ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 2 (489)

УДК 517.547

Ю.М. ДЮКАРЕВ, А.Е. ЧОКЕ РИВЕРО

ЗАДАЧА НЕВАНЛИННЫ–ПИКА В КЛАССЕ $\mathcal{S}[a,b]$

1. Введение

При исследовании степенной проблемы моментов на компактном интервале М.Г. Крейн ввел ([1], с. 527) некоторый специальный класс голоморфных функций $\mathcal{S}[a,b]$. Этот класс был использован для описания всех решений неопределенной степенной проблемы моментов на компактном интервале. Как известно ([2], с. 121), решение проблемы моментов можно свести к описанию неванлинновских функций с предписанной асимптотикой вдоль мнимой оси. В этих терминах можно считать, что при решении проблемы моментов на компактном интервале была решена интерполяционная задача с кратным узлом интерполяции в бесконечно удаленной точке для функций класса $\mathcal{S}[a,b]$.

В данной работе поставлена и решена задача Неванлинны–Пика в классе $\mathcal{S}[a,b]$ в случае, когда заданы простые комплексные узлы интерполяции. При этом мы рассматриваем случай матричнозначных функций. Следует отметить, что проблема моментов на компактном интервале в матричной постановке была рассмотрена в [3].

Основными результатами статьи являются теоремы 8 и 9, в которых дано описание всех решений вполне неопределенной задачи Неванлинны–Пика в классе $\mathcal{S}[a,b]$ и установлен критерий разрешимости соответствующей интерполяционной задачи.

В работе используется метод В.П. Потапова решения интерполяционных задач [4] и некоторые его обобщения для неванлинновских [5] и стилтьесовских функций [6]–[8].

2. Постановка задачи Неванлинны-Пика в классе $\mathcal{S}[a,b]$

Пусть задано целое число $m \geq 1$. Обозначим через $\mathcal{R}$ (и назовем неванлинновским) множество $m\times m$-матриц-функций $w(z)$, которые определены и голоморфны в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и удовлетворяют условию $(w(z) - w^*(z))/2i \geq 0$.

Пусть $[a,b]$ — конечный интервал в $\mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{S}[a,b]$ множество $m \times m$-матриц-функций, которые определены и голоморфны в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, определены и непрерывны в точках $x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ и удовлетворяют условиям

1. $\{s(z) - s^*(z)\}/\{2i\} \geq 0$, $\operatorname{Im} z > 0$,
2. $s(x) \geq 0$, $x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$.

Из этого определения видно, что матрицы-функции $s(z) \in \mathcal{S}[a,b]$ по принципу симметрии Шварца $s(z) = s^*(\overline{z})$ аналитически продолжаются через $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ в нижнюю полуплоскость. Поэтому они фактически определены и голоморфны во всей комплексной плоскости с разрезом по интервалу $[a,b]$.

Сформулируем две теоремы ([1], с. 528).

Теорема 1. *Матрица-функция $s(z)$ принадлежит $\mathcal{S}[a,b]$ тогда и только тогда, когда $s(z)$ допускает интегральное представление вида*

$$s(z) = (b - z)\int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t - z}. \tag{1}$$

Здесь $\sigma(t)$ — неубывающая эрмитова $m\times m$-матрица-функция ограниченной вариации.

Теорема 2. *Матрица-функция $s(z)$ принадлежит $\mathcal{S}[a,b]$ тогда и только тогда, когда $s(z)\in\mathcal{R}$ и $\frac{z-a}{b-z}s(z)\in\mathcal{R}$.*

Пусть задана последовательность комплексных чисел

$$z_1,z_2,\dots,z_n,\quad z_j\neq z_k,\quad z_j\neq\overline{z}_k,\quad j\neq k,\quad \operatorname{Im}z_j\neq 0,$$

и последовательность квадратных $m\times m$-матриц $s_1,\dots,s_n$. Интерполяционная задача Неванлинны–Пика в классе $\mathcal{S}[a,b]$ состоит в описании таких матриц-функций $s(z)$, что

$$s(z_j)=s_j,\quad 1\le j\le n,\quad s(z)\in\mathcal{S}[a,b]. \tag{2}$$

Множество всех решений этой проблемы обозначим через $\mathcal{L}$.

