

Теория вероятностей и математическая статистика
Краткий конспект лекций

Тема 1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это наука о расположении элементов в определенном порядке и о подсчете числа способов такого расположения.

Комбинаторный принцип умножения если одну часть действия можно выполнить k способами, а другую - P способами, то все действие можно выполнить kP числом способов.

Пример. Пусть требуется составить набор из ручки, карандаша и линейки. Имеется:

5 различных ручек,

7 различных карандашей,

10 различных линеек.

Сколькими способами можно составить требуемый набор?

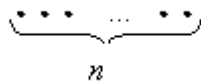
Решение. Действием в данном случае является составление набора из ручки, карандаша и линейки; действие распадается на три этапа (части): выбрать ручку, выбрать линейку и выбрать карандаш. Первую часть действия – выбрать ручку – можно выполнить пятью способами, вторую часть действия – выбрать карандаш – можно выполнить семью способами, третью часть действия – выбрать линейку – можно выполнить десятью способами. Тогда все действие можно выполнить

$$5 \cdot 7 \cdot 10 = 350$$

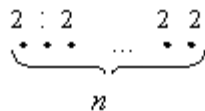
Число способов. Т.е. возможно 350 вариантов такого набора.

Пример. Сколько существует наборов длины n из нулей и единиц?

Решение. Действием в данном случае является составление набора длины из нулей и единиц.



Набор будет составлен, если все n позиций (мест) будут заполнены нулями и единицами. Действие распадается на n частей: заполнить первую позицию, вторую и т.д., заполнить n -ю позицию. Первую часть действия – написать первую компоненту - можно двумя способами: можно написать 0, а можно написать 1, написать вторую компоненту тоже можно двумя способами, и так все n мест в наборе: на каждом месте можно написать либо 0 либо 1:



Тогда все действие согласно комбинаторному принципу умножения можно выполнить 2^n числом способов:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}_n = 2^n$$

Комбинаторный принцип сложения. Если два действия взаимно исключают друг друга, и одно из них можно выполнить k способами, а другое - p способами, то оба действия можно выполнить $k + p$ числом способов.

Пример.

Выборкой объема k из множества $M = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ называется всякая последовательность из k элементов множества M .

Если элементы в выборке не повторяются, то выборка называется бесповторной, иначе – выборкой с повторениями

При бесповторной выборке все равно, каким образом осуществляется выбор: берутся все элементы сразу, или же поочередно (по одному).

Расположение элементов выборки в определенном порядке называется упорядочением, при этом выборка называется упорядоченной, в противном случае – неупорядоченной.

Рассмотрим бесповторную выборку

Расположение n различных элементов в определенном порядке называется перестановкой без повторений из n элементов.

Например, на множестве из трех элементов $\{a; b; c\}$ возможны следующие перестановки: $abc; acb; bac; bca; cab; cba$.

Число различных перестановок без повторений из n элементов обозначается P_n и равно $n!$, т.е.

$$P_n = n!$$

Сочетанием без повторений из n элементов по k называется неупорядоченное k -элементное подмножество n -элементного множества. Число сочетаний без повторений из n элементов по k равно C_n^k :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Например, требуется подсчитать, сколькими способами можно составить бригаду из трех человек для дежурства в группе из 30 человек. Поскольку порядок расположения людей в бригаде не фиксируется и люди не повторяются, то мы имеем случай сочетаний из 30 элементов по 3 без повторений:

$$C_{30}^3 = \frac{30!}{3!(30-3)!} = \frac{30!}{3!27!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{2 \cdot 3} = 10 \cdot 29 \cdot 14 = 4060$$

Таким образом, бригаду дежурных из трех человек в группе из 30 человек можно выбрать 4060 различными способами.

Размещением без повторений из n элементов по k называется упорядоченное k -элементное подмножество n -элементного множества.

Теорема.

Число размещений без повторений из n элементов по k равно:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Доказательство. Чтобы получить упорядоченное k -элементное подмножество n -элементного множества, нужно выполнить два этапа: выбрать k элементов из n (это можно выполнить C_n^k числом способов) и затем упорядочить выбранные элементы (это можно сделать $k!$ числом способов). Согласно комбинаторному принципу умножения, все

действие - получить упорядоченное k -элементное подмножество n -элементного множества - можно $C_n^k \cdot k! = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ числом способов.

Свойства сочетаний без повторений:

$$1) \quad C_n^k = C_n^{n-k} \quad k \leq n$$

Доказательство. Поскольку $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ и $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, то утверждаемое очевидно.

$$2) \quad C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n \quad (\text{без доказательства}).$$

Значения C_n^k могут быть найдены не расчетом по формуле количества сочетаний, а с помощью так называемого треугольника Паскаля. (Блез Паскаль (1623 – 1662) – французский математик).

Этот треугольник имеет вид:

```

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

```

Закономерность его построения такова: складывая две рядом стоящие числа, получаем число, стоящее ниже между ними. Первая строчка – значения числа сочетаний из 1 ($C_1^0 = C_1^1$), вторая – из 2 (C_2^0, C_2^1, C_2^2 - слева направо), и т.д.

Рассмотрим выборку с повторениями

Пусть имеется выборка из n элементов, причем k элементов из них - одинаковые.

1. Число различных перестановок на элементах такой выборки равно:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!} - \text{число перестановок с } k \text{ повторениями на множестве из } n \text{ элементов}$$

2. Сочетание с повторениями из n элементов по k - неупорядоченная выборка k элементов с возвращением из множества, содержащего n элементов:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k - \text{число различных сочетаний с повторениями из } n \text{ элементов по } k$$

3. Размещения с повторениями из n элементов по k - расположение n различных шаров по k различным ячейкам

$$\overline{A}_n^k = n^k - \text{число различных размещений с повторениями}$$

Пример. Сколько различных 4-буквенных слов можно составить из символов $0; a; b$?

Решение. Другими словами, требуется найти число перестановок с повторениями на 4 элементах выборки, в которой два элемента одинаковы:

$$P_4(2) = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

$0ab0 \quad a00b \quad b00a$

$0a0b \quad a0b0 \quad b0a0$

$00ba \quad ab00 \quad ba00$

$00ab$

$0ba0$

$0b0a$

Пример. Сколько различных перестановок можно составить из букв слова АБАКАН?

Решение. Требуется найти число перестановок на множестве из 6 элементов, среди которых три элемента одинаковы:

$$P_6(3) = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 120$$

Верно обобщение рассматриваемой формулы: число различных перестановок на множестве из n элементов, среди которых имеется

k_1 элементов первого вида,

k_2 элементов второго вида,

...

k_m элементов m -го вида

равно:

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

Пример. Сколько перестановок можно получить из букв слова КОЛОКОЛА?

Решение. Требуется найти число перестановок с повторениями на множестве из 8 букв, среди которых:

буква К повторяется 2 раза;

буква О повторяется 3 раза;

буква Л повторяется 2 раза

буква А повторяется 1 раз.

Таким образом,
$$P_8(2, 3, 2, 1) = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 1680$$

Пример. Сколькими способами можно составить набор из 5 шоколадок, если имеются шоколадки трех сортов в количестве по 10 штук каждого вида?

Решение. Поскольку при составлении шоколадного набора порядок расположения шоколадок не важен, то используем для подсчета формулу сочетаний с повторениями:

$$\overline{C_{30+5-1}^5} = C_{34}^{r5} \frac{34!}{5!(34-5)!} = \frac{34!}{5! \cdot 29!} = \frac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 34 \cdot 33 \cdot 8 \cdot 31$$

Пример. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 9 вагонам?

Решение. Поскольку по условию задачи в один вагон могут сесть несколько человек, и поскольку рассадка зависит от того кто в каком вагоне находится, то используем формулу размещения с повторениями:

$$\overline{A_9^7} = 9^7$$

Эту же задачу можно решить, применяя комбинаторный принцип умножения: действие – рассадить 7 человек распадается на 7 этапов: разместить первого пассажира, разместить второго пассажира, ..., разместить седьмого пассажира. Первый этап – размещение первого пассажира можно выполнить 9 способами, второго пассажира тоже можно разместить 9 способами, и т.д. :

$$\underbrace{9 \cdot 9 \cdot 9 \dots 9}_7 = 9^7 = 4782969$$

Пример. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 9 вагонам по одному в вагон?

Решение. Поскольку по условию задачи в один вагон могут сесть только один человек, и поскольку рассадка зависит от того кто в каком вагоне находится, то используем формулу размещений без повторений:

$$A_9^7 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 181440$$

Эту же задачу можно решить, применяя комбинаторный принцип умножения: действие – рассадить 7 человек распадается на 7 этапов: разместить первого пассажира, разместить второго пассажира, ..., разместить седьмого пассажира. Первый этап – размещение первого пассажира можно выполнить 9 способами, второго пассажира тоже можно разместить 9 способами, и т.д. :

$$\underbrace{9 \cdot 9 \cdot 9 \dots 9}_7 = 9^7$$

Пример. Сколько различных сигналов можно составить из четырех флажков различных цветов, если каждый сигнал должен состоять не менее чем из двух флажков?

