ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 2 (513)

УДК 517.962

А.Ю. АЛЕКСАНДРОВ, А.П. ЖАБКО

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

Уравнения в конечных разностях широко применяются при описании динамических систем, состояния которых известны (измеряются) в дискретные моменты времени. К таким системам относятся, например, системы управления с дискретными регуляторами [1]. Разностные уравнения являются основным математическим аппаратом при изучении нелинейных импульсных систем [2]. Численное решение уравнений различных типов также приводит к замене непрерывных систем дискретными [1].

Одно из направлений исследований, возникающих в указанных приложениях разностных уравнений, связано с анализом устойчивости их решений. В частности, задачи сходимости итерационных процессов — это фактически задачи устойчивости разностных систем. Методы исследования устойчивости хорошо разработаны для линейных разностных уравнений. Для нелинейных систем, как и для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, доказана теорема об устойчивости по линейному приближению ([2], с. 38–40). Наиболее общим методом анализа устойчивости решений разностных систем является дискретный аналог второго метода Ляпунова ([2], с. 20–35). В данной работе он используется для получения условий асимптотической устойчивости по нелинейному приближению. При этом в качестве системы первого приближения рассматриваются уравнения с однородными правыми частями.

1. Предварительное обсуждение. В данном разделе проводится сравнение однородной разностной системы и соответствующей ей системы обыкновенных дифференциальных уравнений в смысле устойчивости по Ляпунову.

Рассмотрим разностную систему

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{X}(k) + \mathbf{F}(\mathbf{X}(k)) \tag{1}$$

и однородную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}), \tag{2}$$

где $\mathbf{X}(k)$, $\mathbf{Z}$ — n-мерные векторы, элементы векторной функции $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ определены и непрерывно дифференцируемы при всех $\mathbf{Z} \in \mathbf{E}^n$ и являются однородными функциями порядка $\mu > 1$. Будем считать, что целочисленный аргумент k во всех разностных уравнениях работы принимает значения $0, 1, \dots$ Из однородности $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ следует, что системы (1) и (2) имеют нулевые решения.

Лемма 1. *Если нулевое решение системы* (2) *асимптотически устойчиво, то нулевое решение системы* (1) *также асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Известно ([3], с. 115–123), что для системы (2), имеющей асимптотически устойчивое нулевое решение, существуют функции Ляпунова $V(\mathbf{Z})$ и $W(\mathbf{Z})$, которые обладают следующими свойствами:

1) $V(\mathbf{Z})$, $W(\mathbf{Z})$ — непрерывно дифференцируемые однородные функции порядка m и $m+\mu-1$ соответственно, $m > 1$;
2) $V(\mathbf{Z})$, $W(\mathbf{Z})$ — положительно-определенные функции;

3) функция $V(\mathbf{Z})$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial V(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}}\right)^{\top} \mathbf{F}(\mathbf{Z}) = -W(\mathbf{Z}).$$

Рассмотрим приращение функции $V(\mathbf{Z})$ на решениях системы (1). Получим

$$\Delta V = V(\mathbf{X}(k+1)) - V(\mathbf{X}(k)) = -W(\mathbf{X}(k)) + W_1(\mathbf{X}(k)).$$

Здесь $W_1(\mathbf{Z})/\|\mathbf{Z}\|^{m+\mu-1} \to 0$ при $\|\mathbf{Z}\| \to 0$ ($\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора). Следовательно ([3], с. 118), существуют такие положительные постоянные b_1, b_2 и δ, что при $\|\mathbf{X}(k)\| < \delta$ справедливы оценки

$$-b_1\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\mu-1} \le \Delta V \le -b_2\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\mu-1}. \tag{3}$$

Значит ([2], с. 27–30), нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. □

Обратное утверждение, как показывает следующий пример, неверно.

Пример 1. Рассмотрим разностную систему

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + \rho_k^2\big(\alpha_k x_1(k) - \beta_k x_2(k)\big), \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + \rho_k^2\big(\beta_k x_1(k) + \alpha_k x_2(k)\big). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь ρ и φ — полярные координаты ($x_1 = \rho\cos\varphi$, $x_2 = \rho\sin\varphi$), $\rho_k = \rho(k)$, $\varphi_k = \varphi(k)$, $\alpha_k = \alpha(\varphi_k)$, $\beta_k = \beta(\varphi_k)$, а функции $\alpha(\varphi)$ и $\beta(\varphi)$ определяются по формулам

$$\alpha(\varphi) = \frac{\beta(\varphi)\cos(10\varphi)}{1 + 0{,}1\sin(10\varphi)}, \quad \beta(\varphi) = 2 - \sin(10\varphi).$$

Система (4) является однородной порядка $\mu = 3$, причем ее правые части дважды непрерывно дифференцируемы. Покажем, что нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво.

