ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 2 (513)

УДК 517.955

А.Н. МИРОНОВ

О МЕТОДЕ РИМАНА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Рассмотрим уравнение [1]–[3]

$$L(u) \equiv u_{xxyy} + a_{21}u_{xxy} + a_{12}u_{xyy} + a_{11}u_{xy} + a_{20}u_{xx} + a_{02}u_{yy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u = f, \qquad (1)$$

где $a_{ij} \in C^{(i,j)}$, $f \in C$, и два его трехмерных аналога. Класс $C^{(k,l)}$ означает существование и непрерывность всех производных, определяемых операторами $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$ ($r = 0,\dots,k$; $s = 0,\dots,l$). В частности, к виду (1) относится уравнение Буссинеска–Лява

$$u_{ttxx} + u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

описывающее продольные волны в тонком упругом стержне с учетом эффектов инерции [1]. В данной работе для этого уравнения и его трехмерных аналогов строятся формулы решения задачи Коши в терминах функции Римана.

1. Следуя [2], определим функцию Римана $R = R(x,y,\xi,\eta)$ как решение интегрального уравнения

$$\begin{aligned} v(x,y) - \int_\eta^y [a_{21}(x,\beta) - (y-\beta)a_{20}(x,\beta)]v(x,\beta)d\beta - \\ - \int_\xi^x [a_{12}(\alpha,y) - (x-\alpha)a_{02}(\alpha,y)]v(\alpha,y)d\alpha + \\ + \int_\xi^x \int_\eta^y [a_{11}(\alpha,\beta) - (x-\alpha)a_{01}(\alpha,\beta) - (y-\beta)a_{10}(\alpha,\beta) + \\ + (x-\alpha)(y-\beta)a_{00}(\alpha,\beta)]v(\alpha,\beta)d\beta d\alpha = 1. \qquad (2) \end{aligned}$$

Решение (2) существует и единственно ([4], сс. 154, 164). Функция Римана использовалась в [2] для построения решения задачи Гурса.

Дифференцируя (2), убеждаемся, что $v(x,y)$ удовлетворяет сопряженному с (1) уравнению

$$\begin{aligned} L^*(v) \equiv v_{xxyy} - (a_{21}v)_{xxy} - (a_{12}v)_{xyy} + (a_{11}v)_{xy} + (a_{20}v)_{xx} + \\ + (a_{02}v)_{yy} - (a_{10}v)_x - (a_{01}v)_y + a_{00}v = 0. \qquad (3) \end{aligned}$$

Справедливо тождество

$$RL(u) \equiv (Ru_{xy})_{xy} - (Mu_y)_{xy} - (Nu_x)_{xy} + (Pu_y)_y + (Qu_x)_x + (Su)_{xy} - (Fu)_y - (Gu)_x, \qquad (4)$$
$$M = R_x - a_{12}R, \quad N = R_y - a_{21}R, \quad P = M_x + a_{02}R,$$
$$Q = N_y + a_{20}R, \quad S = R_{xy} - (a_{21}R)_x - (a_{12}R)_y + a_{11}R,$$
$$F = S_x + (a_{02}R)_y - a_{01}R, \quad G = S_y + (a_{20}R)_x - a_{10}R.$$

В тождестве (4) R зависит от x, y, ξ, η, а коэффициенты a_{ij} — от x, y. При этом $u(x,y)$ — любая функция из $C^{(2,2)}$. Соотношение (4) можно проверить непосредственно, учитывая, что R удовлетворяет уравнению (3).

Из (2) следуют тождества

$$
\begin{gathered}
M(x,y,x,y) \equiv N(x,y,x,y) \equiv S(x,y,x,y) \equiv P(x,y,\xi,y) \equiv \\
\equiv Q(x,y,x,\eta) \equiv F(x,y,\xi,y) \equiv G(x,y,x,\eta) \equiv 0.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Запишем (4) в дивергентной форме

$$
RL(u) \equiv \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y}, \tag{6}
$$

$$
\begin{gathered}
W_1 = \frac{1}{2}(Ru_{xy})_y - \frac{1}{2}(Mu_y)_y - \frac{1}{2}(Nu_x)_y + Qu_x + \frac{1}{2}(Su)_y - Gu, \\
W_2 = \frac{1}{2}(Ru_{xy})_x - \frac{1}{2}(Mu_y)_x - \frac{1}{2}(Nu_x)_x + Pu_y + \frac{1}{2}(Su)_x - Fu.
\end{gathered}
$$

Рассмотрим треугольную область D плоскости (ξ,η), ограниченную характеристиками $\xi = x_0, \eta = y_0, x_0 > 0, y_0 > 0$, и отрезком кривой Σ: $\eta = \sigma(\xi)$, $\sigma'(\xi) < 0$, класса C^3. Для определенности полагаем $y_0 = \sigma(0)$, $\sigma(x_0) = 0$.

Регулярным в области G решением уравнения, как обычно, назовем решение, непрерывное в G вместе со всеми входящими в уравнение производными. В случае (1) непрерывными должны быть u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxy}, u_{xyy}, u_{xxyy}.

Сформулируем задачу Коши для уравнения (1): *найти регулярное в D решение уравнения* (1), *удовлетворяющее граничным значениям*

$$
u\big|_\Sigma = u_0(\xi), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma = u_1(\xi), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_\Sigma = u_2(\xi), \quad \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\Big|_\Sigma = u_3(\xi). \tag{7}
$$

Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали, $\vec{n} = (\sigma', -1)/\Delta$, $\Delta = \sqrt{1+\sigma'^2(x)}$ ([5], с. 254), $u_0 \in C^3[0,x_0]$, $u_1 \in C^2[0,x_0]$, $u_2 \in C^1[0,x_0]$, $u_3 \in C[0,x_0]$.

