ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 2 (513)

УДК 517.984

Г.Г. ИСЛАМОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОДНОРАНГОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Спектральные свойства матриц с вещественными неотрицательными элементами, установленные Перроном и Фробениусом в начале прошлого столетия, были обнаружены сначала у интегральных операторов, а затем и у более общих операторов в полуупорядоченных пространствах [1].

Интересны свойства периферического спектра линейных операторов. Периферический спектр оператора A, некоторая степень которого вполне непрерывна, состоит из тех собственных значений этого оператора, которые лежат на спектральной окружности $\{\lambda : |\lambda| = r(A)\}$, где $r(A)$ — спектральный радиус оператора A.

Сначала рассмотрим конечномерный случай. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка n с неотрицательными элементами a_{ij}. Следуя ([2], с. 129), выберем на плоскости n различных точек $p_1, \dots, p_n$. Для каждого ненулевого элемента a_{ij} матрицы A соединим точку p_i с точкой p_j направленной линией (звеном) $\overline{p_i p_j}$. Полученная в результате фигура называется направленным графом матрицы A. Матрица A называется неразложимой, если ее направленный граф сильно связен, т. е. для любых двух точек p_i и p_j существует связывающий их ориентированный путь $\overline{p_i p_{i_1}}, \dots, \overline{p_{i_l} p_j}$. Число звеньев пути называется длиной этого пути. Однозвенный путь из p_i в p_i (петля) существует тогда и только тогда, когда $a_{ii} > 0$.

Согласно теореме Фробениуса ([3], с. 334) спектральный радиус $r(A)$ неразложимой матрицы A с неотрицательными элементами является положительным простым собственным значением этой матрицы и ему соответствует вектор u с положительными координатами. Кроме того, периферический спектр матрицы A состоит из простых собственных значений

$$\lambda_k = r(A) \exp\left(\frac{2\pi}{m}(k-1)\sqrt{-1}\right), \quad k = \overline{1, m}. \tag{1}$$

При $m > 1$ число m собственных значений на спектральной окружности называется индексом импримитивности (периодом) матрицы A. В ([3], с. 355) показано, что если $\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n_1} + \cdots + a_t\lambda^{n_t}$ — характеристический многочлен матрицы A, то m равно наибольшему общему делителю разностей $n - n_1, n_1 - n_2, \dots, n_{t-1} - n_t$. Известна и другая характеристика индекса импримитивности ([2], с. 131): m есть наибольший общий делитель длин замкнутых путей (контуров) направленного графа матрицы A.

Как показано в ([3], с. 339), найдется такая диагональная матрица $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ с $\mu_i^m = 1$, $i = \overline{1, n}$, что $\varphi_k = D^{k-1}u$ будет собственным вектором, отвечающим λ_k.

Утверждение. *Транспонированная матрица A^* (как и A) неотрицательна, неприводима и имеет тот же периферический спектр. Пусть v — положительное решение уравнения $A^*v = r(A)v$, нормированное условием $(u, v) = 1$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов в $\mathbb{C}^n$. Положим $S = \operatorname{diag}(1/\overline{\mu}_1, \dots, 1/\overline{\mu}_n)$. Тогда $\psi_j = S^{j-1}v$ будет единственным с точностью до постоянного множителя собственным вектором матрицы A^*, отвечающим комплексно-сопряженному собственному значению $\overline{\lambda}_j$, $j = \overline{1, m}$, причем $(\varphi_k, \psi_j) = \delta_{kj}$ — символ Кронекера.*

Действительно, имеет место представление ([3], с. 339)

$$A = \frac{\lambda_j}{r(A)} D^{j-1} A D^{-j+1}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Переходя к комплексно-сопряженным матрицам, получим

$$A^* = \frac{\overline{\lambda}_j}{r(A)} S^{j-1} A^* S^{-j+1}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Отсюда и из равенства $A^*v = r(A)v$ следует, что $\psi_j = S^{j-1}v$ удовлетворяет уравнению $A^*\psi = \overline{\lambda}_j \psi_j$. Утверждение следует из простоты собственного значения $\overline{\lambda}_j$. Ортогональность φ_k и ψ_j при $k \neq j$ очевидна, а равенство $(\varphi_k, \psi_k) = 1$ следует из того, что $S^* = D^{-1}$ и $(u, v) = 1$.

Понятно, что собственные значения оператора

$$A_1 = A - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(\cdot, \psi_k)$$

лежат внутри спектрального круга $\{\lambda : |\lambda| \leq r(A)\}$. Оператор $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(\cdot, \psi_k)$ приводится к нильпотентной матрице H одноранговым возмущением $K = a(\cdot, b)$ (напр., [4]), где $a = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_k$, $b = \sum\limits_{k=1}^{m} \overline{\beta}_k \psi_k$, причем

$$\alpha_k \beta_k = \frac{\lambda_k^m}{\prod\limits_{j=1,\ j\neq k}^{m} (\lambda_k - \lambda_j)}, \quad k = \overline{1,m}. \tag{4}$$

Так как для спектральных множеств $\Sigma(A-K) = \Sigma(A_1 + H) = \Sigma(A_1) \cup \{0\}$, то $r(A-K) < r(A)$.