В полярных координатах уравнения (4) принимают вид

$$\begin{gathered} \rho_{k+1} = \rho_k\sqrt{\left(1 + \alpha_k\rho_k^2\right)^2 + \left(\beta_k\rho_k^2\right)^2}, \\ \operatorname{tg}(\varphi_{k+1} - \varphi_k) = \frac{\beta_k\rho_k^2}{1 + \alpha_k\rho_k^2}. \end{gathered} \tag{5}$$

Введем вспомогательную функцию

$$c(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{\alpha(\tau)}{\beta(\tau)}\, d\tau = \ln(1 + 0{,}1\sin(10\varphi)).$$

Пусть

$$V(\rho,\varphi) = \rho^2\exp(-2\,c(\varphi))\Bigg(1 - \rho^2\exp(-2\,c(\varphi))\Bigg(\gamma\varphi + \\ + \int_0^{\varphi} \exp(2c(\tau))\beta(\tau)(1 + (c'(\tau))^2 - c''(\tau))d\tau\Bigg)\Bigg),$$

где

$$\gamma = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(2c(\tau))\beta(\tau)(1 + (c'(\tau))^2 - c''(\tau))d\tau > 0.$$

Приращение функции $V(\rho,\varphi)$ на решениях системы (5) может быть представлено в виде

$$\Delta V = V(\rho_{k+1},\varphi_{k+1}) - V(\rho_k,\varphi_k) = -\gamma\rho_k^6\beta_k\exp(-4\,c(\varphi_k)) + W_1(\rho_k,\varphi_k).$$

Здесь функция $W_1(\rho,\varphi)$ в достаточно малой окрестности точки $\rho = 0$ и при всех $\varphi \in (-\infty,+\infty)$ удовлетворяет неравенству $|W_1(\rho,\varphi)| \le b_1\rho^8$, где b_1 — положительная постоянная.

Значит, существуют числа $\delta > 0$ и $b_2 > 0$ такие, что при $\rho_k < \delta$, $\varphi_k \in (-\infty, +\infty)$ справедлива оценка $\Delta V \leq -b_2\,\rho_k^6$, из которой и следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (4).

Соответствующая уравнениям (4) система обыкновенных дифференциальных уравнений в полярных координатах имеет вид

$$\dot\rho = \alpha(\varphi)\rho^3, \quad \dot\varphi = \beta(\varphi)\rho^2. \tag{6}$$

При этом $\int\limits_0^{2\pi} \alpha(\varphi)/\beta(\varphi) d\varphi = 0$. Значит, нулевое решение системы (6) устойчиво, но не является асимптотически устойчивым.

Следующий пример показывает, что если нулевое решение разностной системы вида (1) неустойчиво, то соответствующая ей система (2) может иметь устойчивое нулевое решение.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) - \big(x_1^2(k) + x_2^2(k)\big)x_2(k), \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + \big(x_1^2(k) + x_2^2(k)\big)x_1(k). \end{aligned} \tag{7}$$

В качестве функции Ляпунова выберем функцию $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Получим

$$V(x_1(k+1), x_2(k+1)) - V(x_1(k), x_2(k)) = \big(x_1^2(k) + x_2^2(k)\big)^3.$$

Отсюда вытекает ([4], с. 82), что нулевое решение уравнений (7) неустойчиво.

В то же время нулевое решение соответствующей однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot z_1 = -(z_1^2 + z_2^2)z_2, \quad \dot z_2 = (z_1^2 + z_2^2)z_1$$

является устойчивым.

2. Оценки решений нелинейных разностных систем. Известно ([3], с. 117), что если нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво, то при всех $\mathbf{Z}_0 \in \mathbf{E}^n$, $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, $t \geq t_0$ справедливы неравенства

$$c_1\|\mathbf{Z}_0\|\big(1 + c_2\|\mathbf{Z}_0\|^{\mu-1}(t - t_0)\big)^{-\frac{1}{\mu-1}} \leq \|\mathbf{Z}(t, \mathbf{Z}_0, t_0)\| \leq c_3\|\mathbf{Z}_0\|\big(1 + c_4\|\mathbf{Z}_0\|^{\mu-1}(t - t_0)\big)^{-\frac{1}{\mu-1}},$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — положительные постоянные, $\mathbf{Z}(t, \mathbf{Z}_0, t_0)$ — решение уравнений (2), проходящее при $t = t_0$ через точку $\mathbf{Z}_0$.

Оценим скорость стремления к началу координат решений разностной системы (1) в случае, когда для нее построена однородная функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям теоремы об асимптотической устойчивости ([2], с. 27–30).

Пусть нулевое решение системы дифференциальных уравнений (2) асимптотически устойчиво. Из доказательства леммы 1 следует, что тогда для любого решения $\mathbf{X}(k)$ системы (1), начинающегося при $k = k_0 \geq 0$ в достаточно малой окрестности точки $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, при всех $k \geq k_0$ выполняются неравенства (3).

Известно ([3], с. 118), что если $V(\mathbf{X})$ — положительно-определенная однородная порядка m функция, то для любых $\mathbf{X} \in \mathbf{E}^n$ справедливы оценки

$$a_1\|\mathbf{X}\|^m \leq V(\mathbf{X}) \leq a_2\|\mathbf{X}\|^m, \tag{8}$$

где a_1, a_2 — положительные постоянные.