Возьмем точку (x,y) из D. Пусть $y_1 = \sigma(x)$, $y = \sigma(x_1)$; D_{xy} и Σ_{xy} — части области D и кривой Σ соответственно, лежащие между характеристиками $\xi = x, \eta = y$. Поменяв в (6) ролями переменные ξ с x, η с y, проинтегрируем (6) по (ξ,η) в области D_{xy}. Использовав формулу Грина ([6], с. 236), получим

$$
\iint\limits_{D_{xy}} Rf\, d\xi\, d\eta = \int_{y_1}^{y} W_1\big|_{\xi=x} d\eta + \int_{x_1}^{x} W_2\big|_{\eta=y} d\xi + \int_{\Sigma_{xy}} W_1 d\eta - W_2 d\xi. \tag{8}
$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части (8):

$$
\int_{y_1}^{y} W_1\big|_{\xi=x} d\eta = \left[\left(\frac{1}{2}Ru_{\xi\eta} - \frac{1}{2}Mu_\eta - \frac{1}{2}Nu_\xi + \frac{1}{2}Su\right)\Big|_{\xi=x}\right]_{\eta=y_1}^{\eta=y} + \int_{y_1}^{y} (Qu_\xi - Gu)\big|_{\xi=x} d\eta.
$$

В силу (5) имеем $M(x,y,x,y) \equiv N(x,y,x,y) \equiv S(x,y,x,y) \equiv Q(x,\eta,x,y) \equiv G(x,\eta,x,y) \equiv 0$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\int_{y_1}^{y} W_1\big|_{\xi=x} d\eta = \frac{1}{2}Ru_{\xi\eta}(x,y,x,y) - \frac{1}{2}Ru_{\xi\eta}(x,y_1,x,y) +& \\
+ \frac{1}{2}Mu_\eta(x,y_1,x,y) + \frac{1}{2}Nu_\xi(x,y_1,x,y) - \frac{1}{2}Su(x,y_1,x,y)&.
\end{aligned}
$$

Аналогично получаем

$$
\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x} W_2\big|_{\eta=y} d\xi = \frac{1}{2}Ru_{\xi\eta}(x,y,x,y) - \frac{1}{2}Ru_{\xi\eta}(x_1,y,x,y) +& \\
+ \frac{1}{2}Mu_\eta(x_1,y,x,y) + \frac{1}{2}Nu_\xi(x_1,y,x,y) - \frac{1}{2}Su(x_1,y,x,y)&.
\end{aligned}
$$

Формула (8) принимает вид

$$\iint\limits_{D_{xy}} Rf d\xi\, d\eta = u_{\xi\eta}(x,y) - \frac{1}{2}Ru_{\xi\eta}(x,y_1,x,y) -$$
$$- \frac{1}{2}Ru_{\xi\eta}(x_1,y,x,y) + \frac{1}{2}Mu_\eta(x,y_1,x,y) + \frac{1}{2}Nu_\xi(x,y_1,x,y) -$$
$$- \frac{1}{2}Su(x,y_1,x,y) + \frac{1}{2}Mu_\eta(x_1,y,x,y) + \frac{1}{2}Nu_\xi(x_1,y,x,y) -$$
$$- \frac{1}{2}Su(x_1,y,x,y) + \int_{\Sigma_{xy}} W_1 d\eta - W_2 d\xi. \quad (9)$$

В (9) учтено, что $R(x,y,x,y) \equiv 1$.

Переписав (9) в виде

$$u_{xy}(x,y) = F(x,y) \quad (10)$$

и проинтегрировав (10) по x и y в области D_{xy}, получаем решение задачи Коши в терминах функции Римана

$$u(x,y) = u(x_1,y) + \int_{x_1}^{x} u_x(\alpha,\sigma(\alpha))d\alpha + \int_{x_1}^{x} d\alpha \int_{\sigma(\alpha)}^{y} F(\alpha,\beta)d\beta. \quad (11)$$

Таким образом, получен аналог известной формулы, дающей решение задачи Коши для уравнения $u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f$ ([7], с. 67).

Формула (11) содержит заданные на Σ значения u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxy}, u_{xyy}, которые можно определить из (7). Действительно, найдем u_0', u_1, u_0'', u_1', u_2, u_0''', u_1'', u_2', u_3, выраженные через значения производных функции u на кривой Σ до третьего порядка включительно:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma' \frac{\partial u}{\partial y} = u_0', \\
\frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial y} = u_1, \\
\sigma''\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sigma'\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sigma'^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_0'', \\
\frac{\sigma''\Delta - \sigma'\Delta'}{\Delta^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta'}{\Delta^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sigma'^2 - 1}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_1', \\
\frac{\sigma'^2}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2\sigma'}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_2, \\
\sigma'''\frac{\partial u}{\partial y} + 3\sigma''\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\sigma'\sigma''\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3\sigma'\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 3\sigma'^2\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \sigma'^3\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = u_0''', \\
\frac{(\sigma''\Delta - \sigma'\Delta')'\Delta - 2\Delta'(\sigma''\Delta - \sigma'\Delta')}{\Delta^3}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta\Delta'' - 2\Delta'^2}{\Delta^3}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{(\sigma''\Delta - \sigma'\Delta')'}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \qquad (12) \\
+ \frac{3\sigma'\sigma''\Delta + 2\Delta'(1-\sigma'^2)}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\sigma'(2\Delta' - \sigma''\Delta)}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \\
+ \frac{2\sigma'^2 - 1}{\Delta}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\sigma'(\sigma'^2 - 2)}{\Delta}\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\sigma'^2}{\Delta}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = u_1'', \\
\frac{2\sigma'(\sigma''\Delta - \sigma'\Delta')}{\Delta^3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2(\sigma''\Delta - 2\sigma'\Delta')}{\Delta^3}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{2\Delta'}{\Delta^3}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\sigma'^2}{\Delta^2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \\
+ \frac{\sigma'^3 - 2\sigma'}{\Delta^2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{2\sigma'^2 - 1}{\Delta^2}\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\sigma'}{\Delta^2}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = u_2',
\end{gathered}$$