Оценим сверху норму одноранговго возмущения K. Пусть $u = \mathrm{colon}(u_1, \ldots, u_n)$, $v = \mathrm{colon}(v_1, \ldots, v_n)$. Так как

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k D^{k-1} = \mathrm{diag}(R(\mu_1), \ldots, R(\mu_n)),$$

где $R(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k t^{k-1}$, то $a = \mathrm{colon}(R(\mu_1)u_1, \ldots, R(\mu_n)u_n)$. В силу $|\mu_j| = 1$ имеем $|R(\mu_j)| \leq \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k|$, $j = \overline{1,n}$. Поэтому $\|a\| = (a,a)^{1/2} \leq \|u\| \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k|$. Аналогично $\sum\limits_{k=1}^{m} \overline{\beta}_k S^{k-1} = \mathrm{diag}(Q(1/\overline{\mu}_1), \ldots, Q(1/\overline{\mu}_n))$, где $Q(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} \overline{\beta}_k t^{k-1}$, причем в силу $|1/\overline{\mu}_j| = 1$ верно $|Q(1/\overline{\mu}_j)| \leq \sum\limits_{k=1}^{m} |\overline{\beta}_k| = \sum\limits_{k=1}^{m} |\beta_k|$ и, значит, $\|b\| = (b,b)^{1/2} \leq \|v\| \sum\limits_{k=1}^{m} |\beta_k|$. Так как $|\alpha_k|\,|\beta_k| = r(A)/m$, $k = \overline{1,m}$, то для нормы одноранговго возмущения K имеем оценку

$$\|K\| = \|a\|\,\|b\| \leq r(A)\|u\|\,\|v\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^{-1}.$$

При $r(A) = 1$, положив $|\alpha_k| = 1$, $k = \overline{1,m}$, отсюда получаем $\|K\| \leq m\|u\|\,\|v\|$, где u, v — собственные векторы матриц A и A^* соответственно, отвечающие единице и нормированные условием $(u,v) = 1$. При этом $r(A-K) < 1$.

Заметим, что обычно индекс импримитивности m меньше размерности n матрицы A. Так, например, если $a_{ii} > 0$ для некоторого $i = \overline{1,n}$, то $m = 1$. Если же $a_{ij} > 0$ и $a_{ji} > 0$ для некоторой пары (i,j) с $i \neq j$, то существует двухзвенный контур направленного графа матрицы A, и, следовательно, $m \leq 2$, т. к. 2 должно делиться на m. Понятно, что возможен случай, когда $m = n$ (если в качестве A взять матрицу перестановок ([2], с. 27)).

Будем следовать терминологии, принятой в [1], [5].

Аналогом неприводимой матрицы с неотрицательными элементами в бесконечномерном случае является потенциально компактный положительный оператор A, действующий в комплексной банаховой решетке B и обладающий следующим свойством: s) не существует нетривиальных A-инвариантных замкнутых идеалов решетки B. Как известно [6], для оператора A с перечисленными выше свойствами спектральный радиус $r(A)$ является положительным собственным значением; все собственные значения, лежащие на спектральной окружности $\{\lambda : |\lambda| = r(A)\}$, простые и задаются формулой (1), где m — число различных собственных значений, совпадающих с $r(A)$ по модулю. Далее, для сопряженного оператора A^* найдется такой строго положительный функционал $v \in B^*$, что $A^*v = r(A)v$. Кроме того, существует такое $u \in B$, что $u > 0$, $Au = r(A)u$ и u — квазивнутренняя точка решетки B. Известно ([1], с. 337), что свойство s) эквивалентно следующему свойству: существует такой скаляр $\lambda > r(A)$, что для всякого $x > 0$ вектор $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} A^k x$ является квазивнутренней точкой решетки B.

Обозначим $B_0 = \{x \in B : |x| \leq \lambda u$ для некоторого $\lambda,\ 0 \leq \lambda < \infty\}$. Это линейное подпространство является минимальным идеалом, содержащим собственный вектор $u > 0$. Кроме того, B_0 плотно в B (т. к. u — квазивнутренняя точка) и инвариантно относительно оператора A. Согласно теореме 8 из [6] существует такой биективный ортоморфизм D банаховой решетки B, что $|Dx| = |x|$ для всех $x \in B_0$ и имеют место представления (2) и (3) для оператора A и сопряженного оператора A^*, где $S = (D^*)^{-1}$. Таким образом, элементы $\varphi_k = D^{k-1}u$ и $\psi_k = S^{k-1}v$ будут единственными с точностью до постоянного множителя собственными векторами, отвечающими соответственно λ_k и $\overline{\lambda}_k$, операторов A и A^*.

Если ведущие собственные векторы u и v выбраны так, что $(u, v) = 1$, то $(\varphi_k, \psi_j) = \delta_{ij}$ — символ Кронекера.