Используя неравенства (8), получаем, что при $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$ имеют место соотношения

$$V(\mathbf{X}(k)) - b_1\left(\frac{V(\mathbf{X}(k))}{a_1}\right)^{\frac{\mu-1}{m}+1} \leq V(\mathbf{X}(k+1)) \leq V(\mathbf{X}(k)) - b_2\left(\frac{V(\mathbf{X}(k))}{a_2}\right)^{\frac{\mu-1}{m}+1}. \tag{9}$$

Лемма 2. *Пусть для членов последовательности* $\{v_k\}$ *выполнены неравенства*

$$0 \le v_{k+1} \le v_k - a v_k^{\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{10}$$

где $a > 0$, $\lambda > 1$, $v_0 \ge 0$, $a\lambda v_0^{\lambda-1} \le 1$. *Тогда при всех* $k = 0, 1, \dots$ *справедлива оценка*

$$v_k \le v_0 \big(1 + a(\lambda - 1) v_0^{\lambda-1} k\big)^{-\frac{1}{\lambda-1}}. \tag{11}$$

Доказательство. Применяем метод математической индукции. При $k = 0$ неравенство (11) верно. Предположим, что оно имеет место для всех $k \le l$. Тогда $v_l \le v_0$, откуда следует $a\lambda v_l^{\lambda-1} \le 1$. Функция $v_l - a v_l^{\lambda}$ монотонно возрастает на промежутке $[0, (a\lambda)^{-1/(\lambda-1)}]$. Значит, справедливы соотношения

$$v_{l+1} \le v_l (1 - a v_l^{\lambda-1}) \le v_0 (1 + \theta l)^{-\frac{1}{\lambda-1}} \left(1 - \frac{\theta}{(\lambda-1)(1+\theta l)}\right) = v_0 \big(1 + \theta(l+1)\big)^{-\frac{1}{\lambda-1}} g(\theta),$$

где

$$\theta = a(\lambda - 1) v_0^{\lambda-1}, \quad g(\theta) = \left(1 + \frac{\theta}{1+\theta l}\right)^{\frac{1}{\lambda-1}} \left(1 - \frac{\theta}{(\lambda-1)(1+\theta l)}\right).$$

Заметим теперь, что $g(0) = 1$ и при этом функция $g(\theta)$ монотонно убывает на промежутке $[0, +\infty)$. Следовательно, неравенство (11) выполняется и при $k = l + 1$. $\square$

Аналогичным образом доказывается

Лемма 3. *Пусть для членов последовательности* $\{v_k\}$ *выполнены неравенства*

$$v_k - b v_k^{\lambda} \le v_{k+1} \le (b\lambda)^{-\frac{1}{\lambda-1}}, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{12}$$

где $b > 0$, $\lambda > 1$, $v_0 \ge 0$, $2b\lambda v_0^{\lambda-1} \le 1$. *Тогда при всех* $k = 0, 1, \dots$ *имеет место оценка*

$$v_0 \big(1 + 2b(\lambda - 1) v_0^{\lambda-1} k\big)^{-\frac{1}{\lambda-1}} \le v_k. \tag{13}$$

Замечание 1. Если неравенства (10) (неравенства (12)) выполняются лишь при $k = 0, 1, ..., N$, то оценка (11) (оценка (13)) будет справедлива при $k = 0, 1, \dots, N + 1$.

С помощью лемм 2, 3 получаем, что из неравенств (8), (9) следует существование числа $\delta > 0$ такого, что для любого решения $\mathbf{X}(k)$ системы (1) с начальными данными $\mathbf{X}(k_0) = \mathbf{X}_0$, удовлетворяющими условиям $k_0 \ge 0$, $\|\mathbf{X}_0\| < \delta$, при всех $k \ge k_0$ имеют место оценки

$$c_1 \|\mathbf{X}_0\| \big(1 + c_2 \|\mathbf{X}_0\|^{\mu-1} (k - k_0)\big)^{-\frac{1}{\mu-1}} \le \|\mathbf{X}(k)\| \le c_3 \|\mathbf{X}_0\| \big(1 + c_4 \|\mathbf{X}_0\|^{\mu-1} (k - k_0)\big)^{-\frac{1}{\mu-1}}. \tag{14}$$

Здесь $c_1 = (a_1/a_2)^{1/m}$, $c_2 = 2(\mu - 1) b_1/(m a_1)$, $c_3 = 1/c_1$, $c_4 = (\mu - 1) b_2/(m a_2)$.

3. Анализ устойчивости разностных систем по нелинейному приближению. Далее будем предполагать, что для системы (1) существуют однородные функции Ляпунова $V(\mathbf{X})$ и $W(\mathbf{X})$, которые обладают свойствами, указанными в доказательстве леммы 1. Следовательно, нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво.

Наряду с уравнениями (1) рассмотрим возмущенные уравнения

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{X}(k) + \mathbf{F}(\mathbf{X}(k)) + \mathbf{R}(k, \mathbf{X}(k)). \tag{15}$$

Здесь векторная функция $\mathbf{R}(k, \mathbf{X})$ определена при $k = 0, 1, \dots$ и $\|\mathbf{X}\| \le h$ (h — положительная постоянная), непрерывна по $\mathbf{X}$ и удовлетворяет условию $\|\mathbf{R}(k, \mathbf{X})\| \le c\|\mathbf{X}\|^{\sigma}$, где $c > 0$, $\sigma > 0$.