$$\frac{\sigma'^3}{\Delta^3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-3\frac{\sigma'^2}{\Delta^3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+3\frac{\sigma'}{\Delta^3}\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}-\frac{1}{\Delta^3}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=u_3.$$

Определитель данной системы равен $(1+\sigma'^2)^5>0$, поэтому по условиям (7) определяются все требуемые для (11) функции.

Кроме того, из системы (12) следует, что формула (11) дает решение задачи Коши с условиями (7). Действительно, по построению формулы (11) функция u принимает определяемые из (7) значения u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxy}, u_{xyy} на кривой Σ. Это позволяет утверждать, что выполнены первые три условия из (7). Дифференцирование u_0, u_1 позволяет определить непрерывные u_{xxx}, u_{yyy}. Но тогда на Σ известны u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xyy}, u_{yyy}, т. е. выполняется и четвертое условие из (7).

Исследуем вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши (1), (7). Введем обозначения для производных искомой функции $u_{xxy}=v_{21}$, $u_{xyy}=v_{12}$, $u_{xx}=v_{20}$, $u_{xy}=v_{11}$, $u_{yy}=v_{02}$, $u_x=v_{10}$, $u_y=v_{01}$ и определяемых данными Коши их граничных значений

$$\begin{gathered} u_{xxy}|_\Sigma=\varphi_{21}(x),\quad u_{xyy}|_\Sigma=\psi_{12}(y),\quad u_{xx}|_\Sigma=\varphi_{20}(x),\quad u_{xy}|_\Sigma=\varphi_{11}(x),\\ u_{yy}|_\Sigma=\psi_{02}(y),\quad u_x|_\Sigma=\varphi_{10}(x),\quad u_y|_\Sigma=\varphi_{01}(x). \end{gathered}\tag{13}$$

Из (1) и (13) получаем систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} &u(x,y)=u_0(x)+\int_{\sigma(x)}^y v_{01}(x,\beta)d\beta,\\ &v_{01}(x,y)=\varphi_{01}(x)+\int_{\sigma(x)}^y v_{02}(x,\beta)d\beta,\\ &v_{10}(x,y)=\varphi_{10}(x)+\int_{\sigma(x)}^y v_{11}(x,\beta)d\beta,\\ &v_{02}(x,y)=\psi_{02}(y)+\int_{\sigma^{-1}(y)}^x v_{12}(\alpha,y)d\alpha,\\ &v_{11}(x,y)=\varphi_{11}(x)+\int_{\sigma(x)}^y v_{12}(x,\beta)d\beta,\\ &v_{20}(x,y)=\varphi_{20}(x)+\int_{\sigma(x)}^y v_{21}(x,\beta)d\beta,\\ &v_{12}(x,y)=\psi_{12}(y)+\int_{\sigma^{-1}(y)}^x (f-a_{21}v_{21}-a_{12}v_{12}-a_{20}v_{20}-\\ &\qquad -a_{11}v_{11}-a_{02}v_{02}-a_{10}v_{10}-a_{01}v_{01}-a_{00}u)(\alpha,y)d\alpha,\\ &v_{21}(x,y)=\varphi_{21}(x)+\int_{\sigma(x)}^y (f-a_{21}v_{21}-a_{12}v_{12}-a_{20}v_{20}-\\ &\qquad -a_{11}v_{11}-a_{02}v_{02}-a_{10}v_{10}-a_{01}v_{01}-a_{00}u)(x,\beta)d\beta. \end{aligned}\tag{14}$$

Методом последовательных приближений ([8], с. 77–79) могут быть доказаны существование и единственность решения системы (14) в области D в классе непрерывных функций. Ясно, что (14) является следствием уравнения (1) и данных Коши. Докажем обратное. Из первого уравнения (14) $u|_\Sigma=u_0(x)$. Продифференцируем это уравнение по y: $u_y(x,y)=v_{01}(x,y)$. Из второго уравнения $v_{01}|_\Sigma=\varphi_{01}(x)$, $u_{yy}=v_{01y}=v_{02}$. Четвертое и седьмое уравнения дают $v_{02}|_\Sigma=\psi_{02}(y)$, $u_{xyy}=v_{02x}=v_{12}$, $v_{12}|_\Sigma=\psi_{12}(y)$. Продифференцируем первое уравнение (14) по x

$$u_x(x,y)=u_0'(x)+\int_{\sigma(x)}^y v_{01x}(x,\beta)d\beta-v_{01}(x,\sigma(x))\sigma'(x).$$