Решение. Составить сигнал можно из двух флажков, из трех или из четырех. Перечисленные ситуации взаимно исключают друг друга (два флажка – это не три и не четыре), поэтому вычислим, сколькими способами можно составить сигнал в каждой из перечисленных ситуаций, и сложим полученные результаты.

Действие – составить сигнал – означает выбрать флажки из четырех и расположить их в определенном порядке. Таким образом, в каждом случае нужно выполнить два этапа: первый - выбрать флажки, второй – расположить выбранные флажки в определенном порядке.

Составляем сигналы из двух флажков: выбрать два флажка из четырех можно $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$ различными способами, и расположить выбранные два флажка в определенном порядке можно $2!$ числом способов. Таким образом, согласно комбинаторному принципу умножения, можно составить $6 \cdot 2 = 12$ различных сигналов из двух флажков.

Составляем сигналы из трех флажков: выбрать три флажка из четырех можно $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$ различными способами, и расположить выбранные три флажка в определенном порядке можно $3! = 2 \cdot 3 = 6$ числом способов. Таким образом, согласно комбинаторному принципу умножения, можно составить $4 \cdot 6 = 24$ различных сигналов из трех флажков.

Составляем сигналы из четырех флажков: выбрать четыре флажка из четырех можно $C_4^4 = \frac{4!}{4!(4-4)!} = \frac{1}{0!} = 1$ - одним способом, а расположить выбранные четыре флажка

в определенном порядке можно $4! = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ способами. Значит, можно составить $1 \cdot 24 = 24$ различных сигнала из четырех флажков.

Применим теперь комбинаторный принцип сложения: всего существует $12 + 12 + 24 = 48$ сигналов из не менее, чем двух флажков.

Пример. Номер автомобиля состоит из трех букв и трех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 10 цифр и алфавит в 30 букв.

Очевидно, что количество всех возможных комбинаций из 10 цифр по 4 равно 10.000.

Число всех возможных комбинаций из 30 букв по две равно $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$.

Если учесть возможность того, что буквы могут повторяться, то число повторяющихся комбинаций равно 30 (одна возможность повтора для каждой буквы). Итого, полное количество комбинаций по две буквы равно 900.

Если к номеру добавляется еще одна буква из алфавита в 30 букв, то количество комбинаций увеличивается в 30 раз, т.е. достигает 27.000 комбинаций.

Окончательно, т.к. каждой буквенной комбинации можно поставить в соответствие числовую комбинацию, то полное количество автомобильных номеров равно 270.000.000.

Тема 2. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

Классификация событий

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие события. Под событием понимают любой факт, который может произойти в результате опыта или испытания. Под опытом, или испытанием, понимается осуществление определённого комплекса условий.

Примеры событий:

– попадание в цель при выстреле из орудия (опыт — произведение выстрела; событие — попадание в цель);

– выпадение двух гербов при трёхкратном бросании монеты (опыт — трёхкратное бросание монеты; событие — выпадение двух гербов);

– появление ошибки измерения в заданных пределах при измерении дальности до цели (опыт — измерение дальности; событие — ошибка измерения).

Можно привести бесчисленное множество подобных примеров. События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита и т.д.

Различают события совместные и несовместные. События называются совместными, если наступление одного из них не исключает наступления другого. В противном случае события называются несовместными. Например, подбрасываются две игральные кости.

Событие — выпадание трех очков на первой игральной кости, событие — выпадание трех очков на второй кости. и — совместные события. Пусть в магазин поступила партия обуви одного фасона и размера, но разного цвета. Событие — наудачу взятая коробка окажется с обувью черного цвета, событие — коробка окажется с обувью коричневого цвета, и — несовместные события.

Событие называется достоверным, если оно обязательно произойдет в условиях данного опыта.

Событие называется невозможным, если оно не может произойти в условиях данного опыта. Например, событие, заключающееся в том, что из партии стандартных деталей будет взята стандартная деталь, является достоверным, а нестандартная — невозможным.

Событие называется возможным, или случайным, если в результате опыта оно может появиться, но может и не появиться. Примером случайного события может служить выявление дефектов изделия при контроле партии готовой продукции, несоответствие размера обрабатываемого изделия заданному, отказ одного из звеньев автоматизированной системы управления.

События называются равновозможными, если по условиям испытания ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другие. Например, пусть магазину поставляют электролампочки (причем в равных количествах) несколько заводо-изготовителей. События, состоящие в покупке лампочки любого из этих заводов, равновозможны.

Важным понятием является полная группа событий. Несколько событий в данном опыте образуют полную группу, если в результате опыта обязательно появится хотя бы одно из них. Например, в урне находится десять шаров, из них шесть шаров красных, четыре белых, причем пять шаров имеют номера. — появление красного шара при одном извлечении, — появление белого шара, — появление шара с номером. События образуют полную группу совместных событий.

Введем понятие противоположного, или дополнительного, события. Под противоположным событием понимается событие, которое обязательно должно произойти, если не наступило некоторое событие. Противоположные события несовместны и единственно возможны. Они образуют полную группу событий. Например, если партия изготовленных изделий состоит из годных и бракованных, то при извлечении одного изделия оно может оказаться либо годным — событие, либо бракованным — событие.

Операции над событиями

При разработке аппарата и методики исследования случайных событий в теории вероятностей очень важным является понятие суммы и произведения событий.

Суммой, или объединением, нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Например, если событие есть попадание в цель при первом выстреле, событие — при втором, то событие есть попадание в цель вообще, безразлично, при каком выстреле — первом, втором или при обоих вместе.

Произведением, или пересечением, нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Например, если событие есть попадание в цель при первом выстреле, событие — при втором, то событие состоит в том, что в цель попали при обоих выстрелах.

Классическое определение вероятности случайного события

Для количественного сравнения событий по степени возможности их появления вводится числовая мера, которая называется вероятностью события.

Вероятностью события называется число, являющееся выражением меры объективной возможности появления события.

Вероятность события равна отношению числа случаев, благоприятствующих ему, из общего числа единственно возможных, равновероятных и несовместных случаев к числу.

Свойство 1. Если все случаи являются благоприятствующими данному событию, то это событие обязательно произойдет. Следовательно, рассматриваемое событие является достоверным, а вероятность его появления, так как в этом случае

Свойство 2. Если нет ни одного случая, благоприятствующего данному событию, то это событие в результате опыта произойти не может. Следовательно, рассматриваемое событие является невозможным, а вероятность его появления, так как в этом случае :

Свойство 3. Вероятность наступления событий, образующих полную группу, равна единице.

Свойство 4. Вероятность наступления противоположного события определяется так же, как и вероятность наступления, события.

Важное достоинство классического определения вероятности события состоит в том, что с его помощью вероятность события можно определить, не прибегая к опыту, а исходя из логических рассуждений.

Элементы комбинаторики

В теории вероятностей часто используют размещения, перестановки и сочетания. Если дано множество, то размещением (сочетанием) из элементов по называется любое упорядоченное (неупорядоченное) подмножество элементов множества. При размещении называется перестановкой из элементов.

Статистическое определение вероятности

На практике часто классическое определение вероятности неприменимо по двум причинам: во-первых, классическое определение вероятности предполагает, что общее число случаев должно быть конечно. На самом же деле оно зачастую не ограничено. Во-

вторых, часто невозможно представить исходы опыта в виде равновозможных и несовместных событий.

Частота появления событий при многократно повторяющихся Опытах имеет тенденцию стабилизироваться около какой-то постоянной величины. Таким образом, с рассматриваемым событием можно связать некоторую постоянную величину, около которой группируются частоты и которая является характеристикой объективной связи между комплексом условий, при которых проводятся опыты, и событием.

Вероятностью случайного события называется число, около которого группируются частоты этого события по мере увеличения числа испытаний.

Это определение вероятности называется статистическим.

Преимущество статистического способа определения вероятности состоит в том, что он опирается на реальный эксперимент. Однако его существенный недостаток заключается в том, что для определения вероятности необходимо выполнить большое число опытов, которые очень часто связаны с материальными затратами. Статистическое определение вероятности события хотя и достаточно полно раскрывает содержание этого понятия, но не дает возможности фактического вычисления вероятности.

Геометрическая вероятность

В классическом определении вероятности рассматривается полная группа конечного числа равновозможных событий. На практике очень часто число возможных исходов испытаний бесконечно. В таких случаях классическое определение вероятности неприменимо. Однако иногда в подобных случаях можно воспользоваться другим методом вычисления вероятности. Для определенности ограничимся двумерным случаем.