Теорема 1. *При выполнении неравенства* $\sigma > \mu$ *нулевое решение системы* (15) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Приращение функции $V(\mathbf{X})$ на решениях возмущенной системы можно представить в виде

$$\Delta V = V\big(\mathbf{X}(k) + \mathbf{F}(\mathbf{X}(k))\big) - V(\mathbf{X}(k)) + \\ + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}(k) + \mathbf{F}(\mathbf{X}(k)) + \theta_k \mathbf{R}(k, \mathbf{X}(k)))\right)^{\top} \mathbf{R}(k, \mathbf{X}(k)), \quad (16)$$

где $\theta_k \in (0,1)$. Значит, при $\|\mathbf{X}(k)\| \le h$ справедлива оценка

$$\Delta V \le -b_1 \|\mathbf{X}(k)\|^{m+\mu-1} + \psi(\mathbf{X}(k))\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\mu-1} + b_2\|\mathbf{X}(k)\|^{\sigma}(\|\mathbf{X}(k)\| + \|\mathbf{X}(k)\|^{\mu} + \|\mathbf{X}(k)\|^{\sigma})^{m-1}.$$

Здесь b_1, b_2 — положительные постоянные, а функция $\psi(\mathbf{X})$ неотрицательна и стремится к нулю при $\|\mathbf{X}\| \to 0$.

Если $\sigma > \mu$, то для достаточно малых значений $\|\mathbf{X}(k)\|$ и при всех $k = 0, 1, \dots$ имеет место неравенство $\Delta V \le -b_1\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\mu-1}/2$. Следовательно, функция $V(\mathbf{X})$ удовлетворяет требованиям теоремы об асимптотической устойчивости ([2], с. 27–30). □

Замечание 2. Аналогичным образом можно показать, что если $\|\mathbf{X}(k)\|$ достаточно мала, то при всех $k = 0, 1, \dots$ выполнено неравенство $\Delta V \ge -b_3\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\mu-1}$, где $b_3 > 0$. Значит, для решений системы (15) в некоторой окрестности точки $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ справедливы те же самые оценки (14), что и для решений невозмущенной системы, но, вообще говоря, с другими значениями постоянных c_1, c_2, c_3, c_4.

Замечание 3. Предположим, что условие 2), которому удовлетворяют функции $V(\mathbf{X})$ и $W(\mathbf{X})$, заменено условием

2′) функция $V(\mathbf{X})$ не является знакопостоянной отрицательной, а функция $W(\mathbf{X})$ отрицательно определена.

Тогда, применяя первую теорему о неустойчивости ([4], с. 82), можно показать, что нулевое решение системы (1) неустойчиво, а при $\sigma > \mu$ неустойчивость нулевого решения сохраняется и для возмущенной системы.

4. Исследование устойчивости систем, находящихся под воздействием неограниченных возмущений. Пусть теперь векторная функция $\mathbf{R}(k, \mathbf{X})$ при всех $k = 0, 1, \dots$ и $\|\mathbf{X}\| \le h$ удовлетворяет условию

$$\|\mathbf{R}(k, \mathbf{X})\| \le c(k+1)^{\alpha}\|\mathbf{X}\|^{\sigma}, \quad (17)$$

где c, α, σ — положительные постоянные. Таким образом, возмущения в системе (15), вообще говоря, являются неограниченными, а параметр α определяет степень их роста.

Исследуем вопрос, насколько порядок возмущений (величина σ) должен превышать порядок однородности правых частей системы (1), чтобы из асимптотической устойчивости нулевого решения этой системы следовала асимптотическая устойчивость нулевого решения возмущенных уравнений.

Теорема 2. *При выполнении неравенства $\sigma > \mu + \alpha(\mu - 1)$ нулевое решение системы* (15) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Используя представление приращения функции $V(\mathbf{X})$ на решениях возмущенных уравнений в виде (16) и условие (17), получаем, что при $\|\mathbf{X}(k)\| < \delta$, где δ — достаточно малое положительное число, и для всех $k = 0, 1, \dots$ справедлива оценка

$$\Delta V \le -b_1\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\mu-1} + b_2(k+1)^{\alpha}\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\sigma-1} + b_3(k+1)^{\alpha m}\|\mathbf{X}(k)\|^{\sigma m},$$

где $b_1, b_2, b_3 > 0$.

Покажем, что существуют числа γ, A и L такие, что для любого решения $\mathbf{X}(k)$ системы (15) с начальными данными $\mathbf{X}(k_0) = \mathbf{X}_0$, удовлетворяющими условиям

$$k_0 \geq L, \quad \|\mathbf{X}_0\|^{\mu-1} < \gamma/k_0, \tag{18}$$

при всех $k \geq k_0$ имеет место неравенство

$$\|\mathbf{X}(k)\|^{\mu-1} < A/k. \tag{19}$$

Пусть $a_1 = \min\limits_{\|\mathbf{X}\|=1} V(\mathbf{X})$, $a_2 = \max\limits_{\|\mathbf{X}\|=1} V(\mathbf{X})$. Выберем числа γ и A так, чтобы выполнялись соотношения

$$0 < \gamma < \frac{2ma_2}{(\mu-1)b_1}, \quad A > \frac{2ma_2}{(\mu-1)b_1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\mu-1}{m}}.$$

Далее задаем $L > 0$ настолько большим, чтобы при $k \geq L$ были справедливы неравенства

$$A/k < \delta^{\mu-1}, \quad k \geq \frac{(\mu-1+m)b_1\gamma}{2ma_2}, \quad 4b_2(k+1)^{\alpha}(A/k)^{\frac{\sigma-\mu}{\mu-1}} < b_1, \quad 4b_3(k+1)^{\alpha m}(A/k)^{\frac{(\sigma-1)m}{\mu-1}-1} < b_1.$$