Но $u_0'(x)=u_x(x,y)|_\Sigma+u_y(x,y)|_\Sigma\sigma'(x)$, поэтому

$$u_x(x,y)=\varphi_{10}(x)+\int_{\sigma(x)}^y v_{01x}(x,\beta)d\beta.\tag{15}$$

Подставим в (15) v_{01x}

$$u_x(x,y)=\varphi_{10}(x)+\int_{\sigma(x)}^{y}\Big(\varphi_{01x}(x)+ + \int_{\sigma(x)}^{\beta} v_{02x}(x,\beta_1)d\beta_1 - v_{02}(x,\sigma(x))\sigma'(x)\Big)d\beta =$$

$$=\varphi_{10}(x)+\int_{\sigma(x)}^{y}\Big(\varphi_{11}(x)+\int_{\sigma(x)}^{\beta} v_{12}(x,\beta_1)d\beta_1\Big)d\beta =$$

$$=\varphi_{10}(x)+\int_{\sigma(x)}^{y} v_{11}(x,\beta)d\beta = v_{10}(x,y).$$

Очевидно, $v_{10}|_\Sigma=\varphi_{10}(x)$. Из третьего и пятого уравнений (14) $u_{xy}=v_{10y}=v_{11}$, $v_{11}|_\Sigma=\varphi_{11}(x)$. Далее

$$u_{xx}(x,y)=\varphi_{10}'(x)+\int_{\sigma(x)}^{y} v_{11x}(x,\beta)d\beta - v_{11}(x,\sigma(x))\sigma'(x)=$$

$$=\varphi_{20}(x)+\int_{\sigma(x)}^{y}\Big(\varphi_{11}'(x)+\int_{\sigma(x)}^{\beta} v_{12x}(x,\beta_1)d\beta_1 - v_{12}(x,\sigma(x))\sigma'(x)\Big)d\beta =$$

$$=\varphi_{20}(x)+\int_{\sigma(x)}^{y}\Big(\varphi_{21}(x)+\int_{\sigma(x)}^{\beta}(f-a_{21}v_{21}-a_{12}v_{12}-a_{20}v_{20}-$$

$$-a_{11}v_{11}-a_{02}v_{02}-a_{10}v_{10}-a_{01}v_{01}-a_{00}u)(x,\beta_1)d\beta_1\Big)d\beta =$$

$$=\varphi_{20}(x)+\int_{\sigma(x)}^{y} v_{21}(x,\beta)d\beta = v_{20}(x,y), \quad v_{20}|_\Sigma=\varphi_{20}(x).$$

Шестое и восьмое уравнения системы дают $u_{xxy}=v_{20y}=v_{21}$, $v_{21}|_\Sigma=\varphi_{21}(x)$. Продифференцировав восьмое уравнение по y, получаем уравнение (1). Кроме того, функция u удовлетворяет условиям (13). Как было показано выше, (13) с учетом (12) позволяет утверждать, что

$$u\big|_\Sigma=u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma=u_1(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_\Sigma=u_2(x), \quad \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\Big|_\Sigma=u_3(x).$$

Таким образом, система (14) эквивалентна задаче Коши. Следовательно, справедлива

Теорема. *Если* $a_{ij}\in C^{(i,j)}(\overline{D})$, $f\in C(\overline{D})$, $u_0\in C^3[0,x_0]$, $u_1\in C^2[0,x_0]$, $u_2\in C^1[0,x_0]$, $u_3\in C[0,x_0]$, $\sigma\in C^3[0,x_0]$, *то решение задачи Коши* (1), (7) *существует и единственно.*

2. Рассмотрим теперь уравнение

$$L_1(u)\equiv\sum_{k,l=0}^{2}\sum_{m=0}^{1} a_{klm}(x,y,z)\frac{\partial^{k+l+m}u}{\partial x^k\partial y^l\partial z^m}=f, \quad a_{221}\equiv 1, \tag{16}$$

где $a_{klm}\in C^{(k,l,m)}$, $f\in C$. Класс $C^{(k,l,m)}$ означает существование и непрерывность производных, определяемых операторами $\partial^{r+s+t}/\partial x^r\partial y^s\partial z^t$ ($r=0,\dots,k$; $s=0,\dots,l$; $t=0,\dots,m$). Формула решения задачи Гурса для (16) получена в [9].

Функцией Римана для (16) $R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ называется решение интегрального уравнения [9]

$$v(x,y,z)-\int_{\xi}^{x}\{[a_{121}-(x-\alpha)a_{021}]v\}(\alpha,y,z)d\alpha -$$

$$-\int_{\eta}^{y}\{[a_{211}-(y-\beta)a_{201}]v\}(x,\beta,z)d\beta-\int_{\zeta}^{z}[a_{220}v](x,y,\gamma)d\gamma +$$

$$+\int_{\xi}^{x}\int_{\eta}^{y}\{[a_{111}-(y-\beta)a_{101}-(x-\alpha)a_{011}+$$

$$
\begin{aligned}
&+(x-\alpha)(y-\beta)a_{001}]v\}(\alpha,\beta,z)d\beta\,d\alpha+\\
&+\int_{\xi}^{x}\int_{\zeta}^{z}\{[a_{120}-(x-\alpha)a_{020}]v\}(\alpha,y,\gamma)d\gamma\,d\alpha+\\
&+\int_{\eta}^{y}\int_{\zeta}^{z}\{[a_{210}-(y-\beta)a_{200}]v\}(x,\beta,\gamma)d\gamma\,d\beta-\\
&-\int_{\xi}^{x}\int_{\beta}^{y}\int_{\zeta}^{z}\{[a_{110}-(y-\beta)a_{100}-(x-\alpha)a_{010}+\\
&\qquad+(x-\alpha)(y-\beta)a_{000}]v\}(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma\,d\beta\,d\alpha=1. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Решение (17) существует и единственно ([4], с. 180).