Пусть на плоскости задана некоторая область площадью S , в которой содержится другая область площадью s (рис. 3). В область S наудачу бросается точка. Чему равна вероятность того, что точка попадет в область s ? При этом предполагается, что наудачу брошенная точка может попасть в любую точку области S , и вероятность попасть в какую-либо часть области s пропорциональна площади части s и не зависит от ее расположения и формы.

Таким образом, в общем случае, если возможность случайного появления точки внутри некоторой области на прямой, плоскости или в пространстве определяется не положением этой области и ее границами, а только ее размером, т. е. длиной, площадью или объемом, то вероятность попадания случайной точки внутрь некоторой области определяется как отношение размера этой области к размеру всей области, в которой может появляться данная точка. Это есть геометрическое определение вероятности.

Аксиомы теории вероятностей

Из статистического определения вероятности случайного события следует, что вероятность события есть число, около которого группируются частоты этого события, наблюдаемые на опыте. Поэтому аксиомы теории вероятностей вводятся так, чтобы вероятность события обладала основными свойствами частоты.

Аксиома 1. Каждому событию соответствует определенное число , удовлетворяющее условию и называемое его вероятностью.

Аксиома 2. Вероятность достоверного события равна единице.

Аксиома 3. Вероятность невозможного события равна нулю.

Аксиома 4. (аксиома сложения). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей.

Основные теоремы теории вероятностей

На практике обычно требуется определить вероятность событий, непосредственное экспериментальное воспроизведение которых затруднено.

Обычно такая оценка и производится с целью выявления наиболее рациональных конструктивных параметров элементов перспективной техники.

Поэтому, как правило, для определения вероятностей событий применяются не непосредственные прямые методы, а косвенные, позволяющие по известным вероятностям одних событий определять вероятности других событий, с ними связанных.

Применяя эти косвенные методы, мы всегда в той или иной форме пользуемся основными теоремами теории вероятностей. Этим теорем две:

- теорема сложения вероятностей;
- теорема умножения вероятностей.

Введем понятие о сумме событий и произведении событий.

Суммой двух событий А и В называется событие С состоящее в появлении хотя бы одного из событий А и В. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий А и В называется событие С, состоящее в совместном выполнении события А и В. Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Теорема сложения вероятностей применима к любому числу несовместных событий.

В общем виде ее удобно записать:

$$P(\sum A_i) = \sum P(A_i)$$

Отметим следствия вытекающие из теоремы сложения вероятностей.

Следствие 1: Если события A_1, A_2, \dots, A_n образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum P(A_i) = 1$$

Перед тем как вывести второе следствие теоремы сложения, введем понятие «противоположные события».

Противоположными событиями называются два несовместных события, образующих полную группу. Событие противоположное событию A принято обозначать \bar{A} .

Пример:

Событие A – безотказная работа всех элементов технической системы; \bar{A} — отказ хотя бы одного элемента.

Следствие 2: Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Следствие 2 есть частный случай следствия 1.

Вероятность суммы двух совместных событий выражается формулой:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Аналогично вероятность суммы трех совместных событий вычисляется по формуле:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

Общая формула для вероятности суммы любого числа совместных событий:

$$P(\sum A_i) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i A_j) + \sum P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

где суммы распространяются на различные значения индексов i ; i, j ; i, j, k и т.д.

Из формул можно записать аналогичную формулу для произведения событий

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B)$$

$$P(ABC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A+B) - P(A+C) - P(B+C) + P(A+B+C)$$

Теорема умножения вероятностей

Введем понятие независимые и зависимые события.

Событие A называется независимым от события B , если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Событие A называют зависимым от события B , если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Вероятность события A , вычисленная при условии, что имело место другое событие B , называется условной вероятностью события A и обозначается $P(A/B)$

Пример:

В урне два белых и один черный. Два лица вынимают из урны по одному шару. Рассматриваются события: A - появление белого шара у 1-го лица; B – появление белого шара у 2-го лица.

Решение: $P(A)$ до того как произошло событие B равно $2/3$. Если событие B произошло, то $P(A)=1/2$. Таким образом, событие A зависит от события B .

Условие независимости события A от события B можно записать в виде:

$$P(A/B) = P(A) \quad (10)$$

а, условие зависимости: $P(A/B) \neq P(A)$

Теорема умножения: Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие имели место:

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n/A_1A_2\dots A_{n-1}) \quad (13)$$

Следствие1: Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A

Следствие2: Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

Формула полной вероятности

Следствием основных теорем является так называемая формула полной вероятности.

Пусть требуется определить вероятность некоторого события A, которое может произойти вместе с одним из событий:

$$H_1, H_2, \dots, H_n,$$

Образующих полную группу несовместных событий. Будем эти события называть гипотезами.

В этом случае, вероятность события A вычисляется как сумма произведений вероятности каждой гипотезы на вероятность события при этой гипотезе

$$P(A) = \sum P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

Теорема гипотез (формула Байеса)

Имеется полная группа несовместных гипотез H_1, H_2, \dots, H_n . Вероятности этих гипотез до опыта известны и равны соответственно $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$.

Произведен опыт, в результате которого наблюдалось появление некоторого события A. Как следует изменить вероятность гипотез в связи с появлением этого события? По существу речь идет о том, чтобы найти условную вероятность $P(H_i/A)$ для каждой гипотезы.

$$P(H_i/A) = [P(H_i) \cdot P(H_i/A)] / [\sum P(H_i) \cdot P(A/H_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Тема 3. Повторные независимые испытания

В теории вероятностей и ее приложениях большое значение имеет простая схема случайного эксперимента, которую называют схемой Бернулли или схемой независимых испытаний. Испытания или опыты называют независимыми, если вероятность каждого

исхода не зависит от того, какие исходы имели другие опыты, т.е. вероятность каждого исхода остается постоянной от опыта к опыту.

Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых может появиться или не появиться событие A . Причем вероятность появления события в каждом опыте равна p , а вероятность не появления равна $q = 1 - p$. Требуется найти вероятность $P_n(k)$ того, что в n независимых опытах событие A произойдет ровно k раз. В качестве примеров описанной схемы можно назвать бросание монеты (A -- выпадение герба), стрельбу по цели в неизменных условиях (A -- попадание в цель), изготовление деталей при заданном технологическом режиме (A -- изготовление бракованной детали) и т.д.

Найдем вероятность $P_n(k)$. Все возможные случаи появления события A k раз в n опытах можно перебрать следующим образом. Возьмем k букв A и $n - k$ букв \bar{A} и будем их между собой переставлять. Каждая перестановка соответствует определенной очередности появления или не появления события A . Например, $A\bar{A}\bar{A}A\dots A$ соответствует ситуации, в которой событие появилось в первом опыте, во втором и третьем не появилось, появилось в четвертом и т.д. Всего вариантов будет столько, сколькими способами можно из n мест выбрать k различных (порядок не важен!) и поставить на них букву A , т.е. C_n^k способов. Вероятность любого из этих способов (в силу независимости опытов, а значит, и событий) равна по теореме умножения вероятностей $p^k q^{n-k}$. Появление хотя бы одного из этих C_n^k несовместных исходов приводит к появлению интересующего нас события, поэтому

$$P_n(k) = p^k q^{n-k} + \dots + p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Это и есть формула Бернулли.

Замечание, При вычислении факториалов $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $1! = 1$, $0! = 1$.

Пример. Хлебозавод выпускает $2/3$ изделий высшего сорта. Взяли наугад четыре изделия. 1) Какова вероятность того, что среди них только одно высшего сорта? 2) хотя бы одно изделие высшего сорта?

Решение: в данном случае вероятность того, что взятая наугад буханка имеет высший сорт, равна $p = 2/3$, не имеет $q = 1/3$ и не изменяется от изделия к изделию. Поэтому можно считать, что мы имеем дело со схемой независимых испытаний и пользоваться формулой Бернулли.