Рассмотрим решение $\mathbf{X}(k)$ системы (15) с начальными данными, удовлетворяющими условиям (18). Пусть существует такое натуральное число $k_1 > k_0$, что $\|\mathbf{X}(k_1)\|^{\mu-1} \geq A/k_1$, а при $k = k_0, \dots, k_1 - 1$ имеет место оценка (19). Тогда для всех $k = k_0, \dots, k_1 - 1$ получаем

$$\Delta V \leq -\frac{b_1}{2}\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\mu-1} \leq -\frac{b_1}{2}\left(\frac{V(\mathbf{X}(k))}{a_2}\right)^{\frac{\mu-1}{m}+1}.$$

Заметим, что при этом

$$\frac{(\mu-1+m)b_1}{2ma_2}\left(\frac{V(\mathbf{X}_0)}{a_2}\right)^{\frac{\mu-1}{m}} < \frac{(\mu-1+m)b_1\gamma}{2ma_2k_0} \leq 1.$$

Применяя лемму 2, приходим к неравенству

$$V(\mathbf{X}(k_1)) \leq V(\mathbf{X}_0)\left(1 + \frac{(\mu-1)b_1}{2m}a_2^{-\frac{\mu-1}{m}-1}V^{\frac{\mu-1}{m}}(\mathbf{X}_0)(k_1-k_0)\right)^{-\frac{m}{\mu-1}}.$$

Учитывая оценки (8), которым удовлетворяет функция $V(\mathbf{X})$, получаем неравенство

$$k_1\left(\frac{(\mu-1)b_1}{2ma_2} - \frac{1}{A}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\mu-1}{m}}\right) \leq k_0\left(\frac{(\mu-1)b_1}{2ma_2} - \frac{1}{\gamma}\right).$$

Из условий выбора чисел γ и A следует, что левая часть данного неравенства положительна, а правая — отрицательна. Приходим к противоречию. Значит, для решения $\mathbf{X}(k)$ при всех $k \geq k_0$ имеет место оценка (19).

Используя доказанное свойство решений системы (15), а также их непрерывную зависимость от начальных данных, получаем утверждение теоремы. $\square$

5. Построение нестационарных функций Ляпунова для нелинейных систем. Теорема 1 утверждает, что возмущения не нарушают асимптотической устойчивости нулевого решения, если их порядок выше порядка однородности функций, входящих в правые части уравнений (1). Покажем теперь, что для некоторых классов нестационарных возмущений асимптотическая устойчивость сохраняется и в случае, когда $\sigma \leq \mu$.

Пусть система (15) имеет вид

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{X}(k) + \mathbf{F}(\mathbf{X}(k)) + \mathbf{B}_k\mathbf{Q}(\mathbf{X}(k)). \tag{20}$$

Здесь $\mathbf{B}_k$ — постоянные матрицы размерности $n \times l$, а элементы l-мерного вектора $\mathbf{Q}(\mathbf{X})$ представляют собой непрерывно дифференцируемые однородные функции порядка $\sigma > 1$.

Предположим, что последовательность $\mathbf{B}_k$ является ограниченной. Кроме того, в дополнение к условиям 1)–3) на функции $V(\mathbf{X})$ и $W(\mathbf{X})$, будем считать, что $V(\mathbf{X})$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Заметим, что для существования таких функций Ляпунова достаточно, чтобы нулевое решение системы (2) было асимптотически устойчивым, а векторная функция $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ дважды непрерывно дифференцируемой ([3], с. 119–123).

Рассмотрим последовательность $n \times l$-матриц

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{I}_k = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{B}_j, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Теорема 3. *Если последовательность* (21) *ограничена, то при выполнении неравенства*

$$2\sigma > \mu + 1 \tag{22}$$

нулевое решение системы (20) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Функцию Ляпунова выбираем в виде

$$V_1(k, \mathbf{X}) = V(\mathbf{X}) - \left(\frac{\partial V(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}\right)^{\top} \mathbf{I}_k \mathbf{Q}(\mathbf{X}). \tag{23}$$

Получим

$$\begin{aligned}\Delta V_1 = V_1(k+1, \mathbf{X}(k+1)) - V_1(k, \mathbf{X}(k)) = -W(\mathbf{X}(k)) + \\ + \frac{1}{2}(\mathbf{X}(k+1) - \mathbf{X}(k))^{\top} \frac{\partial^2 V(\mathbf{Z}_k)}{\partial \mathbf{X}^2}(\mathbf{X}(k+1) - \mathbf{X}(k)) + \\ + \left(\frac{\partial V(\mathbf{X}(k))}{\partial \mathbf{X}}\right)^{\top} \mathbf{I}_{k+1}\mathbf{Q}(\mathbf{X}(k)) - \left(\frac{\partial V(\mathbf{X}(k+1))}{\partial \mathbf{X}}\right)^{\top} \mathbf{I}_{k+1}\mathbf{Q}(\mathbf{X}(k+1)),\end{aligned}$$

