алгебраическую сумму нормированного значения x на $[x_1, 1]$ и нормированного значения прежней границы x_1 на новом интервале нормирования $[x_2, 1]$.

Пусть $x, y \in [0, 1]$, тогда $xy \le x \oplus y$. Можно показать, что

$$F_0(x,y) = \frac{xy}{x+y-xy} = \frac{xy}{x \oplus y} = t(0, xy, x \oplus y);$$

$$G_{-1}(x,y) = \frac{x+y-2xy}{1-xy} = \frac{(x \oplus y) - xy}{1-xy} = (x \oplus y)\theta xy = t(xy, x \oplus y, 1);$$

$$F_\alpha(x,y) = \frac{xy}{\alpha + (1-\alpha)(x+y-xy)} = \frac{xy}{\alpha \oplus (x \oplus y)} = t(0, xy, \alpha \oplus (x \oplus y)) \quad (\alpha > 0);$$

$$G_\beta(x,y) = \frac{(\beta-1)xy + x + y}{1+\beta xy} = \frac{(x \oplus y) + \beta xy}{1+\beta xy} = (x \oplus y)\theta(-\beta xy) = t(-\beta xy, x \oplus y, 1) \quad (\beta > -1).$$

Таким образом, F_0 и F_α, моделирующие пересечение нечетких множеств, определяют нормированное значение xy на $[0, x \oplus y]$ или на интервале нормирования с расширенной правой границей $[0, \alpha \oplus (x \oplus y)]$. G_{-1} и G_β, моделирующие объединение нечетких множеств, определяют нормированное значение $x \oplus y$ на интервале нормирования $[xy, 1]$ или на интервале нормирования с расширенной левой границей $[-\beta xy, 1]$.

При $\alpha = 0$ $F_\alpha(x,y) = F_0(x,y)$, при $\beta = -1$ $G_\beta(x,y) = G_{-1}(x,y)$.

В соответствии со свойством 1

$$F_\alpha(x,y) = t(0, xy, \alpha \oplus (x \oplus y)) = t(0, xy, x \oplus y) t(0, x \oplus y, \alpha \oplus (x \oplus y)) = F_0(x,y)\frac{x \oplus y}{\alpha \oplus (x \oplus y)}.$$

Заметим, что при $\alpha > 0$ для фиксированных значений $x, y \in [0, 1]$

$$F_\alpha(x,y) < F_0(x,y) < F_p(x,y),$$

причем при $\alpha \to \infty$ $F_\alpha(x,y) \to 0$.

В соответствии со свойством 2

$$G_\beta(x,y) = t(-\beta xy, x \oplus y, 1) = t(xy, x \oplus y, 1) \oplus t(-\beta xy, xy, 1) = G_{-1}(x,y) \oplus \frac{xy + \beta xy}{1 + \beta xy}.$$

Заметим, что при $\beta > -1$ для фиксированных значений $x, y \in [0, 1]$

$$G_\beta(x,y) > G_{-1}(x,y) > G_p(x,y),$$

причем при $\beta \to \infty$ $G_\beta(x,y) \to 1$.

Учитывая, что $F_p(x,y) < G_p(x,y)$, получим следующие соотношения между нечеткими операторами объединения и пересечения:

$$F_\alpha(x,y) < F_0(x,y) < F_p(x,y) < G_p(x,y) < G_{-1}(x,y) < G_\beta(x,y).$$

Важное значение для выбора вида оператора в прикладных задачах имеет характеристика носителя и тип задачи. Если рассматривается выбор наилучшего варианта на насыщенном носителе (избыток претендентов), то целесообразно расширить интервал нормирования, что обусловливает использование операторов объединения и пересечения с высоким уровнем жесткости (увеличение α для F_α и уменьшение $-\beta$ для G_β). На обедненном носителе уровень жесткости следует снижать. В задаче ранжирования вариантов наряду с F_p и G_p возможно использование F_α и G_β с небольшим уровнем жесткости. В особенно сложных задачах принятия решений необходимо провести предварительное исследование, и только на основе тщательного анализа задачи и свойств операторов следует выбрать тот, который наиболее адекватно отражает взаимодействие нечетких множеств.

Литература

1. Трильяс Э., Альсина К., Вальверде Л. *Нужны ли в теории нечетких множеств операции* max, min, $1-j$? // Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения: Пер. с англ. / Под ред. Р.Р. Ягера. – М.: Радио и связь, 1986. – 405 с.
2. *Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта* / Под ред. Поспелова Д.А. – М.: Наука, 1986. – 312 с.

Воронежский государственный университет

Поступили
первый вариант 30.01.1995
окончательный вариант 20.05.1997