Из равенства $|D^{k-1}x| = |x|$, имеющего место при всех $k = \overline{1, m}$ и $x \in B_0$, следует $|D^{k-1}u| = u$. Кроме того, для любого $y > 0$, $y \in B$, имеем $(y, |S^{k-1}v|) = \sup\{|(x, S^{k-1}v)| : |x| \leq y\} = \sup\{|(D^{k-1}x, v)| : |x| \leq y\} \leq \sup\{(|x|, v) : |x| \leq y\} = (y, v)$. Поэтому $|S^{k-1}v| \leq v$.

Аналогично конечномерному случаю можно показать, что $r(A - K) < r(A)$, если в одноранговом операторе

$$Kx = \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k D^{k-1} u\right)\left(x, \sum_{k=1}^{m} \overline{\beta}_k S^{k-1} v\right), \quad x \in B,$$

коэффициенты α_k и β_k связаны соотношением (4).

При фиксированном $x \in B$ имеем

$$|Kx| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|\, |D^{k-1}u|\right)\left(|x|, \sum_{k=1}^{m} |\overline{\beta}_k|\, |S^{k-1}v|\right).$$

Так как

$$|D^{k-1}u| = u, \quad |S^{k-1}v| \leq v, \quad |\alpha_k|\, |\beta_k| = \frac{r(A)}{m}, \quad k = \overline{1, m},$$

то $|Kx| \leq u(|x|, v)\frac{r(A)}{m} \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k| \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k|^{-1}$. В силу монотонности нормы банаховой решетки $\|\,|x|\,\| = \|x\|$ и

$$\|Kx\| \leq \|u\|\, \|v\|\, \|x\| \frac{r(A)}{m} \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^{-1}.$$

Следовательно, $\|K\| \leq \|u\|\, \|v\| \frac{r(A)}{m} \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k| \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k|^{-1}$, где u, v — ведущие собственные векторы операторов A и A^*, нормированные условием $(u, v) = 1$. Из этого неравенства при $r(A) = 1$ и $|\alpha_k| = 1$, $k = \overline{1, m}$, следует $\|K\| \leq m\|u\|\, \|v\|$.

Эти оценки для нормы одноранговового возмущения K, уменьшающего спектральный радиус оператора A, аналогичны конечномерным неравенствам.

В общем случае для потенциально компактного положительного оператора A, неприводимого над замкнутым идеалом банаховой решетки B, нет правил для подсчета числа m различных собственных значений, лежащих на спектральной окружности (для конечномерного случая такие правила были приведены выше). Однако известно ([6], с. 391; [1], с. 340), что $m = 1$, если выполнено одно из следующих условий:

а) Ax — квазивнутренняя точка решетки B, если $x > 0$;
б) A принадлежит операторному идеалу [7] со следом τ и $\tau(A) \neq 0$;
в) $B = C(X)$ — банахова решетка непрерывных функций, заданных на связном хаусдорфовом компакте X.

Ниже предполагается, что $r(A) < 1$. В случае, когда обычный метод последовательных приближений нахождения единственного решения уравнения $x = Ax + f$, где $f \in B$, сходится медленно, можно предложить следующее ускорение метода простой итерации. Выберем произвольную последовательность комплексных чисел $\beta_1, \dots, \beta_m$ и положим $b = \sum\limits_{k=1}^{m} \overline{\beta}_k \psi_k$, где $\overline{\beta}_k$ — комплексно-сопряженное с β_k число. Обозначим

$$a = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k \lambda_k^m \Big/ \Big(\beta_k \prod_{j=1, j\neq k}^{m} (\lambda_k - \lambda_j)\Big), \quad c = \sum_{k=1}^{m} \psi_k \overline{\beta}_k / (1 - \overline{\lambda}_k).$$

Положим $g = f + a(f, c)$. Следуя схеме работы [8], можно показать, что в некоторой эквивалентной норме $\|\cdot\|_*$ пространства B итерационный процесс

$$x_0 = 0, \quad x_k = Ax_{k-1} - a(x_{k-1}, b) + g, \quad k = 1, 2, \dots,$$

сходится к решению x уравнения $x = Ax + f$ со скоростью $\|x_k - x\|_* < q^k \|x\|_*$, где q меньше $r(A)$, но больше радиуса второй спектральной окружности оператора A.

Литература

1. Шефер Х. *Топологические векторные пространства.* – М.: Мир, 1971. – 359 с.
2. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. *Матрицы и вычисления.* – М.: Наука, 1984. – 318 с.
3. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1988. – 552 с.
4. Исламов Г.Г. *Экстремальные возмущения замкнутых операторов* // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 1. – С. 35–41.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 742 с.
6. Grobler J.J. *A note on the theorem of Jentzsch–Perron and Frobenius* // Proc. Koninkl. Nederl. Akad. wetensch. – 1987. – Ser. A90. – № 4. – P. 381–391.
7. Пич А. *Операторные идеалы.* – М.: Мир, 1982. – 536 с.
8. Исламов Г.Г. *О границе применимости итерационного метода* // Межвуз. сб. науч. тр. “Матем. моделир. и информационные технологии”. – Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1991. – С. 14–18.

Удмуртский государственный университет

Поступила
06.05.2002