Вместе с каждым решением $s(z)$ проблемы (2) будем рассматривать матрицы-функции

$$s_1(z)=s(z),\quad s_2(z)=\frac{z-a}{b-z}s(z). \tag{3}$$

Введем блочные матрицы

$$T=\begin{bmatrix} z_1I & 0 & \dots & 0\\ 0 & z_2I & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & z_nI\end{bmatrix},\quad K_1=\left\{\frac{s_j-s_k^*}{z_j-\overline{z}_k}\right\}_{j,k=1}^n,$$

$$K_2=\left\{\frac{\widetilde{s}_j-\widetilde{s}_k^*}{z_j-\overline{z}_k}\right\}_{j,k=1}^n,\quad \widetilde{s}_j=\frac{z_j-a}{b-z_j}s_j,\quad 1\le j\le n,$$

$$R_T(z)=(T-zI)^{-1}=\begin{bmatrix}(z_1-z)^{-1}I & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & (z_n-z)^{-1}I\end{bmatrix},$$

$$v=\operatorname{col}[I,I,\dots,I],\quad u_1=\operatorname{col}[s_1,s_2,\dots,s_n],\quad u_2=\operatorname{col}[\widetilde{s}_1,\widetilde{s}_2,\dots,\widetilde{s}_n].$$

В этих формулах 0 и I обозначают соответственно нулевую и единичную $m\times m$-матрицы.

Теорема 3. *Если $s(z)$ является решением задачи* (2), *то $s_1(z)$ и $s_2(z)$, определенные формулой* (3), *удовлетворяют следующей системе основных матричных неравенств* (*ОМН*) *В.П. Потапова* ($\operatorname{Im}z\neq 0$)

$$A_r(z)\equiv\left[\begin{array}{c|c} K_r & R^*_{T^*}(z)\{\,u_r-vs_r^*(z)\,\}\\ \hline * & \{s_r(z)-s_r^*(z)\}/\{z-\overline{z}\}\end{array}\right]\ge\ 0,\quad r=1,2. \tag{4}$$

Доказательство. Получим интегральные представления для блоков неравенства (4). Пусть $r=1$, тогда

$$\frac{s_1(z)-s_1^*(z)}{z-\overline{z}}=\int_a^b\frac{1}{t-z}(b-t)d\sigma(t)\frac{1}{t-\overline{z}}.$$

И далее

$$K_1=\int_a^b\begin{bmatrix}\dfrac{I}{t-z_1}\\ \dfrac{I}{t-z_2}\\ \vdots\\ \dfrac{I}{t-z_n}\end{bmatrix}(b-t)d\sigma(t)\left[\frac{I}{t-\overline{z}_1}\ \frac{I}{t-\overline{z}_2}\ \cdots\ \frac{I}{t-\overline{z}_n}\right]=\int_a^b R^*_{T^*}(t)v(b-t)d\sigma(t)v^*R_{T^*}(t).$$

Кроме того,

$$R^*_{T^*}(z)[u_r - vs_1^*(z)] = -\int_a^b R^*_{T^*}(t)v(b-t)d\sigma(t)\frac{1}{t-\overline{z}}.$$

Следовательно,

$$A_1(z) = \int_a^b \begin{bmatrix} R^*_{T^*}(t)v \\ -(t-z)^{-1}I \end{bmatrix} (b-t)d\sigma(t)\left[v^* R_{T^*}(t),\ -(t-\overline{z})^{-1}I\right] \geq 0.$$

Аналогично при $r = 2$ имеем

$$A_2(z) = \int_a^b \begin{bmatrix} R^*_{T^*}(t)v \\ -(t-z)^{-1}I \end{bmatrix} (t-a)d\sigma(t)\left[v^* R_{T^*}(t),\ -(t-\overline{z})^{-1}I\right] \geq 0. \quad \square$$

Докажем обратное утверждение.

Теорема 4. *Пусть матрица-функция* $s(z)$ *голоморфна в* $\operatorname{Im} z > 0$ *и построенные по* $s(z)$ *матрицы-функции* $s_1(z)$ *и* $s_2(z)$ (см. (3)) *удовлетворяют системе ОМН* (4) *в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$. *Тогда* $s(z)$ *является решением задачи Неванлинны–Пика* (2).

Доказательство. Из ОМН следует $\{s_r(z) - s_r^*(z)\}/\{2i\} \geq 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, $r = 1, 2$. Следовательно, $s_r(z) \in \mathcal{R}$. По теореме 2 $s(z) \in \mathcal{S}[a,b]$. Далее, снова из ОМН имеем

$$\left[\begin{array}{c|c} \dfrac{s_j - s_j^*}{z_j - \overline{z}_j} & \dfrac{s_j - s^*(z)}{z_j - \overline{z}} \\ \hline \dfrac{s_j^* - s(z)}{\overline{z}_j - z} & \dfrac{s(z) - s^*(z)}{z - \overline{z}} \end{array}\right] \geq 0.$$

Пусть e и f — произвольные такие m-мерные вектор-столбцы, что $\|e\| \leq 1$ и $\|f\| \leq 1$. Тогда

$$\left[\begin{array}{c|c} f^* \dfrac{s_j - s_j^*}{z_j - \overline{z}_j} f & f^* \dfrac{s_j - s^*(z)}{z_j - \overline{z}} e \\ \hline e^* \dfrac{s_j^* - s(z)}{\overline{z}_j - z} f & e^* \dfrac{s(z) - s^*(z)}{z - \overline{z}} e \end{array}\right] \geq 0.$$