где $\mathbf{Z}_k = \mathbf{X}(k) + \theta_k(\mathbf{X}(k+1) - \mathbf{X}(k))$, $\theta_k \in (0, 1)$. Следовательно, при всех $k = 0, 1, \ldots$ и $\mathbf{X}(k) \in \mathbf{E}^n$ справедливы соотношения

$$\begin{gathered} a_1\|\mathbf{X}(k)\|^m - a_3\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\sigma-1} \le V_1(k, \mathbf{X}(k)) \le a_2\|\mathbf{X}(k)\|^m + a_3\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\sigma-1}, \\ \Delta V_1 \le -b_1\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\mu-1} + b_2(\|\mathbf{X}(k)\|^{2\mu} + \|\mathbf{X}(k)\|^{2\sigma})(\|\mathbf{X}(k)\| + \\ + \|\mathbf{X}(k)\|^{\mu} + \|\mathbf{X}(k)\|^{\sigma})^{m-2} + b_3(\|\mathbf{X}(k)\|^{\mu} + \|\mathbf{X}(k)\|^{\sigma})(\|\mathbf{X}(k)\| + \|\mathbf{X}(k)\|^{\mu} + \|\mathbf{X}(k)\|^{\sigma})^{m+\sigma-2}, \end{gathered}$$

где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 — положительные постоянные.

Если выполнено условие (22), то для достаточно малых значений $\|\mathbf{X}(k)\|$ и при всех $k = 0, 1, \ldots$ имеют место неравенства

$$\frac{a_1}{2}\|\mathbf{X}(k)\|^m \le V_1(k, \mathbf{X}(k)) \le 2a_2\|\mathbf{X}(k)\|^m, \quad \Delta V_1 \le -\frac{b_1}{2}\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\mu-1}.$$

Таким образом, функция $V_1(k, \mathbf{X})$ удовлетворяет требованиям теоремы об асимптотической устойчивости ([2], с. 27–30). $\square$

Предположим теперь, что последовательность (21) не является ограниченной. Однако существует такое число $0 < \beta \le 1$, что

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^{\beta}} \mathbf{I}_k = \mathbf{0}. \tag{24}$$

Теорема 4. *При выполнении неравенства* $2\sigma \ge \mu + 1 + \beta(\mu - 1)$ *нулевое решение системы* (20) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. В качестве функции Ляпунова снова выберем функцию (23). Для достаточно малых значений $\|\mathbf{X}(k)\|$ и при всех $k = 0, 1, \dots$ получим оценки

$$a_1\|\mathbf{X}(k)\|^m - \omega_k(k+1)^\beta\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\sigma-1} \le V_1(k, \mathbf{X}(k)) \le$$
$$\le a_2\|\mathbf{X}(k)\|^m + \omega_k(k+1)^\beta\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\sigma-1},$$
$$\Delta V_1 \le -b\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\mu-1} + \varepsilon_k(k+1)^\beta(\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\mu+\sigma-2} + \|\mathbf{X}(k)\|^{m+2\sigma-2}),$$

где $a_1, a_2, b > 0$, а последовательности неотрицательных чисел ω_k, ε_k стремятся к нулю при $k \to \infty$.

Далее аналогично доказательству теоремы 2 можно доказать существование положительных постоянных γ, A и L таких, что если начальные данные решения $\mathbf{X}(k)$ системы (20) удовлетворяют условиям (18), то при всех $k \ge k_0$ выполнено неравенство (19). □

Замечание 4. При $0 < \beta \le 1$ имеем $(\mu + 1 + \beta(\mu - 1))/2 \le \mu$. Следовательно, для всех рассматриваемых значений параметра β теорема 4 уточняет полученный в разделе 3 критерий асимптотической устойчивости по нелинейному приближению: $\sigma > \mu$.

Замечание 5. Если последовательность (21) ограничена, то предельное соотношение (24) справедливо для любого $\beta > 0$. Значит, для возмущений такого рода теорема 4 определяет то же самое условие асимптотической устойчивости, что и теорема 3, т. е. $2\sigma > \mu + 1$.

Пример 3. Рассмотрим скалярное уравнение

$$x(k+1) = x(k) - a\,x^9(k) + b_k x^\sigma(k), \tag{25}$$

где a — положительная постоянная, σ — рациональное число с нечетным знаменателем, $\sigma > 1$.

Пусть $b_k = \sin k$, $k = 0, 1, \dots$ Тогда последовательность $\{I_k\}$, построенная по формулам (21), будет ограниченной. Применяя теорему 3, находим достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (25): $\sigma > 5$.

Предположим теперь, что $b_k = \cos \pi\sqrt{k}$, $k = 0, 1, \dots$ В этом случае последовательность $\{I_k\}$ уже не является ограниченной, а предельное соотношение (24) справедливо тогда и только тогда, когда $\beta > 1/2$. В соответствии с теоремой 4 для асимптотической устойчивости нулевого решения рассматриваемого уравнения достаточно выполнения неравенства $\sigma > 7$.