Далее используются обозначения

$$
\begin{gathered}
A_{100}=R_x-a_{121}R,\quad A_{010}=R_y-a_{211}R,\quad A_{001}=R_z-a_{220}R,\\
A_{200}=(A_{100})_x+a_{021}R,\quad A_{110}=(A_{100})_y-(a_{211}R)_x+a_{111}R,\\
A_{101}=(A_{100})_z-(a_{220}R)_x+a_{120}R,\quad A_{020}=(A_{010})_y-(a_{211}R)_z+a_{201}R,\\
A_{011}=(A_{010})_z-(a_{220}R)_y+a_{210}R,\quad A_{210}=(A_{110})_x+(a_{021}R)_y-a_{011}R,\\
A_{201}=(A_{101})_x+(a_{021}R)_z-a_{020}R,\quad A_{120}=(A_{110})_y+(a_{201}R)_x-a_{101}R,\\
A_{111}=(A_{110})_z-(a_{220}R)_{xy}+(a_{210}R)_x+(a_{120}R)_y-a_{110}R,\\
A_{021}=(A_{011})_y+(a_{201}R)_z-a_{200}R,\\
A_{220}=(A_{210})_y+(a_{201}R)_{xx}-(a_{101}R)_x+a_{001}R,\\
A_{211}=(A_{111})_x+(a_{021}R)_{yz}-(a_{011}R)_z-(a_{020}R)_y+a_{010}R,\\
A_{121}=(A_{111})_y+(a_{201}R)_{xz}-(a_{101}R)_z-(a_{200}R)_x+a_{100}R.
\end{gathered}
$$

Из интегрального уравнения (17) получаем тождества

$$
\begin{gathered}
A_{100}(x,y,z,x,y,z)\equiv A_{010}(x,y,z,x,y,z)\equiv A_{001}(x,y,\zeta,x,y,z)\equiv\\
\equiv A_{200}(\xi,y,z,x,y,z)\equiv A_{110}(x,y,z,x,y,z)\equiv A_{101}(x,y,\zeta,x,y,z)\equiv\\
\equiv A_{020}(x,\eta,z,x,y,z)\equiv A_{011}(x,y,\zeta,x,y,z)\equiv A_{210}(\xi,y,z,x,y,z)\equiv\\
\equiv A_{201}(\xi,y,\zeta,x,y,z)\equiv A_{120}(x,\eta,z,x,y,z)\equiv A_{111}(x,y,\zeta,x,y,z)\equiv\\
\equiv A_{021}(x,\eta,\zeta,x,y,z)\equiv A_{220}(\xi,\eta,z,x,y,z)\equiv A_{211}(\xi,y,\zeta,x,y,z)\equiv\\
\equiv A_{121}(x,\eta,\zeta,x,y,z)\equiv 0,\quad R(x,y,z,x,y,z)\equiv 1. \qquad (18)
\end{gathered}
$$

Кроме того, из (17) следует, что R удовлетворяет сопряженному с (16) уравнению

$$
\sum_{k,l=0}^{2}\sum_{m=0}^{1}(-1)^{k+l+m+1}\frac{\partial^{k+l+m}(a_{klm}v)}{\partial x^k\partial y^l\partial z^m}=0.
$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости тождества

$$
RL_1(u)\equiv\frac{\partial W_1}{\partial x}+\frac{\partial W_2}{\partial y}+\frac{\partial W_3}{\partial z}, \qquad (19)
$$

$$
\begin{gathered}
W_1=\frac{\partial B_{12}}{\partial y}+\frac{\partial B_{13}}{\partial z}-A_{021}u_x+A_{121}u,\\
W_2=\frac{\partial B_{12}}{\partial x}+\frac{\partial B_{23}}{\partial z}-A_{201}u_y+A_{211}u,\\
W_3=\frac{\partial B_{13}}{\partial x}+\frac{\partial B_{23}}{\partial y}+A_{220}u,\\
B_{12}=\frac{1}{6}H_z-\frac{1}{2}A_{001}u_{xy}+\frac{1}{2}A_{101}u_y+\frac{1}{2}A_{011}u_x-\frac{1}{2}A_{111}u,
\end{gathered}
$$

$$B_{13}=\frac{1}{6}H_y+\frac{1}{2}A_{020}u_x-\frac{1}{2}A_{120}u,$$
$$B_{23}=\frac{1}{6}H_x+\frac{1}{2}A_{200}u_y-\frac{1}{2}A_{210}u,$$
$$H=Ru_{xy}-A_{100}u_y-A_{010}u_x+A_{110}u.$$

В тождестве (19) R зависит от (x,y,z,ξ,η,ζ), а коэффициенты a_{klm} — от (x,y,z).

В дальнейшем используется схема рассуждений статьи [10].

Пусть $S:\zeta=\zeta(\xi,\eta)$ — поверхность в пространстве (ξ,η,ζ) класса C^4. Потребуем, чтобы эта поверхность в каждой своей точке имела касательную плоскость, не параллельную ни одной из координатных осей. Для определенности можно положить $\zeta'_\xi<0$, $\zeta'_\eta<0$.

Проведем через точку $M(x,y,z)$ плоскости $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta=z$. Пусть указанные плоскости пересекают поверхность S по кривым BC, CA и AB соответственно. Плоскости $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta=z$ и поверхность S определяют область D, граница которой состоит из двумерных многообразий AMC, BCM, BMA и ACB. Ориентацию D считаем положительной (ориентацию в пространстве можно связать с направлением внешней нормали к границе области).