Отсюда

$$\left| e^* \frac{s_j - s^*(z)}{z_j - \overline{z}} f \right|^2 \leq \left[f^* \frac{s_j - s_j^*}{z_j - \overline{z}_j} f \right] \left[e^* \frac{s(z) - s^*(z)}{z - \overline{z}} e \right].$$

Из того, что правая часть этого неравенства ограничена при $z \to \overline{z}_j$, получим $e^*[s^*(\overline{z}_j) - s_j]f = 0$. Поэтому $s^*(\overline{z}_j) = s_j$. Из принципа симметрии Шварца следует $s(z_j) = s_j$, $1 \leq j \leq n$. $\square$

3. Решение задачи Неванлинны–Пика в классе $\mathcal{S}[a,b]$

Задача Неванлинны–Пика (1) называется вполне неопределенной, если выполнены неравенства

$$K_1 > 0, \quad K_2 > 0. \tag{5}$$

Во вполне неопределенном случае свяжем с задачей (1) две матрицы-функции порядка $2m \times 2m$. Эти матрицы-функции позволяют решить систему ОМН методом факторизации.

Теорема 5. *Пусть*

$$B_r = I - i(z-b)J \begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(b)K_r^{-1}R_T(z)[u_r, v], \quad r = 1, 2,$$

$$U_1(z) = \left[\begin{array}{c|c} I & M_1 \\ \hline 0 & I \end{array}\right] B_1,$$

$$U_2(z) = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -M_2 & I \end{array}\right] B_2, \tag{6}$$

$$\begin{array}{l} M_1 = (b-a)v^* R_T^*(b)K_2^{-1}R_T(b)v, \\ M_2 = (b-a)u_1^* R_T^*(b)K_1^{-1}R_T(b)u_1, \end{array} \quad J = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -iI \\ \hline iI & 0 \end{array}\right].$$

Тогда

$$U_r^*(z)JU_r(z) - J = i(\overline{z} - z) \begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)K_r^{-1}R_T(z)[u_r, v], \quad r = 1, 2. \tag{7}$$

Доказательство. Проверим тождество (7)

$$U_r^*(z)JU_r(z) - J = \left\{I + i(\overline{z} - b) \begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)K_r^{-1}R_T(b)[u_r, v]J\right\} JB_r - J =$$

$$= -i(z-b) \begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(b)K_r^{-1}R_T(z)[u_r, v] + i(\overline{z} - b) \begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)K_r^{-1}R_T(b)[u_r, v] +$$

$$+ |z-b|^2 \begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)K_r^{-1}R_T(b)i(K_rT^* - TK_r)R_T^*(b)K_r^{-1}R_T(z)[u_r, v] =$$

$$= i(\overline{z} - z) \begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)K_r^{-1}R_T(z)[u_r, v].$$

При этом использовано очевидное тождество

$$[u_r, v]J \begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} = i(K_rT^* - TK_r). \quad \square$$

Следствие. Матрицы-функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$ обратимы во всех точках z, кроме узлов интерполяции и комплексно сопряженных точек

$$z_1, z_2, \ldots, z_n; \quad \overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_n.$$

Обратные матрицы могут быть найдены по принципу симметрии

$$U_r^{-1}(z) = JU_r^*(\overline{z})J, \quad r = 1, 2. \tag{8}$$

Для J-форм $U_r^{-1}(z)$ имеют место выражения

$$U_r^{-1}(z)JU_r^{-1^*}(z) - J = -i(\overline{z} - z)J \begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_r^{-1}R_{T^*}^*(z)[u_r, v]J, \quad r = 1, 2. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть в (7) $z = \overline{z} = x$. Тогда

$$U_r^*(x)JU_r(x) - J = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Умножим это равенство слева на J. Получим

$$JU_r^*(x)JU_r(x) - I = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Рассмотрим рациональную матрицу-функцию $F(z) = JU_r^*(\overline{z})JU_r(z) - I$. Из (10) следует $F(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. По теореме единственности $F(z) = 0$ во всех точках голоморфности. Отсюда следует (8). В равенстве (7) заменим z на $\overline{z}$ и умножим его слева и справа на J. Получим

$$JU_r^*(\overline{z})JJJU_r(\overline{z})J - J = i(z-\overline{z})J\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_r^{-1}R_{T^*}^*(z)[u_r, v]J, \quad r = 1, 2.$$

Из (8) следует (9). $\square$

Обозначим

$$U_r(z) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_r(z) & \beta_r(z) \\ \hline \gamma_r(z) & \delta_r(z) \end{array}\right], \quad r = 1, 2, \tag{11}$$

где α_r, β_r, γ_r, δ_r являются $m \times m$-матрицами.