6. Асимптотическая устойчивость по отношению к части переменных. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(k+1) &= \mathbf{X}(k) + \mathbf{F}(\mathbf{X}(k)) + \mathbf{R}(k, \mathbf{X}(k), \mathbf{Y}(k)), \\ \mathbf{Y}(k+1) &= \mathbf{G}(k, \mathbf{Y}(k)) + \mathbf{D}(k, \mathbf{X}(k), \mathbf{Y}(k)). \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь $\mathbf{X}(k)$ и $\mathbf{Y}(k)$ — векторы размерности n и l соответственно; элементы векторной функции $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ определены и непрерывно дифференцируемы при всех $\mathbf{X} \in \mathbf{E}^n$ и являются однородными функциями порядка $\mu > 1$; векторные функции $\mathbf{G}(k, \mathbf{Y})$, $\mathbf{R}(k, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $\mathbf{D}(k, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ заданы при $k = 0, 1, \dots$, $\|\mathbf{X}\| \le h$, $\|\mathbf{Y}\| \le h$ (h — положительная постоянная), для каждого фиксированного значения k непрерывны как функции переменных $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ и удовлетворяют условиям

$$\mathbf{G}(k, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \|\mathbf{R}(k, \mathbf{X}, \mathbf{Y})\| \le \psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\,\|\mathbf{X}\|^\mu, \quad \|\mathbf{D}(k, \mathbf{X}, \mathbf{Y})\| \le c\|\mathbf{X}\|^\lambda,$$

где $\psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \to 0$ при $\|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{Y}\| \to 0$, $c > 0$, $\lambda > 0$.

Наряду с уравнениями (26) рассмотрим систему, составленную из уравнений (1) и уравнений

$$\mathbf{Y}(k+1) = \mathbf{G}(k, \mathbf{Y}(k)). \tag{27}$$

Систему уравнений (1), (27) будем называть системой первого приближения для (26).

Исследуем вопрос, при каких условиях устойчивость нулевого решения системы первого приближения обеспечивает устойчивость нулевого решения системы (26).

По-прежнему будем считать, что нулевое решение уравнений (1) асимптотически устойчиво, причем для этих уравнений существуют однородные функции Ляпунова $V(\mathbf{X})$ и $W(\mathbf{X})$, обладающие свойствами 1)–3). Кроме того, предположим, что для уравнений (27) найдена функция Ляпунова $V_1(k,\mathbf{Y})$, которая задана при $k=0,1,\ldots$, $\|\mathbf{Y}\|\le h$, положительно определена, непрерывно дифференцируема по $\mathbf{Y}$, ее частные производные $\partial V_1/\partial y_j$, $j=1,\ldots,l$, ограничены, а приращение $V_1(k,\mathbf{Y})$ на решениях уравнений (27) неположительно. Заметим, что если функция $V_1(k,\mathbf{Y})$ удовлетворяет указанным условиям, то нулевое решение системы (27) является равномерно устойчивым ([2], с. 27).

Теорема 5. *При выполнении неравенства $\lambda>\mu-1$ нулевое решение системы* (26) *устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво относительно* $\mathbf{X}$.

Доказательство. Рассмотрим приращения функций $V(\mathbf{X})$ и $V_1(k,\mathbf{Y})$ на решениях системы (26). Получим, что при всех $k=0,1,\ldots$, $\|\mathbf{X}(k)\|\le h$, $\|\mathbf{Y}(k)\|\le h$ имеют место соотношения

$$V(\mathbf{X}(k+1))-V(\mathbf{X}(k))\le\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\mu-1}\big(-b_1+b_2\,\psi(\mathbf{X}(k),\mathbf{Y}(k))\big),$$
$$V_1(k+1,\mathbf{Y}(k+1))-V_1(k,\mathbf{Y}(k))\le b_3\,\|\mathbf{X}(k)\|^{\lambda},$$

где b_1, b_2, b_3 — положительные постоянные. Следовательно, существует такое число $\gamma>0$, что если при $k=k_0,\ldots,k_1$ решение $(\mathbf{X}^\top(k),\mathbf{Y}^\top(k))^\top$ системы (26) остается в области $\|\mathbf{X}\|<\gamma$, $\|\mathbf{Y}\|<\gamma$, то для этих значений k справедлива оценка

$$V(\mathbf{X}(k+1))\le V(\mathbf{X}(k))-\frac{b_1}{2}\|\mathbf{X}(k)\|^{m+\mu-1}.$$

Учитывая неравенства (8), которым удовлетворяет однородная функция $V(\mathbf{X})$, имеем

$$V(\mathbf{X}(k+1))\le V(\mathbf{X}(k))-\frac{b_1}{2}\left(\frac{V(\mathbf{X}(k))}{a_2}\right)^{\frac{\mu-1}{m}+1}.$$

При этом число γ выберем настолько малым, чтобы выполнялось условие $\frac{(\mu-1+m)b_1\gamma^{\mu-1}}{2ma_2}\le 1$.

Используя лемму 2 и оценки (8), приходим к неравенству

$$\|\mathbf{X}(k)\|\le c_1\|\mathbf{X}(k_0)\|\big(1+c_2\|\mathbf{X}(k_0)\|^{\mu-1}(k-k_0)\big)^{-\frac{1}{\mu-1}},\tag{28}$$

которое справедливо при $k=k_0,\ldots,k_1+1$. Здесь c_1, c_2 — положительные постоянные, не зависящие от начальных данных решения.