Задача Коши: *найти регулярное решение уравнения* (16), *удовлетворяющее на поверхности S условиям*

$$u\big|_S=u_0(\xi,\eta),\quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=u_1(\xi,\eta),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_S=u_2(\xi,\eta),$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\Big|_S=u_3(\xi,\eta),\quad \frac{\partial^4 u}{\partial n^4}\Big|_S=u_4(\xi,\eta). \tag{20}$$

Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S, $u_0\in C^4$, $u_1\in C^3$, $u_2\in C^2$, $u_3\in C^1$, $u_4\in C$.

Поменяв в (19) ролями переменные ξ с x, η с y, ζ с z, интегрируем (19) по ξ, η, ζ в D. Применяя формулу Гаусса–Остроградского ([6], с. 241), получим

$$\iiint\limits_D Rf\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=\iint\limits_{\partial D} W_1 d\eta\wedge d\zeta+W_2 d\zeta\wedge d\xi+W_3 d\xi\wedge d\eta. \tag{21}$$

Здесь "$\wedge$" означает внешнее умножение дифференциальных форм. Обозначим правую часть (21) через I. Заменим интеграл по ∂D суммой интегралов по ее составляющим ACB, AMC, BCM и ABM. При этом учтем тождества (18). Получим

$$I=\iint\limits_{BCM}\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial\eta}+\frac{\partial B_{13}}{\partial\zeta}\right)d\eta\wedge d\zeta+\iint\limits_{AMC}\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial\xi}+\frac{\partial B_{23}}{\partial\zeta}\right)d\zeta\wedge d\xi+$$
$$+\iint\limits_{ABM}\left(\frac{\partial B_{13}}{\partial\xi}+\frac{\partial B_{23}}{\partial\eta}\right)d\xi\wedge d\eta+\iint\limits_{ACB} W_1 d\eta\wedge d\zeta+W_2 d\zeta\wedge d\xi+W_3 d\xi\wedge d\eta.$$

По формуле Грина ([6], с. 236) интегралы по плоским областям AMC, BCM и ABM сводятся к однократным интегралам по замкнутым контурам

$$I=\int\limits_{BCM} B_{12}d\zeta-B_{13}d\eta+\int\limits_{AMC} B_{23}d\xi-B_{12}d\zeta+$$
$$+\int\limits_{ABM} B_{13}d\eta-B_{23}d\xi+\iint\limits_{ACB} W_1 d\eta\wedge d\zeta+W_2 d\zeta\wedge d\xi+W_3 d\xi\wedge d\eta.$$

Вычисляя в полученной формуле криволинейные интегралы по отрезкам прямых, запишем (21) в виде

$$\iiint\limits_D Rf d\xi\, d\eta\, d\zeta = u_{\xi\eta}\big|_M - \frac{1}{3}H\big|_A - \frac{1}{3}H\big|_B - \frac{1}{3}H\big|_C +$$
$$+ \int\limits_{BC} B_{12}d\zeta - B_{13}d\eta + \int\limits_{CA} B_{23}d\xi - B_{12}d\zeta +$$
$$+ \int\limits_{AB} B_{13}d\eta - B_{23}d\xi + \iint\limits_{ACB} W_1 d\eta\wedge d\zeta + W_2 d\zeta\wedge d\xi + W_3 d\xi\wedge d\eta. \quad (22)$$

При получении (22) учтены тождества (18).

Запишем (22) в виде

$$u_{xy}(x,y,z) = F(x,y,z), \quad (23)$$

а затем проинтегрируем (23) по x, y в проекции области D на плоскость (x,y). В результате получим функцию u, являющуюся решением задачи Коши.

Формула (23) содержит значения частных производных решения u по x, y, z до четвертого порядка включительно, вычисленные на ABC. Эти производные надо определить через функции u_i, $i=\overline{1,4}$, входящие в (20). Будем рассуждать как в работе [11]. Для удобства переобозначим $x=x_1$, $y=x_2$, $z=x_3$. Пусть поле направлений задано вектором $\mathbf{n}(n_1(\mu_1,\mu_2),n_2(\mu_1,\mu_2),n_3(\mu_1,\mu_2))$. Введем связанную с поверхностью ABC систему координат $x_i=x_i(\mu_1,\mu_2)+n_i(\mu_1,\mu_2)\mu_3$, $i=\overline{1,3}$. Поле направлений по условию не касательно к ABC, следовательно, существует обратное преобразование $\mu_i=\mu_i(x_1,x_2,x_3)$ класса C^4 в окрестности поверхности ABC ([12], с. 495). Последовательно находим производные решения $u=U(\mu_1(x_1,x_2,x_3),\mu_2(x_1,x_2,x_3),\mu_3(x_1,x_2,x_3))$ по x_i на поверхности ABC. Подставляя эти производные в (23), получим решение задачи Коши.

3. Перейдем к рассмотрению уравнения

$$L_2(u) \equiv \sum_{k,l,m=0}^{2} a_{klm}(x,y,z)\frac{\partial^{k+l+m}u}{\partial x^k\partial y^l\partial z^m} = f, \quad a_{222}\equiv 1, \quad (24)$$

где $a_{klm}\in C^{(k,l,m)}$, $f\in C$. Задача Коши для него рассматривается по аналогии с уравнением (16).