Теорема 6. *Матрицы-функции* $U_1(z)$ *и* $U_2(z)$ *связаны следующим соотношением:*

$$U_2(z) = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{z-a}{b-z}\right)I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} U_1(z) \begin{pmatrix} \left(\dfrac{z-a}{b-z}\right)I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Доказательство. Имеем

$$U_1(z) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1(z) & \beta_1(z) \\ \hline \gamma_1(z) & \delta_1(z) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & M_1 \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \times$$
$$\times \left[\begin{array}{c|c} I-(z-b)v^*R_T^*(b)K_1^{-1}R_T(z)u_1 & -(z-b)v^*R_T^*(b)K_1^{-1}R_T(z)v \\ \hline (z-b)u_1^*R_T^*(b)K_1^{-1}R_T(z)u_1 & I+(z-b)u_1^*R_T^*(b)K_1^{-1}R_T(z)v \end{array}\right].$$

Преобразуем

$$\begin{aligned} \alpha_1(z) &= I-(z-b)v^*R_T^*(b)K_1^{-1}R_T(z)u_1 + (b-a)(z-b)v^*R_T^*(b)K_2^{-1}R_T(b)vu_1^*R_T^*(b)K_1^{-1}R_T(z)u_1 = \\ &= I-(z-b)v^*R_T^*(b)K_1^{-1}R_T(z)u_1 + (z-b)v^*R_T^*(b)K_2^{-1}\{K_2 + R_T^{-1}(a)R_T(b)K_1\}K_1^{-1}R_T(z)u_1 = \\ &= I-(z-b)v^*R_T^*(b)K_2^{-1}R_T(z)u_2 \end{aligned}$$

с использованием очевидного тождества

$$R_T(b)vu_1^*R_T^*(b) = (b-a)^{-1}\{K_2 + R_T^{-1}(a)R_T(b)K_1\}.$$

Аналогичным образом убеждаемся в том, что $\beta_1(z) = (z-a)v^*R_T^*(b)K_2^{-1}R_T(z)v$. Следовательно,

$$U_1(z) = \left[\begin{array}{c|c} I-(z-b)v^*R_T^*(b)K_2^{-1}R_T(z)u_2 & (z-a)v^*R_T^*(b)K_2^{-1}R_T(z)v \\ \hline (z-b)u_1^*R_T^*(b)K_1^{-1}R_T(z)u_1 & I+(z-b)u_1^*R_T^*(b)K_1^{-1}R_T(z)v \end{array}\right]. \tag{13}$$

Точно так же покажем

$$U_2(z) = \left[\begin{array}{c|c} I-(z-b)v^*R_T^*(b)K_2^{-1}R_T(z)u_2 & -(z-b)v^*R_T^*(b)K_2^{-1}R_T(z)v \\ \hline -(z-a)u_1^*R_T^*(b)K_1^{-1}R_T(z)u_1 & I+(z-b)u_1^*R_T^*(b)K_1^{-1}R_T(z)v \end{array}\right]. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует (12). $\square$

Теорема 7. *Во вполне неопределенном случае* (5) *система ОМН* (4) *эквивалентна факторизованной системе ОМН*

$$[s_r(z)\; I]\frac{U_r^{-1}(z)JU_r^{-1^*}(z)}{i(\overline{z}-z)}\begin{bmatrix} s_r^*(z) \\ I \end{bmatrix} \geq 0. \tag{15}$$

Доказательство. Умножим неравенство (4) при $r = 1$ слева и справа на матрицы

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -\{u_1^* - s_1(z)v^*\}R_{T^*}(z)K_1^{-1} & I \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c|c} I & -K_1^{-1}R_{T^*}^*(z)\{u_1 - vs_1^*(z)\} \\ \hline 0 & I \end{array}\right].$$

Получим

$$\left[\begin{array}{c|c} K_1 & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{s_1(z) - s_1^*(z)}{z - \overline{z}} - \{u_1^* - s_1(z)v^*\}R_{T^*}(z)K_1^{-1}R_{T^*}^*(z)\{u_1 - vs_1^*(z)\} \end{array}\right] \geq 0.$$

Отсюда

$$\frac{s_1(z) - s_1^*(z)}{z - \overline{z}} - \{u_1^* - s_1(z)v^*\}R_{T^*}(z)K_1^{-1}R_{T^*}^*(z)\{u_1 - vs_1^*(z)\} \geq 0.$$

Последнее неравенство можно записать в виде

$$[s_1(z)\, I]\left\{\frac{J}{i(\overline{z} - z)} - J\begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_1^{-1}R_{T^*}^*(z)[u_1\ v]J\right\}\begin{bmatrix} s_1^*(z) \\ I \end{bmatrix} \geq 0.$$