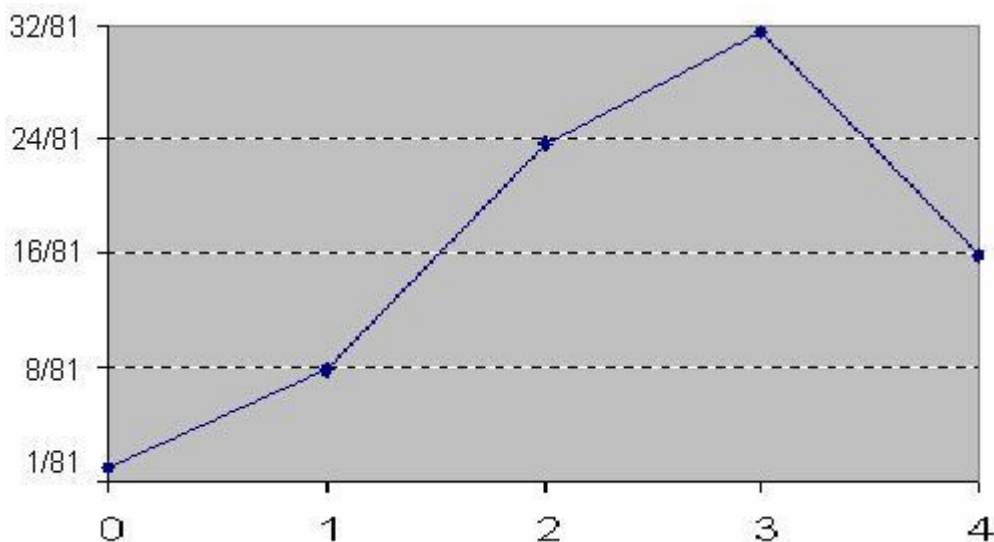
$$1) P_4(1) = \frac{4!}{1!3!} \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{27} = \frac{8}{81}.$$

2) Вторую вероятность легче вычислить с помощью противоположного

события:
$$P_4(k \geq 1) = P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(0) = 1 - \frac{4!}{0!4!} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}$$

Вычислим все вероятности: $P_4(0) = \frac{1}{81}, P_4(1) = \frac{8}{81}, P_4(2) = \frac{24}{81}, P_4(3) = \frac{32}{81}$

, $P_4(4) = \frac{16}{81}$ и сравним их между собой. Для наглядности построим многоугольник распределения вероятностей. На горизонтальной оси отметим значения k , а на вертикальной – соответствующие им вероятности (см. рис.).



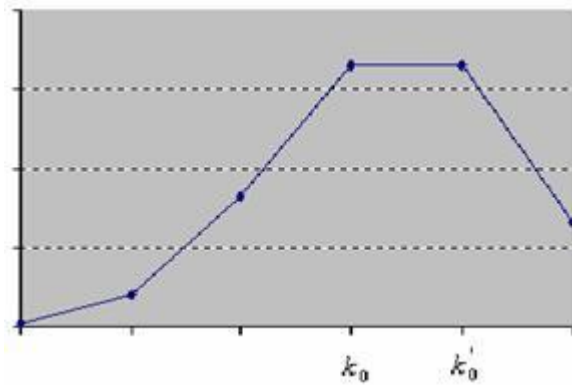
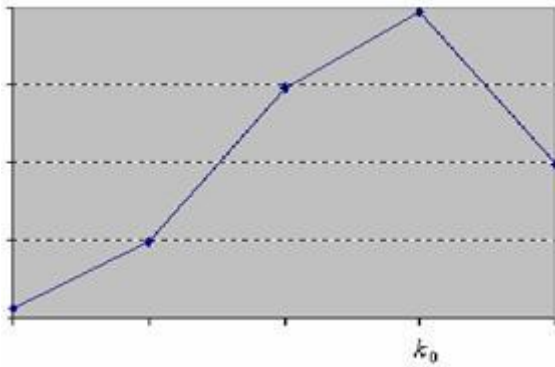
Легко видеть, что есть такое значение числа появления событий ($k = 3$), которому соответствует наибольшая вероятность. Назовем такое значение наивероятнейшим и обозначим через K_0 . Для небольших n можно отыскать наивероятнейшее значение простым перебором, но для больших n следует найти наиболее экономный способ.

Общий случай.

Зафиксируем n и убедимся в том, что $P_n(k)$ с ростом k сначала возрастает, а потом, достигнув наибольшего значения при $k = K_0$ (которое может повториться дважды), убывает. Для этого рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} \frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} &= \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} \cdot \frac{p}{q} = \\ &= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} = \frac{(n+1)p - kp}{kq} = \frac{(n+1)p - kp + kq - kq}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p - kq}{kq} \end{aligned}$$

Так как $kq > 0$, то из полученного выражения следует



$P_n(k) > P_n(k-1)$, если $(n+1)p > k$

2. $P_n(k) < P_n(k-1)$, если $(n+1)p < k$

3. $P_n(k) = P_n(k-1)$, если $(n+1)p = k$.

Итак, $k_0 \leq np + p$, но k_0 отстоит влево от $np + p$ не дальше чем на единицу (иначе между ними поместилось бы $k_0 + 1$, которое согласно неравенству было бы наивероятнейшим). Поэтому $k_0 \geq (np + p) - 1$. Так как k_0 – целое число, а длина интервала $[(np + p) - 1, np + p]$ равна единице, то приходим к выводу: наивероятнейшим числом появлений события в n независимых опытах является целое число k_0 , заключенное в пределах $(np + p) - 1 \leq k_0 \leq np + p$ (наивероятнейших чисел будет два, если $np + p$ целое).

Пример. а) Игральный кубик подбрасывается 50 раз. Каково наиболее вероятное число выпадения двух очков? Здесь $n = 50$, $p = 1/6$.

$$50 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 1 \leq k_0 \leq 50 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}, \quad \frac{45}{6} \leq k_0 \leq \frac{51}{6}, \quad 7 \frac{3}{6} \leq k_0 \leq 8 \frac{3}{6}.$$

Следовательно, $k_0 = 8$.

б) Если кубик подбрасывается всего 17 раз, то наивероятнейших числа будет два, так как $17 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 3$ (целое число). В этом случае $k_0 = 2$ или $k_0 = 3$.

Локальная теорема Лапласа

Решим следующую задачу (задача Банаха). Некто носит в кармане две коробки спичек (по 60 спичек каждая) и всякий раз, когда нужна спичка, наугад берет коробку и вынимает спичку. Какова вероятность того, что когда первая коробка будет пуста, во второй все еще останется 20 спичек? Выбор коробки можно рассматривать как независимое испытание, в котором с вероятностью $p = 1/2$ выбирается первая коробка. Всего опытов производится $n = 100 (= 60 + 40)$ и в этих ста опытах первая коробка должна

быть выбрана 60 раз. Вероятность этого равна

$$P_{100}(60) = \frac{100!}{60!40!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{60} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{40}.$$

Из записи видно, что при больших n пользоваться формулой Бернулли затруднительно из-за громоздких вычислений. Существуют специальные приближенные формулы, которые позволяют находить вероятности $P_n(k)$, если n велико. Одну из таких формул дает следующая теорема.

Теорема 1 Лапласа (локальная). Если в схеме Бернулли $0 < p < 1$, то вероятность того, что событие A наступит ровно k раз, удовлетворяет при больших n соотношению

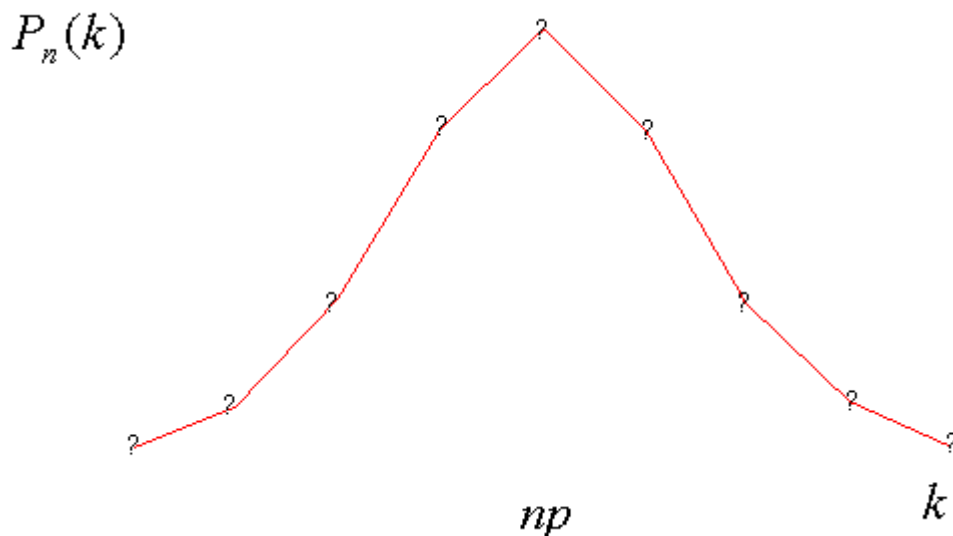
$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \text{где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

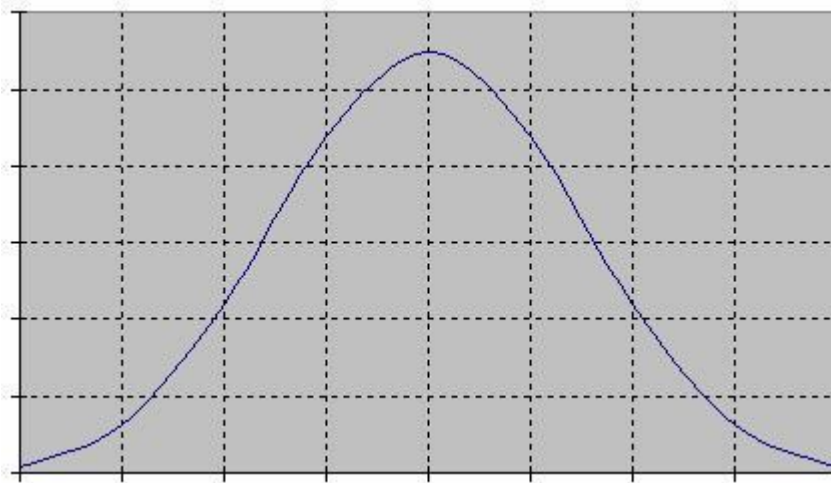
Для удобства вводится в рассмотрение функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ - локальная функция Лапласа и с ее помощью утверждение теоремы Лапласа можно записать как

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right). \quad (*)$$

Существуют специальные таблицы функции $\varphi(x)$, по которым для любого значения $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ можно найти соответствующее значение функции. Получены эти таблицы путем разложения функции $\varphi(x)$ в ряд.