Далее получаем

$$V_1(k_1+1,\mathbf{Y}(k_1+1))-V_1(k_0,\mathbf{Y}(k_0))\le b_3\sum_{k=k_0}^{k_1}\|\mathbf{X}(k)\|^{\lambda}\le$$
$$\le b_3\|\mathbf{X}(k_0)\|^{\lambda}\left(1+c_1^{\lambda}\sum_{k=k_0+1}^{k_1}\big(1+c_2\|\mathbf{X}(k_0)\|^{\mu-1}(k-k_0)\big)^{-\frac{\lambda}{\mu-1}}\right)\le$$
$$\le b_3\|\mathbf{X}(k_0)\|^{\lambda}\left(1+c_1^{\lambda}\int_{k_0}^{k_1-1}\big(1+c_2\|\mathbf{X}(k_0)\|^{\mu-1}(t-k_0)\big)^{-\frac{\lambda}{\mu-1}}dt\right).$$

Значит, имеет место оценка

$$V_1(k_1+1,\mathbf{Y}(k_1+1))\le V_1(k_0,\mathbf{Y}(k_0))+b_3\|\mathbf{X}(k_0)\|^{\lambda}+b_3c_1^{\lambda}c_3\|\mathbf{X}(k_0)\|^{\lambda-\mu+1},\tag{29}$$

где $c_3=\int\limits_0^{+\infty}(1+c_2\tau)^{-\frac{\lambda}{\mu-1}}d\tau$.

Зададим сколь угодно малое положительное число $\varepsilon<\gamma$. Пусть $\eta=\inf\limits_{k\ge0,\,\|\mathbf{Y}\|=\varepsilon}V_1(k,\mathbf{Y})$. Выберем $\delta>0$ так, чтобы выполнялись условия $c_1\delta<\varepsilon$, $3b_3\delta^{\lambda}<\eta$, $3b_3c_1^{\lambda}c_3\delta^{\lambda-\mu+1}<\eta$, $V_1(k,\mathbf{Y})<\eta/3$ при $\|\mathbf{Y}\|<\delta$, $k=0,1,\ldots$

Из оценок (28) и (29) следует, что если начальные данные решения $(\mathbf{X}^\top(k), \mathbf{Y}^\top(k))^\top$ удовлетворяют неравенствам $k_0 \geq 0$, $\|\mathbf{X}(k_0)\| < \delta$, $\|\mathbf{Y}(k_0)\| < \delta$, то при всех $k \geq k_0$ имеем $\|\mathbf{X}(k)\| < \varepsilon$, $\|\mathbf{Y}(k)\| < \varepsilon$, и при этом $\|\mathbf{X}(k)\| \to 0$ при $k \to +\infty$. $\square$

Замечание 6. Теорема 5 представляет собой распространение теоремы Ляпунова–Малкина ([5], с. 108–113) об асимптотической устойчивости по отношению к части переменных на случай разностных систем с существенно нелинейными уравнениями первого приближения.

Пример 4. Пусть задано скалярное уравнение

$$\ddot{z} + a(z)\dot{z}^\sigma = u, \tag{30}$$

где функция $a(z)$, $a(0) = 0$, определена и непрерывна при $|z| \leq h$ (h — положительная постоянная); σ — рациональное число с нечетным знаменателем, $\sigma \geq 1$; u — управление. Рассмотрим задачу стабилизации многообразия $\dot{z} = 0$ уравнения (30) дискретным регулятором вида $u(t) = \varphi(\dot{z}(k))$ при $t \in [k, k+1)$, $k = 0, 1, \ldots$

Исследуемое уравнение эквивалентно системе

$$\dot{x} = -a(y)x^\sigma + u, \quad \dot{y} = x. \tag{31}$$

Интегрируя эту систему на промежутках $[k, k+1]$, приходим к системе разностных уравнений

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + \varphi(x(k)) + R(x(k), y(k)), \\ y(k+1) &= y(k) + D(x(k), y(k)), \end{aligned} \tag{32}$$

где $R(x(k), y(k)) = -\int\limits_k^{k+1} a(y(t))x^\sigma(t)dt$, $D(x(k), y(k)) = \int\limits_k^{k+1} x(t)dt$. Заметим, что если число δ достаточно мало, то при $|x(k)| < \delta$, $|y(k)| < \delta$ справедливы оценки $|R(x(k), y(k))| \leq \psi(x(k), y(k))|x(k)|^\sigma$, $|D(x(k), y(k))| \leq c|x(k)|$. Здесь $\psi(x, y) \to 0$ при $|x| + |y| \to 0$, $c > 0$.

Пусть $\varphi(x(k)) = -bx^\mu(k)$, где b — положительная постоянная, $\mu > 1$ — рациональное число с нечетными числителем и знаменателем. Применяя теорему 5, получаем, что при выполнении неравенств $\mu < 2$, $\sigma \geq \mu$ нулевое решение разностной системы (32) устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво относительно x. Но тогда тем же самым свойством обладает и нулевое решение системы дифференциальных уравнений (31).

Литература

1. Зубов В.И. *Проблема устойчивости процессов управления.* – Л.: Судостроение, 1980. – 253 с.
2. Халанай А., Векслер Д. *Качественная теория импульсных систем.* – М.: Мир, 1971. – 310 с.
3. Зубов В.И. *Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение.* Учебн. пособие. – М.: Высш. школа, 1973. – 271 с.
4. Бромберг П.В. *Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования.* – М.: Наука, 1967. – 324 с.
5. Малкин И.Г. *Теория устойчивости движения.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1952. – 432 с.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила 25.04.2002