Отсюда и из (7) следует

$$[s_1(z)\, I]\left\{\frac{J}{i(\overline{z} - z)} + \frac{U_1^{-1}(z)JU_1^{-1^*}(z) - J}{i(\overline{z} - z)}\right\}\begin{bmatrix} s_1^*(z) \\ I \end{bmatrix} \geq 0.$$

Таким образом, неравенство (15) доказано при $r = 1$. Аналогично (15) доказывается при $r = 2$. □

Рассмотрим всевозможные пары $m \times m$-матриц-функций $[p(z)\ q(z)]$, которые мероморфны в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ и для которых существует такое дискретное в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ множество точек $\mathcal{D}_{pq}$, что

$$p(z)p^*(z) + q(z)q^*(z) > 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{[a, b] \cup \mathcal{D}_{pq}\}, \tag{16}$$

$$[p(z), q(z)]\frac{J}{i(\overline{z} - z)}\begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R} \cup \mathcal{D}_{pq}\}, \tag{17}$$

$$\left[\frac{z - a}{b - z}p(z), q(z)\right]\frac{J}{i(\overline{z} - z)}\begin{bmatrix} \dfrac{\overline{z} - a}{b - \overline{z}}p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R} \cup \mathcal{D}_{pq}\}. \tag{18}$$

Примером пар, удовлетворяющих условиям (16)–(18), являются пары вида $[s(z),\, I]$, $s(z) \in \mathcal{S}[a, b]$.

Пара $[p(z), q(z)]$ называется эквивалентной паре $[p_1(z), q_1(z)]$, если существует мероморфная и мероморфно обратимая в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ матрица-функция $Q(z)$ такая, что

$$p_1(z) = Q(z)p(z), \quad q_1(z) = Q(z)q(z).$$

Множество классов эквивалентности пар обозначим через $\mathcal{S}^\infty[a, b]$.

Теорема 8. *Пусть $U_1(z)$ определена формулами (11) и (6). Тогда дробно-линейное преобразование*

$$s(z) = \{p(z)\beta_1(z) + q(z)\delta_1(z)\}^{-1}\{p(z)\alpha_1(z) + q(z)\gamma_1(z)\} \tag{19}$$

задает взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности $\mathcal{S}^\infty[a, b]$ и решениями задачи Неванлинны–Пика $\mathcal{L}$ (2).

Доказательство теоремы основано на леммах 1–6.

Лемма 1. *Если пара $[p(z),\, q(z)]$ удовлетворяет условиям (16)–(18), то и пара*

$$[p_1(z),\, q_1(z)] = [p(z), \quad q(z)]U_1(z) \tag{20}$$

тоже удовлетворяет условиям (16)–(18).

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}_{p_1q_1}$ множество $\mathcal{D}_{pq}$, участвующее в определении пары $[p(z),\, q(z)]$, объединенное с узлами интерполяции и точками, комплексно сопряженными с узлами интерполяции. Ясно, что это множество дискретно в $\mathbb{C}\setminus[a,b]$. Во всех точках $z\in\mathbb{C}\setminus\{[a,b]\cup\mathcal{D}_{p_1q_1}\}$ матрица-функция $U_1(z)$ невырождена (см. следствие из теоремы 5), а пара $[p(z),\, q(z)]$ удовлетворяет условию (16). Отсюда следует, что пара $[p_1(z),\, q_1(z)]$ удовлетворяет условию (16) с заменой множества $\mathcal{D}_{pq}$ на множество $\mathcal{D}_{p_1q_1}$.

Теперь покажем, что выполнено условие (17) для пары $[p_1(z),\, q_1(z)]$. Для всех $z\in\mathbb{C}\setminus\{[a,b]\cup\mathcal{D}_{p_1q_1}\}$ имеем

$$[p_1(z),q_1(z)]\frac{J}{i(\overline{z}-z)}\begin{bmatrix}p_1^*(z)\\ q_1^*(z)\end{bmatrix}=[p(z),\, q(z)]\frac{U_1(z)JU_1^*(z)}{i(\overline{z}-z)}\begin{bmatrix}p^*(z)\\ q^*(z)\end{bmatrix}\geq$$

$$\geq[p(z),\, q(z)]\frac{J}{i(\overline{z}-z)}\begin{bmatrix}p^*(z)\\ q^*(z)\end{bmatrix}\geq 0.$$

Здесь использовано неравенство $U_1^*(z)JU_1(z)/i(\overline{z}-z)\geq J/i(\overline{z}-z)$, которое следует из (7). Аналогичным образом может быть доказано (18). $\square$

Лемма 2. $\det q_1(z)\not\equiv 0,\ z\in\mathbb{C}\setminus[a,b]$.