Геометрически этот результат означает, что для больших n многоугольник распределения хорошо вписывается в график функции (*) и вместо истинного значения вероятности $P_n(k)$ можно для каждого k брать значение функции в точке k .





Вернемся теперь к задаче:

$$P_{100}(60) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \varphi \left(\frac{60 - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \right) = \frac{1}{5} \cdot \varphi(2) = \frac{1}{5} \cdot 0,054 = 0,0108$$

где значение $\varphi(2)$ найдено по таблице.

Теорема 2 Лапласа (интегральная).

Вероятность того, что в схеме n независимых испытаний событие наступит от k_1

до k_2 раз приблизительно равна $P^*(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$, где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

- интегральная функция Лапласа, для которой составлены таблицы. Функция нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ и $\Phi(x \geq 4) = 0,5$.

Рассмотрим пока без доказательства еще одно утверждение.

Отклонение относительной частоты $\frac{k}{n}$ от вероятности p в n независимых

испытаниях равно $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2 \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right)$.

Пример. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0.5. 1) Найти вероятность того, что событие произойдет от 400 до 500 раз:

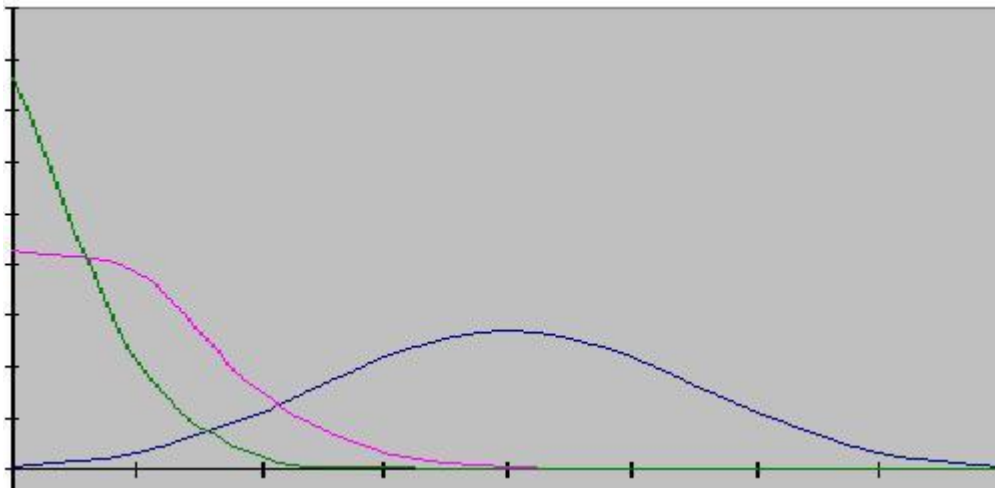
$$P_{900}(400 < k < 500) = \Phi\left(\frac{500 - 900 \cdot 0,5}{\sqrt{900 \cdot 0,5 \cdot 0,5}}\right) - \Phi\left(\frac{400 - 900 \cdot 0,5}{\sqrt{225}}\right) = \Phi\left(\frac{50}{15}\right) - \Phi\left(\frac{-50}{15}\right) = 2\Phi\left(\frac{10}{3}\right) = 2\Phi(3,33) = 2 \cdot 0,49953 \approx 0,999$$

2) Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0,02:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - 0,5\right| \leq 0,02\right) = 2 \cdot \frac{\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right)}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = 2\Phi\left(\frac{0,02}{\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{900}}}\right) = 2\Phi\left(\frac{6}{5}\right) = 2\Phi(1,2) = 2 \cdot 0,3849 = 0,7698.$$

Формула Пуассона

Если зафиксировать число опытов n , а вероятность появления события в одном опыте P изменять, то многоугольник распределения будет иметь различный вид в зависимости от величины P (см. рис.). При значениях P , близких к $1/2$, многоугольник почти симметричен и хорошо вписывается в симметричный график функции Лапласа. Поэтому приближенная формула Лапласа дает хорошую точность.



Для малых P (на практике меньших $1/10$) приближение плохое из-за несимметричности многоугольника распределения. Поэтому возникает задача найти приближенную формулу для вычисления вероятностей $P_n(k)$ в случае больших n и малых P . Ответ на этот вопрос дает формула Пуассона.

Итак, рассмотрим схему независимых испытаний, в которой n велико (чем больше, тем лучше), а P мало (чем меньше, тем лучше). Обозначим $nP = \lambda$. Тогда по формуле Бернулли имеем

$$P_n(0) = C_n^0 p^0 q^n = (1-p)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}$$

Последнее равенство верно в силу того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$ (второй замечательный

предел). При получении формулы наивероятнейшего числа появления события k^0 было рассмотрено отношение вероятностей. Из него следует, что

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} = \frac{np + p(1-k)}{kq} \approx \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ велико} \\ \frac{\lambda}{k}, & \text{если } k \text{ мало} \end{cases} \quad (\text{т.к. } q \approx 1, p \approx 0, n-k \text{ мало})$$

Т.о., при k много меньших n имеем рекуррентное соотношение

$$P_n(k) = \frac{\lambda}{k} P_n(k-1)$$

Для $k=0$ учтем полученный ранее результат: $P_n(0) \approx e^{-\lambda}$, тогда

$$P_n(1) \approx \frac{\lambda}{1} P_n(0) = \frac{\lambda}{1} e^{-\lambda}$$

$$P_n(2) \approx \frac{\lambda}{2} P_n(1) = \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} e^{-\lambda}$$

$$P_n(3) \approx \frac{\lambda}{3} P_n(2) = \frac{\lambda^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^{-\lambda}$$

.....

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Итак, если в схеме независимых испытаний p велико, а r мало, то имеет место

формула Пуассона $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$.

Закон Пуассона еще называют законом редких явлений.

Пример. Вероятность выпуска бракованной детали равна 0,02. Детали упаковываются в коробки по 100 штук. 1) Какова вероятность того, что в коробке нет бракованных деталей? 2) Какова вероятность, что в коробке больше двух бракованных деталей?

1) Так как p велико, а r мало, имеем $\lambda = np = 100 \cdot 0,02 = 2$. $P_{100}(0) \approx \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0,14$

2) $P_{100}(k > 2) = 1 - P_{100}(0) - P_{100}(1) - P_{100}(2) \approx 1 - \frac{1}{e^2} - \frac{2}{1!} e^{-2} - \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 1 - \frac{5}{e^2} \approx 0,39$.

Таким образом, в схеме независимых испытаний для вычисления вероятности $P_n(k)$ следует пользоваться формулой Бернулли, если p невелико, если p велико, то в зависимости от величины r используется одна из приближенных формул Лапласа или формула Пуассона.

Дополнение о значении закона Пуассона. Мы рассмотрели формулу Пуассона как приближение для формулы Бернулли. Однако, значение её гораздо шире. Пусть события происходят во времени и фиксируются случайные моменты их появления. (Например, моменты распада атомов в кусочке радия, моменты прихода посетителей в систему

массового обслуживания, моменты прохождения автомашин через пункт ДПС на шоссе, моменты выхода из строя некоторого устройства и т. д.). Для наглядности можно моменты наступления событий отмечать на числовой оси точками. Во всех подобных ситуациях мы имеем дело с простейшим потоком событий.

Поток является простейшим, если выполняются условия:

1. Появление или неоявление события в момент t не зависит от событий, предшествующих моменту t .