Функцией Римана для уравнения (24) $R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ называется решение интегрального уравнения

$$v(x,y,z) - \int_\xi^x \{[a_{122}-(x-\alpha)a_{022}]v\}(\alpha,y,z)d\alpha -$$
$$- \int_\eta^y \{[a_{212}-(y-\beta)a_{202}]v\}(x,\beta,z)d\beta - \int_\zeta^z \{[a_{221}-(z-\gamma)a_{220}]v\}(x,y,\gamma)d\gamma -$$
$$- \int_\xi^x\int_\eta^y \{[a_{112}-(y-\beta)a_{102}-(x-\alpha)a_{012}+$$
$$+(x-\alpha)(y-\beta)a_{002}]v\}(\alpha,\beta,z)d\beta\, d\alpha +$$
$$+ \int_\xi^x\int_\zeta^z \{[a_{121}-(z-\gamma)a_{120}-(x-\alpha)a_{021}+$$
$$+(x-\alpha)(z-\gamma)a_{020}]v\}(\alpha,y,\gamma)d\gamma\, d\alpha +$$
$$+ \int_\eta^y\int_\zeta^z \{[a_{211}-(z-\gamma)a_{210}-(y-\beta)a_{201}+$$
$$+(y-\beta)(z-\gamma)]v\}(x,\beta,\gamma)d\gamma\, d\beta -$$

$$
\begin{gathered}
-\int_{\xi}^{x}\int_{\beta}^{y}\int_{\zeta}^{z}\{[a_{111}-(z-\gamma)a_{110}-(y-\beta)a_{101}-(x-\alpha)a_{011}+\\
+(y-\beta)(z-\gamma)a_{100}+(x-\alpha)(z-\gamma)a_{010}+(x-\alpha)(y-\beta)a_{001}+\\
+(x-\alpha)(y-\beta)(z-\gamma)a_{000}]v\}(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma\,d\beta\,d\alpha=1. \quad (25)
\end{gathered}
$$

Решение (25) существует и единственно ([4], с. 180).

Введем обозначения

$$
\begin{gathered}
A_{100}=R_x-a_{122}R,\quad A_{010}=R_y-a_{212}R,\quad A_{001}=R_z-a_{221}R,\\
A_{200}=(A_{100})_x+a_{022}R,\quad A_{020}=(A_{010})_y+a_{202}R,\\
A_{002}=(A_{001})_z+a_{220}R,\quad A_{110}=(A_{010})_x-(a_{122}R)_y+a_{112}R,\\
A_{101}=(A_{100})_z-(a_{221}R)_x+a_{121}R,\quad A_{011}=(A_{001})_y-(a_{212}R)_z+a_{211}R,\\
A_{210}=(A_{110})_x+(a_{022}R)_y-a_{012}R,\quad A_{201}=(A_{101})_x+(a_{022}R)_z-a_{021}R,\\
A_{120}=(A_{110})_y+(a_{202}R)_x-a_{102}R,\quad A_{102}=(A_{101})_z+(a_{220}R)_x-a_{120}R,\\
A_{021}=(A_{011})_y+(a_{202}R)_z-a_{201}R,\quad A_{012}=(A_{011})_z+(a_{220}R)_y-a_{210}R,\\
A_{111}=(A_{110})_z-(a_{221}R)_{xy}+(a_{211}R)_x+(a_{121}R)_y-a_{111}R,\\
A_{220}=(A_{120})_x+(a_{022}R)_{yy}-(a_{012}R)_y+a_{002}R,\\
A_{202}=(A_{201})_z+(a_{220}R)_{xx}-(a_{120}R)_x+a_{020}R,\\
A_{022}=(A_{012})_y+(a_{202}R)_{zz}-(a_{201}R)_z+a_{200}R,\\
A_{211}=(A_{111})_x+(a_{022}R)_{yz}-(a_{021}R)_y-(a_{012}R)_z+a_{011}R,\\
A_{121}=(A_{111})_y+(a_{202}R)_{xz}-(a_{201}R)_x-(a_{102}R)_z+a_{101}R,\\
A_{112}=(A_{111})_z+(a_{220}R)_{xy}-(a_{210}R)_x-(a_{120}R)_y+a_{110}R,\\
A_{122}=(A_{121})_z+(a_{220}R)_{xyy}-(a_{210}R)_{xy}-(a_{120}R)_{yy}+(a_{200}R)_x+(a_{110}R)_y-a_{100}R,\\
A_{212}=(A_{112})_x+(a_{022}R)_{yzz}-(a_{021}R)_{yz}-(a_{012}R)_{zz}+(a_{020}R)_y+(a_{011}R)_z-a_{010}R,\\
A_{221}=(A_{211})_y+(a_{202}R)_{xxz}-(a_{201}R)_{xx}-(a_{102}R)_{xz}+(a_{101}R)_x+(a_{002}R)_z-a_{001}R.
\end{gathered}
$$

Из интегрального уравнения (25) следуют тождества

$$
\begin{gathered}
A_{100}(x,y,z,x,y,z)\equiv A_{010}(x,y,z,x,y,z)\equiv A_{001}(x,y,\zeta,x,y,z)\equiv\\
\equiv A_{200}(\xi,y,z,x,y,z)\equiv A_{020}(x,\eta,z,x,y,z)\equiv A_{002}(x,y,\zeta,x,y,z)\equiv\\
\equiv A_{110}(x,y,z,x,y,z)\equiv A_{101}(x,y,z,x,y,z)\equiv A_{011}(x,y,z,x,y,z)\equiv\\
\equiv A_{210}(\xi,y,z,x,y,z)\equiv A_{201}(\xi,y,z,x,y,z)\equiv A_{120}(x,\eta,z,x,y,z)\equiv\\
\equiv A_{102}(x,y,\zeta,x,y,z)\equiv A_{021}(x,\eta,z,x,y,z)\equiv A_{012}(x,y,\zeta,x,y,z)\equiv\\
\equiv A_{111}(x,y,z,x,y,z)\equiv A_{220}(\xi,\eta,z,x,y,z)\equiv A_{202}(\xi,y,\zeta,x,y,z)\equiv\\
\equiv A_{022}(x,\eta,\zeta,x,y,z)\equiv A_{211}(\xi,y,z,x,y,z)\equiv A_{121}(x,\eta,z,x,y,z)\equiv\\
\equiv A_{112}(x,y,\zeta,x,y,z)\equiv A_{122}(x,\eta,\zeta,x,y,z)\equiv A_{212}(\xi,y,\zeta,x,y,z)\equiv\\
\equiv A_{221}(\xi,\eta,z,x,y,z)\equiv 0,\quad R(x,y,z,x,y,z)\equiv 1.
\end{gathered}
$$