Доказательство. Пусть $z_0\in\mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}\cup\mathcal{D}_{p_1q_1}\}$. Из (20) имеем

$$0\leq[p(z_0),\, q(z_0)]\frac{J}{i(\overline{z_0}-z_0)}\begin{bmatrix}p^*(z_0)\\ q^*(z_0)\end{bmatrix}=[p_1(z_0),\, q_1(z_0)]\frac{U_1^{-1}(z_0)JU_1^{-1^*}(z_0)}{i(\overline{z_0}-z_0)}\begin{bmatrix}p_1^*(z_0)\\ q_1^*(z_0)\end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$[p_1(z_0),\, q_1(z_0)]\frac{U_1^{-1}(z_0)JU_1^{-1^*}(z_0)}{i(\overline{z_0}-z_0)}\begin{bmatrix}p_1^*(z_0)\\ q_1^*(z_0)\end{bmatrix}\geq 0. \tag{21}$$

Пусть вектор-столбец $e\in\mathbb{C}$ таков, что $q_1^*(z_0)e=0$. Из (21) следует

$$[e^*p_1(z_0),\, 0]\frac{J-U_1^{-1}(z_0)JU_1^{-1^*}(z_0)}{i(\overline{z}_0-z_0)}\begin{bmatrix}p_1^*(z_0)e\\ 0\end{bmatrix}\leq 0.$$

Отсюда и из (9) имеем

$$[e^*p_1(z_0),\, 0]J\begin{bmatrix}u_1^*\\ v^*\end{bmatrix}R_{T^*}(z_0)K_1^{-1}R_{T^*}^*(z_0)[u_1,\, v]J\begin{bmatrix}p_1^*(z_0)e\\ 0\end{bmatrix}\leq 0.$$

Но ядро последнего неравенства строго положительно, поэтому $p_1^*(z_0)e=0$. Таким образом, $p_1^*(z_0)e=q_1^*(z_0)e=0$. Отсюда и из (16) следует $e=0$. Поэтому

$$\det q_1(z_0)\neq 0\ \text{ и }\ \det q_1(z)\not\equiv 0.$$

Лемма 3. *Дробно-линейное преобразование* (19) *корректно определено для всех пар* $(p(z),q(z))$, *удовлетворяющих условиям* (16)–(18), *и* $s(z)\in\mathcal{S}[a,b]$.

Доказательство. По заданной паре $[p(z),q(z)]$ с помощью (20) построим $[p_1(z),q_1(z)]$. С учетом (11) имеем

$$[p_1(z),\, q_1(z)]=[p(z)\alpha_1(z)+q(z)\gamma_1(z),\, p(z)\beta_1(z)+q(z)\delta_1(z)].$$

Так как $\det q_1(z)\not\equiv 0$ по лемме 2, то $s(z)=q_1(z)^{-1}p_1(z)$ корректно определена как мероморфная матрица-функция (19). По построению $[p_1(z),\, q_1(z)]$ эквивалентна паре $[s(z),\, I]$. Следовательно, $[s(z),\, I]$ удовлетворяет в точках голоморфности соотношениям (17) и (18), т. е.

$$\frac{s^*(z)-s(z)}{(\overline{z}-z)}\geq 0,\quad \frac{\frac{\overline{z}-a}{b-\overline{z}}s^*(z)-\frac{z-a}{b-z}s(z)}{(\overline{z}-z)}\geq 0.$$

Первое из этих неравенств показывает, что все невещественные особенности $s(z)$ устранимы [9]. По теореме 2 $s(z) \in S[a,b]$. $\square$

Лемма 4. *Пары* $[p(z),\, q(z)]$ *и* $[p_1(z),\, q_1(z)]$ *в результате дробно-линейного преобразования* (19) *приводят к одной и той же матрице-функции* $s(z)$ *тогда и только тогда, когда они эквивалентны.*

Доказательство. Очевидно, что дробно-линейное преобразование (20), примененное к эквивалентным парам $[p(z),\, q(z)]$ и $[p_1(z),\, q_1(z)]$, приводит к одной и той же матрице-функции $s(z)$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $[p(z),\, q(z)]$ и $[p_1(z),\, q_1(z)]$ приводят к одной и той же матрице-функции $s(z)$ в результате дробно-линейного преобразования (20). Рассмотрим пары

$$[u(z),\, v(z)] = [p(z),\, q(z)]U_1(z), \quad [u_1(z),\, v_1(z)] = [p_1(z),\, q_1(z)]U_1(z).$$

Отсюда

$$[v(z)^{-1}u(z),\, I]U_1^{-1}(z) = [v^{-1}p(z),\, v^{-1}q(z)],$$
$$[v_1(z)^{-1}u_1(z),\, I]U_1 = [v_1^{-1}(z)p_1(z),\, v_1^{-1}(z)q_1(z)].$$

По условию имеем $v^{-1}(z)u(z) = v_1^{-1}(z)u_1(z) = s(z)$. Но тогда

$$[v^{-1}(z)p(z),\, v^{-1}(z)q(z)] = [v_1^{-1}(z)p_1(z),\, v_1^{-1}(z)q_1(z)].$$

Окончательно получим $p(z) = v(z)v_1^{-1}(z)p_1(z)$, $q(z) = v(z)v_1^{-1}(z)q_1(z)$. $\square$

Лемма 5. *Из соотношения* (15) *следует представление* (19).