2. Вероятность появления события за малый промежуток времени Δt пропорциональна длине этого промежутка, т.е. равна $\mu \cdot \Delta t$, где μ - некоторая постоянная.

3. Вероятность появления двух и более событий за малый промежуток времени Δt есть величина более высокого порядка малости по сравнению с $\mu \cdot \Delta t$. Вероятность того,

что за отрезок времени длины τ произойдет k событий равна $P^*(k) = \frac{(\mu\tau)^k}{k!} e^{-\mu\tau}$

. Параметр μ в условиях 2. и 3. равен среднему числу событий за единицу времени. Среднее число событий за время τ равно $\mu\tau$. Смысл условий 1., 2., 3. состоит в том, что события, образующие поток должны быть независимы и поток ординарным, т.е. события должны происходить по одному, а не группами. Ясно, что условия эти не жестки и можно назвать много ситуаций, в которых они хотя бы приближенно выполняются. Приведенные условия можно нестрого переформулировать следующим образом. Пусть события происходят независимо друг от друга во времени (или пространстве) и поток событий ординарен. Тогда, если на интервал времени приходится в среднем λ событий, то

вероятность попадания на этот интервал k событий приблизительно равна $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Пример. В тесто положили изюм из расчета по пять изюмин на одну булку и тщательно перемешали тесто. Из выпеченных булок взяли наугад одну. Какова вероятность того, что в ней имеется по меньшей мере одна изюмина? Ясно, что условия 1-

3 выполнены и $\lambda = 5$. Поэтому $P(k \geq 1) \approx 1 - P(0) = 1 - \frac{5^0}{0!} e^{-5} = 1 - e^{-5} \approx 0,993$

Можно назвать много примеров, где используется формула Пуассона. Например, по закону Пуассона распределены автомашины на шоссе вдали от светофоров, капли дождя на асфальте (или шляпе), опечатки в книге, бактерии на питательной среде, моменты поломки сложных приборов, число посетителей в системе массового обслуживания, звезды в старых шаровых скоплениях, число радиоактивных распадов в куске радиоактивного вещества и т.д. Причина такого широкого распространения пуассоновских вероятностей состоит в том, что если взять большое число независимых потоков малой интенсивности, то суммарный поток будет приблизительно пуассоновский.

Это строго доказано во всех перечисленных примерах мы имеем дело именно с такими суммарными потоками.

Тема 4. Дискретная случайная величина

Различают два вида случайных величин: дискретные и непрерывные.

Определение: Случайной называется величина, которая в результате испытания принимает только одно значение из возможного множества своих значений, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин.

Определение: Случайная величина X называется дискретной (прерывной), если множество ее значений конечно или бесконечное, но счетное.

Другими словами, возможные значения дискретной случайной величины можно перенумеровать.

Описать случайную величину можно с помощью ее закона распределения.

Определение: Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде таблицы, в первой строке которой указаны в порядке возрастания все возможные значения случайной величины, а во второй строке соответствующие вероятности этих значений, т.е.

1	2	3	...	n
p_1	p_2	p_3	...	p_n

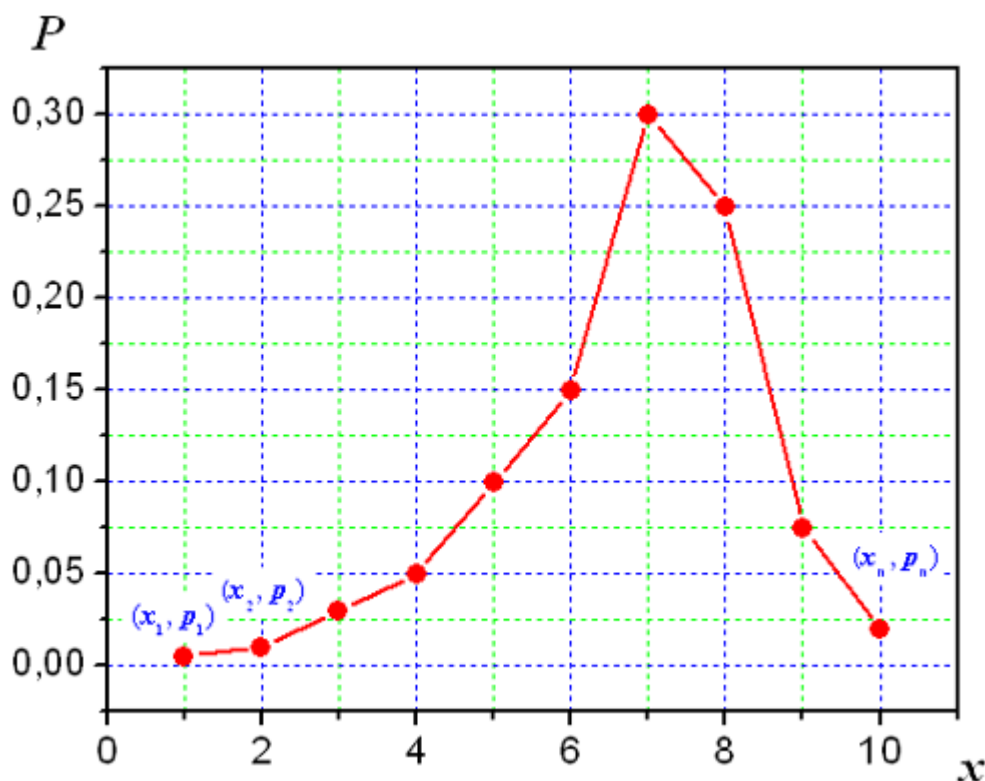
где $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

Такая таблица называется рядом распределения дискретной случайной величины.

Если множество возможных значений случайной величины бесконечно, то ряд $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$ сходится и его сумма равна 1.

Закон распределения дискретной случайной величины X можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят ломаную, соединяющую

последовательно точки с координатами $(x_i; p_i)$, $i=1,2,\dots,n$. Полученную линию называют многоугольником распределения:



Закон распределения дискретной случайной величины X может быть также задан аналитически (в виде формулы):
 $P(X=x_i)=\varphi(x_i), i=1,2,3\dots n$

Тема 5. Непрерывная случайная величина

Определение непрерывной случайной величины данное ранее не является математически строгим. Ниже мы определим непрерывную случайную величину, используя функцию, называемую плотностью распределения вероятности или просто плотностью распределения.

Случайную величину X называют непрерывной (непрерывно распределенной) величиной, если существует такая неотрицательная функция $p(t)$, определенная на всей числовой оси, что для всех x функция распределения случайной величины $F(x)$ равна:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

При этом функция $p(t)$ называется плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

Если такой функции $p(t)$ не существует, то X не является непрерывно распределенной случайной величиной.

Таким образом, зная плотность распределения, по формуле (6.7) можно легко найти функцию распределения $F(x)$. И, наоборот, по известной функции распределения можно восстановить плотность распределения:

$$p(x) = F'(x).$$

Значит, наряду с функцией распределения, плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задает ее закон распределения.

Свойства плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины:

1. Плотность распределения – неотрицательная функция:

$$p(t) \geq 0.$$

Геометрически это означает, что график плотности распределения расположен либо выше оси Ox , либо на этой оси.

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1.$$

Учитывая, что $F(+\infty)=1$, получаем: $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1$. Т.е. площадь между графиком плотности распределения вероятностей и осью абсцисс равна единице.

Эти два свойства являются характеристическими для плотности распределения вероятностей. Доказывается и обратное утверждение:

Любая неотрицательная функция $p(t)$, для которой $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1$, является плотностью распределения вероятностей некоторой непрерывно распределенной случайной величины.

Общий вид графика функции плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины приведен на рис. 6.7.

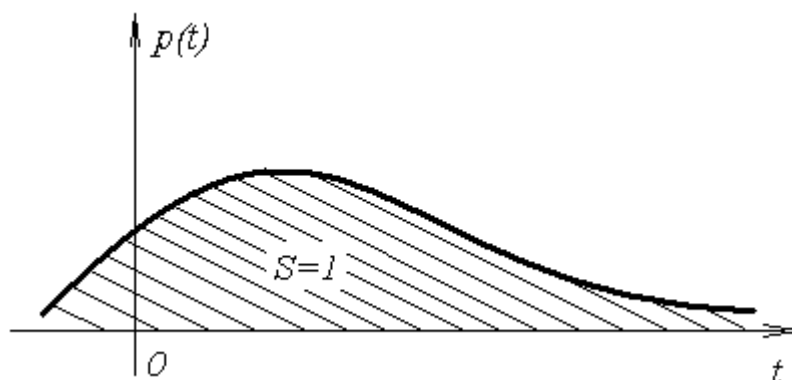


Рис. 6.7

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность попадания значений непрерывной случайной величины в заданный интервал.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значения, принадлежащие интервалу (a, b), равна определенному интервалу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b p(t) dt .$$

Действительно, $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b p(t) dt - \int_{-\infty}^a p(t) dt = \int_a^b p(t) dt$ по одному из свойств определенного интеграла.