Из (25) также следует, что R удовлетворяет сопряженному с (24) уравнению

$$
\sum_{k,l,m=0}^{2}(-1)^{k+l+m}\frac{\partial^{k+l+m}(a_{klm}v)}{\partial x^k\partial y^l\partial z^m}=0.
$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости тождества

$$
RL_2(u)\equiv\frac{\partial W_1}{\partial x}+\frac{\partial W_2}{\partial y}+\frac{\partial W_3}{\partial z}, \tag{26}
$$

$$W_1 = \frac{\partial C_{12}}{\partial y} + \frac{\partial C_{13}}{\partial z} + A_{022}u_x - A_{122}u,$$
$$W_2 = \frac{\partial C_{12}}{\partial x} + \frac{\partial C_{23}}{\partial z} + A_{202}u_y - A_{212}u,$$
$$W_3 = \frac{\partial C_{13}}{\partial x} + \frac{\partial C_{23}}{\partial y} + A_{220}u_z - A_{221}u,$$
$$C_{12} = \frac{1}{6}K_z + \frac{1}{2}(A_{002}u_{xy} - A_{102}u_y - A_{012}u_x + A_{112}u),$$
$$C_{13} = \frac{1}{6}K_y + \frac{1}{2}(A_{020}u_{xz} - A_{120}u_z - A_{021}u_x + A_{121}u),$$
$$C_{23} = \frac{1}{6}K_x + \frac{1}{2}(A_{200}u_{yz} - A_{210}u_z - A_{201}u_y + A_{211}u),$$
$$K = Ru_{xyz} - A_{100}u_{yz} - A_{010}u_{xz} - A_{001}u_{xy} + A_{110}u_z + A_{101}u_y + A_{011}u_x - A_{111}u.$$

Пусть D — область в R^3 из п. 2, $S : \zeta = \zeta(\xi, \eta)$ — поверхность класса C^5.

Задача Коши: *найти регулярное решение уравнения* (24)*, удовлетворяющее на поверхности S условиям*

$$u\big|_S = u_0(\xi,\eta), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = u_1(\xi,\eta), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_S = u_2(\xi,\eta),$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\Big|_S = u_3(\xi,\eta), \quad \frac{\partial^4 u}{\partial n^4}\Big|_S = u_4(\xi,\eta), \quad \frac{\partial^5 u}{\partial n^5}\Big|_S = u_5(\xi,\eta).$$

Здесь $u_0 \in C^5$, $u_1 \in C^4$, $u_2 \in C^3$, $u_3 \in C^2$, $u_4 \in C^1$, $u_5 \in C$.

Поменяв в (26) ролями переменные ξ с x, η с y, ζ с z, интегрируем (26) по ξ, η, ζ в области D. Проводя вычисления по аналогии с п. 2, получим

$$\iiint\limits_D Rf d\xi\, d\eta\, d\zeta = u_{\xi\eta\zeta}\big|_M - \frac{1}{3}K\big|_A - \frac{1}{3}K\big|_B - \frac{1}{3}K\big|_C +$$
$$+ \int\limits_{BC} C_{12}d\zeta - C_{13}d\eta + \int\limits_{CA} C_{23}d\xi - C_{12}d\zeta +$$
$$+ \int\limits_{AB} C_{13}d\eta - C_{23}d\xi + \iint\limits_{ACB} W_1 d\eta \wedge d\zeta + W_2 d\zeta \wedge d\xi + W_3 d\xi \wedge d\eta. \quad (27)$$

Записывая (27) в виде

$$u_{xyz}(x,y,z) = F(x,y,z), \quad (28)$$

а затем интегрируя (28) по x, y, z в области D, получим функцию u, являющуюся решением задачи Коши.

Формула (28) содержит значения частных производных решения u по x, y, z до пятого порядка включительно, вычисленные на ABC. Эти производные вычисляются аналогично случаю задачи Коши (16), (20).

Литература

1. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. *Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка* // ДАН СССР. – 1987. – Т. 297. – № 3. – С. 547–552.
2. Уткина Е.А. *Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка* // Ред. журн. “Дифференц. уравнения”. – Минск, 1999. – 13 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.06.99, № 2059-В99.
3. Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Изд-во Казанск. матем. о-ва, 2001. – 226 с.

4. Мюнтц Г. *Интегральные уравнения.* Ч. 1. – Л.–М.: Гостехтеориздат, 1934. – 320 с.
5. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – 2-е. изд. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
6. Зорич В.А. *Математический анализ.* Ч. 2. – М.: Наука. – 1984. – 640 с.
7. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
8. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. *Уравнения в частных производных математической физики.* – М.: Высш. школа, 1970. – 710 с.
9. Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Задача Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей производной* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 11. – С. 77–81.
10. Севастьянов В.А. *Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 69–73.
11. Севастьянов В.А. *Об одном случае задачи Коши* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 12. – С. 1706–1707.
12. Зорич В.А. *Математический анализ.* Ч. 1. – М.: Наука. – 1981. – 544 с.

Елабужский государственный
педагогический институт

Поступила
25.06.2002