Доказательство. Рассмотрим пару

$$[p(z),\, q(z)] = [s(z),\, I]U_1^{-1}(z). \tag{22}$$

Покажем, что для этой пары выполнятся условия (16)–(18). Действительно, во всех точках $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$, за исключением узлов интерполяции и сопряженных точек, имеем

$$[p(z), q(z)] \begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} = [s(z),\, I]U_1^{-1}(z)U_1^{-1^*}(z) \begin{bmatrix} s^*(z) \\ I \end{bmatrix} > 0,$$

т. е. выполнено (16). И далее с учетом (15) имеем

$$[p(z), q(z)] \frac{J}{i(\overline{z} - z)} \begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} = [s(z),\, I] \frac{U_1^{-1}(z)JU_1^{-1^*}(z)}{i(\overline{z} - z)} \begin{bmatrix} s^*(z) \\ I \end{bmatrix} \geq 0,$$

т. е. выполнено (17). Аналогичным образом убеждаемся в том, что выполнено условие (18).

Из (22) следует

$$[s(z),\, I] = [p(z)\alpha_1(z) + q(z)\gamma_1(z),\, p(z)\beta_1(z) + q(z)\delta_1(z)].$$

Отсюда

$$s(z) = p(z)\alpha_1(z) + q(z)\gamma_1(z), \quad I = p(z)\beta_1(z) + q(z)\delta_1(z).$$

Следовательно, $s(z)$ допускает представление в виде преобразования (19) над парой $[p(z), q(z)]$, удовлетворяющей условиям (16)–(18). $\square$

Лемма 6. *Если задана произвольная пара* $[p(z),\, q(z)]$*, удовлетворяющая условиям* (16)–(18)*, то преобразование* (19) *задает матрицу-функцию* $s(z)$*, которая удовлетворяет системе ОМН* (15).

Доказательство. Рассмотрим пару $[p_1(z),\, q_1(z)] = [p(z),\, q(z)]U_1(z)$. Матрица-функция $q_1(z)$ мероморфно обратима в $\mathbb{C}\setminus[a,b]$. Поэтому

$$[q_1^{-1}(z)p_1(z),\, I]U_1^{-1}(z) = [q_1^{-1}(z)p(z),\, q_1^{-1}(z)q(z)]. \tag{23}$$

Пусть $s(z) = q_1^{-1}(z)p_1(z)$, $P(z) = q_1^{-1}(z)p(z)$, $Q(z) = q_1^{-1}(z)q(z)$. Ясно, что $s(z)$ представлена в виде (19) и $s(z)\in\mathcal{S}[a,b]$ по лемме 3. Пара $[P(z),\, Q(z)]$ удовлетворяет условиям (16)–(18), т. к. она эквивалентна паре $[p(z),\, q(z)]$. Из (23) следует

$$0 \le [P(z),\, Q(z)]\frac{J}{i(\overline{z}-z)}\begin{bmatrix}P^*(z)\\ Q^*(z)\end{bmatrix} = [s(z),\, I]\frac{U_1^{-1}(z)JU_1^{-1^*}(z)}{i(\overline{z}-z)}\begin{bmatrix}s^*(z)\\ I\end{bmatrix}.$$

Таким образом, $s(z)$ удовлетворяет ОМН (15) при $r=1$. Аналогичным образом убеждаемся, что $s(z)$ удовлетворяет (15) при $r=2$. Следовательно, $s(z)\in\mathcal{L}$. $\square$

Теорема 9. *Для разрешимости задачи Неванлинны–Пика* (2) *необходимо и достаточно, чтобы* $K_1\ge 0$, $K_2\ge 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $s(z) = (b-z)\int\limits_a^b (t-z)^{-1}d\sigma(t)$ является решением интерполяционной задачи Неванлинны–Пика (2). Как и при доказательстве теоремы 3, убеждаемся в том, что

$$K_1 = \int_a^b R_{T^*}^*(t)v(b-t)d\sigma(t)v^*R_{T^*}(t) \ge 0,$$
$$K_2 = \int_a^b R_{T^*}^*(t)v(t-a)d\sigma(t)v^*R_{T^*}(t) \ge 0.$$