Из вышеприведенного утверждения можно сделать вывод, что вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю. Отсюда,

$$P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Геометрически вероятность попадания значений непрерывной случайной величины в интервал (a, b) может быть рассмотрена как площадь фигуры, ограниченной осью Oх, графиком плотности распределения p(t) и прямыми x=a и x=b (рис. 6.8).

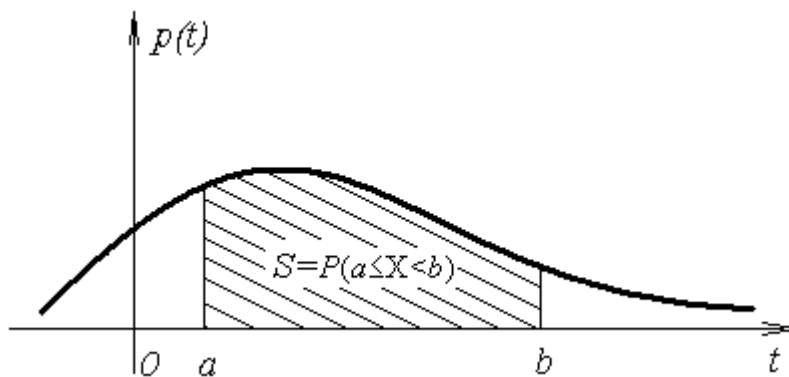


Рис. 6.8

Определения числовых характеристик случайной величины, рассмотренные в параграфе 6.2, можно распространить на случай непрерывной величины.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется несобственный интеграл

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t p(t) dt .$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат отрезку [a,b], то

$$M[X] = \int_a^b t p(t) dt .$$

Используя определение дисперсии (6.4) для случая непрерывной случайной величины, можно получить следующую формулу для вычисления дисперсии

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (t - M[X])^2 p(t) dt$$

Если возможные ненулевые значения случайной величины принадлежат отрезку [a, b], то

$$D[X] = \int_a^b (t - M[X])^2 p(t) dt$$

Более удобные формулы для вычисления дисперсии таковы:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 p(t) dt - (M[X])^2$$

если функция p(t) отлична от 0 на всей числовой оси;

$$D[X] = \int_a^b t^2 p(t) dt - (M[X])^2 \quad (6.8)$$

если возможные ненулевые значения случайной величины принадлежат отрезку [a,b].

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется также, как и для случая дискретной случайной величины:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Пример. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X равна

$$p(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 1, \\ t - \frac{1}{2}, & \text{если } 1 < t \leq 2, \\ 0, & \text{если } t > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения F(X), математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X.

Построим функцию распределения случайной величины X, используя формулу (6.7).

$$\text{При } x \leq 1, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

$$\text{Если } 1 < x \leq 2, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^x (t - \frac{1}{2}) dt = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}t \right) \Big|_1^x =$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{x^2 - x}{2}$$

При $x > 2$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^2 (t - \frac{1}{2}) dt + \int_2^x 0 dt = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}t \right) \Big|_1^2 + 0 =$$

$$\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = 2 - 1 = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ \frac{x^2 - x}{2}, & \text{если } 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Значит,

Математическое ожидание случайной величины X равно:

$$\begin{aligned} M[X] &= \int_1^2 t(t - \frac{1}{2}) dt = \int_1^2 (t^2 - \frac{1}{2}t) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{4} \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{4} \right) = \\ &= \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{3} - \frac{1}{12} = \frac{19}{12} = 1 \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Дисперсию величины X находим по формуле (6.8):

$$\begin{aligned} \int_1^2 t^2 p(t) dt &= \int_1^2 t^2 (t - \frac{1}{2}) dt = \int_1^2 (t^3 - \frac{1}{2}t^2) dt = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{6} \right) - \left(\frac{1^3}{4} - \frac{1^2}{6} \right) = \\ &= \left(4 - \frac{8}{6} \right) - \frac{1}{12} = \frac{16}{6} - \frac{1}{12} = \frac{31}{12}. \\ D[X] &= \frac{31}{12} - \frac{19^2}{12^2} = \frac{11}{144}. \end{aligned}$$

Среднее квадратическое отклонение величины X равно:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{11}{144}} = \frac{\sqrt{11}}{12}.$$

Тема 6. Системы случайных величин

Существенный интерес в математической статистике представляет рассмотрение системы двух и более случайных величин и их статистическая взаимосвязь друг с другом.

По аналогии с рядом распределения одной дискретной величины X для двух дискретных случайных величин X и Y строится матрица распределения – прямоугольная таблица, в которой записаны все вероятности $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$.

События (или опыты) называются независимыми, если вероятность появления (исхода) каждого из них не зависит от того, какие события (исходы) имели место в других случаях (опытах).

Две случайные величины X и Y называются независимыми, если независимы все связанные с ними события: например, $\{X < a\}$ и $\{Y < b\}$ или $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$ и т.д.

В терминах законов распределения справедливо также следующее определение: две случайные величины X и Y называются независимыми, если закон распределения каждой из них не зависит от принятого значения другой.

Совместной функцией распределения системы двух случайных величин (X, Y) называется вероятность совместного выполнения неравенств $X < x$ и $Y < y$:

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}. \quad (34)$$

Событие $\{X < x, Y < y\}$ означает произведение (совместное выполнение) событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$. Геометрической интерпретацией совместной функции распределения $F(x, y)$ является вероятность попадания случайной точки (X, Y) на плоскости внутрь бесконечного квадранта с вершиной в точке (x, y) (заштрихованная область на рис. 8).

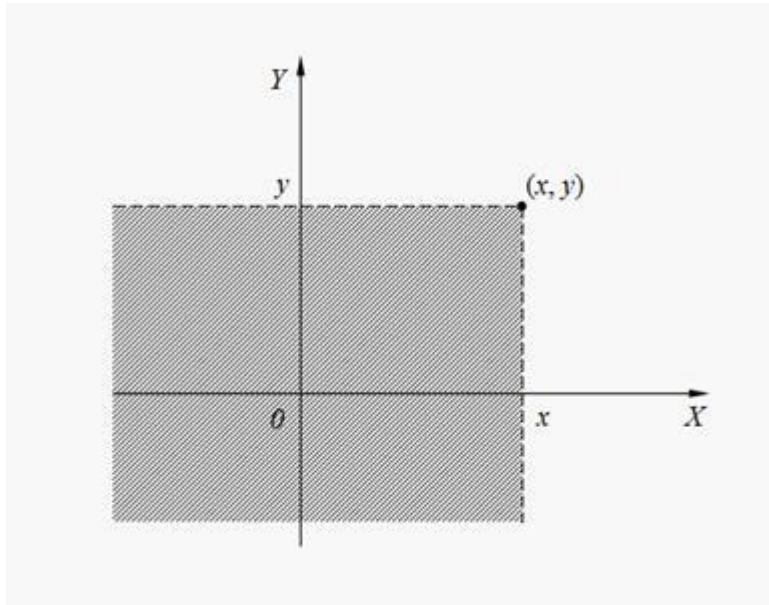


Рис. 8. Геометрическая интерпретация совместной функции распределения $F(x, y)$

Основные свойства совместной функции распределения:

- 1) $F(x, y)$ – неубывающая функция, т.е. при $x_2 > x_1$ $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$,
при $y_2 > y_1$ $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$,
 - 2) $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$,
 - 3) $F(+\infty, +\infty) = 1$,
 - 4) $F(x, +\infty) = F_1(x)$, $F(+\infty, y) = F_2(y)$,
 - 5) $F(x, y)$ – непрерывная слева функция.
- (35)

Здесь $F_1(x) = P\{X < x\}$, $F_2(y) = P\{Y < y\}$.

Система двух случайных величин (X, Y) называется непрерывной, если ее совместная функция распределения $F(x, y)$ – непрерывная функция, дифференцируемая по каждому

аргументу, у которой существует вторая смешанная частная производная $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \cdot \partial y}$. Обе случайные величины X и Y – непрерывны. Тогда функция

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} \quad (36)$$

называется совместной плотностью распределения системы двух случайных величин (X, Y) .

Основные свойства совместной плотности распределения:

$$\begin{aligned} 1) & f(x, y) \geq 0, \\ 2) & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1. \end{aligned} \quad (37)$$

В качестве числовых характеристик системы двух случайных величин X и Y обычно рассматриваются начальные и центральные моменты различных порядков. Порядком момента называется сумма его индексов $k + s$.