Достаточность. Рассмотрим вспомогательную интерполяционную задачу. Узлы интерполяции будут такими же, как и в задаче (2), а интерполируемые значения задаются формулами

$$w_1 = (b-z_1)\int_a^b \frac{Idt}{t-z_1},\ w_2 = (b-z_2)\int_a^b \frac{Idt}{t-z_2},\ \ldots,\ w_n = (b-z_n)\int_a^b \frac{Idt}{t-z_n}.$$

Требуется описать решения следующей интерполяционной задачи:

$$w(z_j) = w_j,\quad 1\le j\le n,\quad w(z)\in\mathcal{S}[a,b]. \tag{24}$$

Легко видеть, что $w(z) = (b-z)\int\limits_a^b I(t-z)^{-1}dt$ является решением интерполяционной задачи (24). Но тогда, как и при доказательстве теоремы 3, имеем

$$K_1^w = \int_a^b R_{T^*}^*(t)vv^*R_{T^*}(t)(b-t)dt \ge 0,$$
$$K_2^w = \int_a^b R_{T^*}^*(t)vv^*R_{T^*}(t)(t-a)dt \ge 0.$$

Покажем, что эти матрицы строго положительны. Действительно, пусть на некотором $n\times m$-мерном столбце $F = \mathrm{col}[f_1, f_2, \ldots, f_n]$ выродилась матрица K_1^w. Тогда имеем

$$0 = F^*K_1^wF = \int_a^b F^*(t)F(t)(b-t)dt,\quad F(t) = v^*R_{T^*}(t)F.$$

Отсюда следует $F(t)\equiv 0$, но тогда $F=0$. Таким образом, $K_1^w>0$. Аналогичные рассуждения приводят к выводу $K_2^w>0$. Доказали, что вспомогательная интерполяционная задача (24) является вполне неопределенной.

Пусть теперь дана интерполяционная задача (2) и для нее выполнено условие теоремы $K_1\ge 0$, $K_2\ge 0$. Покажем, что у задачи (2) существует хотя бы одно решение.

При каждом $k \geq 1$ рассмотрим интерполяционную задачу

$$s(z_j) = s_j + w_j/k, \quad 1 \leq j \leq n, \quad s(z) \in \mathcal{S}[a,b]. \tag{25}$$

Из полной неопределенности задачи (24) вытекает полная неопределенность задачи (25) при всех k. При каждом k выберем по одному решению $s_k(z)$ задачи (25). Легко видеть, что

$$\|s_k(z_1)\| \leq \|s_1\| + \|w_1\| \ \forall k \geq 1.$$

Отсюда следует ([10], с. 32), что существует подпоследовательность $s_{k_l}(z)$, которая равномерно на компактах в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ сходится к голоморфной матрице-функции $s(z)$. Для каждой из матриц-функций $s_{k_l}(z)$ запишем систему ОМН (4). Переходя к пределу, получим, что матрица-функция $s(z)$ удовлетворяет системе ОМН, т. е. является решением задачи (2). $\square$

Литература

1. Крейн М.Г., Нудельман А.А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П.Л. Чебышева и А.А. Маркова и их дальнейшее развитие.* – М.: Наука, 1973. – 551 с.
2. Ахиезер Н.И. *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.* – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.
3. Дюкарев Ю.М., Чоке Риверо А.Е. *Степенная проблема моментов на компактном интервале* // Матем. заметки. – 2001. – Т. 69. – Вып. 2. – С. 200–213.
4. Ковалишина И.В. *Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1983. – Т. 47. – № 3. – С. 455–497.
5. Ivanchenko T.S., Sakhnovich L.A. *An operator approach to the Potapov scheme for the solution of interpolation problems* // Operator Theory: Advances and Applications. – 1994. – V. 72. – P. 48–86.
6. Dyukarev Yu. M. *Integral representations of a pair of nonnegative operators and interpolations problems on the Stieltjes class* // Operator Theory: Advances and Apllications. – 1997. – V. 95. – P. 165–184.
7. Дюкарев Ю.М. *Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стилтьеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов.* 1 // Матем. физика, анализ, геометрия. – 1999. – Т. 6. – № 1/2. – С. 30–54.
8. Дюкарев Ю.М. *Факторизация оператор-функций мультипликативного класса Стилтьеса* // Докл. НАН Украины. – 2000. – № 9. – С. 23–26.
9. Dym H. *On Hermitian block Hankel matrices, matrix polynomials, the Hamburger moment problem, interpolation and maximum entropy* // Integral Equations and Operator Theory. – 1989. – V. 12. – P. 757–812.
10. Donoghue W.F. *Monotone matrix functions and analytic continuation.* – Berlin–N. Y. – Springer-Verlag, 1974. – 182 p.

Харьковский национальный университет

Поступила
06.11.2001