Начальным моментом порядка $k + s$ системы двух случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения X^k на Y^s :

$$\alpha_{k,s} = M(X^k Y^s). \quad (38)$$

Центральным моментом порядка $k + s$ системы двух случайных величин (X, Y) называется математическое ожидание произведения $(X - m_x)^k$ на $(Y - m_y)^s$:

$$\mu_{k,s} = M[(X - m_x)^k (Y - m_y)^s], \quad (39)$$

где $m_x = M(X)$, $m_y = M(Y)$.

Для системы дискретных случайных величин X и Y :

$$\alpha_{k,s} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^k y_j^s p_{ij}, \quad (40)$$

$$\mu_{k,s} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{ij}, \quad (41)$$

где $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$.

Для системы непрерывных случайных величин X и Y :

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy, \quad (42)$$

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x, y) dx dy, \quad (43)$$

где $f(x, y)$ – совместная плотность распределения случайных величин X и Y .

В инженерных приложениях математической статистики чаще всего используются моменты первого и второго порядков.

Начальные моменты первого порядка

$$\alpha_{1,0} = M(X^1 Y^0) = M(X) = m_x; \quad \alpha_{0,1} = M(X^0 Y^1) = M(Y) = m_y \quad (44)$$

являются математическими ожиданиями случайных величин X и Y .

Центральные моменты первого порядка всегда равны нулю:

$$\begin{aligned}\mu_{1,0} &= M[(X - m_x)^1(Y - m_y)^0] = M(X - m_x) = M(X) - M(m_x) = m_x - m_x = 0, \\ \mu_{0,1} &= M[(X - m_x)^0(Y - m_y)^1] = M(Y - m_y) = M(Y) - M(m_y) = m_y - m_y = 0.\end{aligned}\quad (45)$$

Начальные моменты второго порядка:

$$\begin{aligned}\alpha_{2,0} &= M(X^2 Y^0) = M(X^2) = \alpha_2(X), \\ \alpha_{0,2} &= M(X^0 Y^2) = M(Y^2) = \alpha_2(Y), \\ \alpha_{1,1} &= M(X^1 Y^1) = M(XY).\end{aligned}\quad (46)$$

Центральные моменты второго порядка:

$$\begin{aligned}\mu_{2,0} &= M[(X - m_x)^2(Y - m_y)^0] = M[(X - m_x)^2] = D_x, \\ \mu_{0,2} &= M[(X - m_x)^0(Y - m_y)^2] = M[(Y - m_y)^2] = D_y, \\ \mu_{1,1} &= M[(X - m_x)^1(Y - m_y)^1] = M[(X - m_x)(Y - m_y)].\end{aligned}\quad (47)$$

Здесь D_x , D_y – дисперсии случайных величин X и Y .

Центральный момент второго порядка $\mu_{1,1} = M[(X - m_x)(Y - m_y)]$

называется ковариацией случайных величин X и Y . Обозначим его K_{xy} :

$$K_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)]. \quad (48)$$

Из определения ковариации (48) следует:

$$K_{xy} = K_{yx}. \quad (49)$$

Дисперсия случайной величины является по существу частным случаем ковариации:

$$D_x = M[(X - m_x)(X - m_x)] = K_{xx}, \quad D_y = M[(Y - m_y)(Y - m_y)] = K_{yy}. \quad (50)$$

По определению ковариации (48) получим:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy. \quad (51)$$

Ковариация двух случайных величин X и Y характеризует степень их зависимости и меру рассеивания вокруг точки (m_x, m_y) . Часто бывает удобно выразить ковариацию K_{xy} в виде:

$$K_{xy} = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y). \quad (52)$$

Выражение (52) вытекает из определения ковариации (48).

Размерность ковариации K_{xy} равна произведению размерностей случайных величин X и Y.

Безразмерная величина, характеризующая только зависимость случайных величин X и Y, а не разброс:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (53)$$

называется коэффициентом корреляции случайных величин X и Y. Этот параметр характеризует степень линейной зависимости случайных

величин X и Y. Для любых двух случайных величин X и Y коэффициент корреляции $-1 \leq r_{xy} \leq 1$. Если $r_{xy} > 0$, то линейная зависимость между X и Y возрастающая, если $r_{xy} < 0$, то линейная зависимость между X и Y убывающая, при $r_{xy} = 0$ линейной зависимости между X и Y нет.

При $r_{xy} \neq 0$ случайные величины X и Y называются коррелированными, при $r_{xy} = 0$ – некоррелированными. Отсутствие линейной корреляции не означает отсутствие любой другой зависимости между X и Y. Если имеет место жесткая линейная зависимость $Y = aX + b$, то $r_{xy} = +1$ при $a > 0$ и $r_{xy} = -1$ при $a < 0$.

Тема 7. Основные законы распределения случайной величины

Величины, которые могут принять в результате опыта любое из возможных значений, являются предметом дальнейшего изучения. Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно.

Дискретной случайной величиной называют такую случайную величину, множество возможных значений которой либо конечное, либо бесконечное, но счетное. Непрерывной случайной величиной называют такую случайную величину, которая может принять любое значение из некоторого конечного или бесконечного интервала.

Пример 1. Примерами дискретной случайной величины являются: число бракованных изделий в случайно отобранной партии из n-изделий; число солнечных дней в году; число учеников, опрошенных на уроке в школе.

Примерами непрерывной случайной величины служат: время безаварийной работы станка; расход горючего на единицу расстояния; количество осадков, выпавших за сутки.

Однако простое перечисление всех возможных значений случайной величины не дает достаточно полного представления о ней. Кроме того, необходимо знать, как часто могут появляться те или иные значения в результате испытаний или наблюдений, т.е. следует знать вероятности их появления. Полное представление о случайной величине может дать закон ее распределения.

Законы распределения дискретных случайных величин

Законом распределения дискретной случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями. Про случайную величину говорят, что она подчиняется данному закону распределения.

При табличном способе задания закона распределения первая строка таблицы содержит возможные значения случайной величины (обычно в порядке возрастания), а вторая – соответствующие вероятности ($\sum p_i = 1$):

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Дискретная случайная величина имеет биномиальный закон распределения (закон распределения Бернулли), если она принимает целочисленные неотрицательные значения $0, 1, 2, 3, \dots, m, \dots, n$ с вероятностями, вычисляемыми по формуле Бернулли:

x_i	0	1	...	m	...	n
p_i	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$...	$C_n^m p^m q^{n-m}$...	p^n

где $q = 1 - p$; $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ - число сочетаний из n элементов по m .

Пример 2. На некотором участке дороги 60% водителей соблюдают предусмотренный правилами скоростной режим. Составить закон распределения числа водителей, соблюдающих установленные ограничения по скорости, из пяти проехавших.

Случайная величина X – число водителей, соблюдающих установленные ограничения по скорости из пяти проехавших. В $n = 5$ независимых испытаниях вероятность того, что скоростной режим не нарушен, по условию постоянна и равна: $p = 0,6$. Следовательно, вероятность нарушения: $q = 1 - 0,6 = 0,4$. Тогда биномиальный закон распределения числа водителей имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,0	0,0	0,2	0,3	0,2	0,0
	1024	768	304	456	592	7776

Дискретная случайная величина имеет закон распределения Пуассона с параметром $\lambda = np$, если она принимает целочисленные неотрицательные значения $0, 1, 2, 3, \dots, m$,

... с вероятностями, вычисляемыми по формуле Пуассона. Т. к. вероятность наступления события в каждом испытании мала (при $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$), закон распределения Пуассона еще называют законом редких событий.

x_i	0	1	...	m	...
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$...	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$...

Пример 3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,015. Сделано 600 выстрелов. Какова вероятность того, что число попаданий в цель не меньше 7 и не больше 10?

В данном случае $\lambda = 600 \cdot 0,015 = 9$. Предполагая закон распределения Пуассона, имеем:

x_i	7	8	9	10
p_i	0,1	0,1	0,1	0,1
	171	318	318	186

Следовательно, $P(7 \leq X \leq 10) = 0,4993$.

Законы распределения непрерывных случайных величин

Закон распределения непрерывной случайной величины нельзя задать также, как для дискретной. Он неприменим в силу того, что нельзя перечислить все бесконечное несчетное множество значений, а вероятности каждого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равны нулю.

Для описания закона распределения непрерывной случайной величины X предлагается другой подход: рассматривать не вероятности событий $X=x$ для разных x , а вероятности события $X < x$. При этом вероятность $P(X < x)$ зависит от текущей переменной, т. е. является некоторой функцией от x .

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Функцию $F(x)$ называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.

Способ задания непрерывной случайной величины с помощью функции распределения не является единственным. Необходимо определить некоторую функцию, отражающую вероятности попадания случайной точки в различные участки области возможных значений непрерывной случайной величины. Т. е. представить некоторую замену вероятностям p_i для дискретной случайной величины в непрерывном случае.

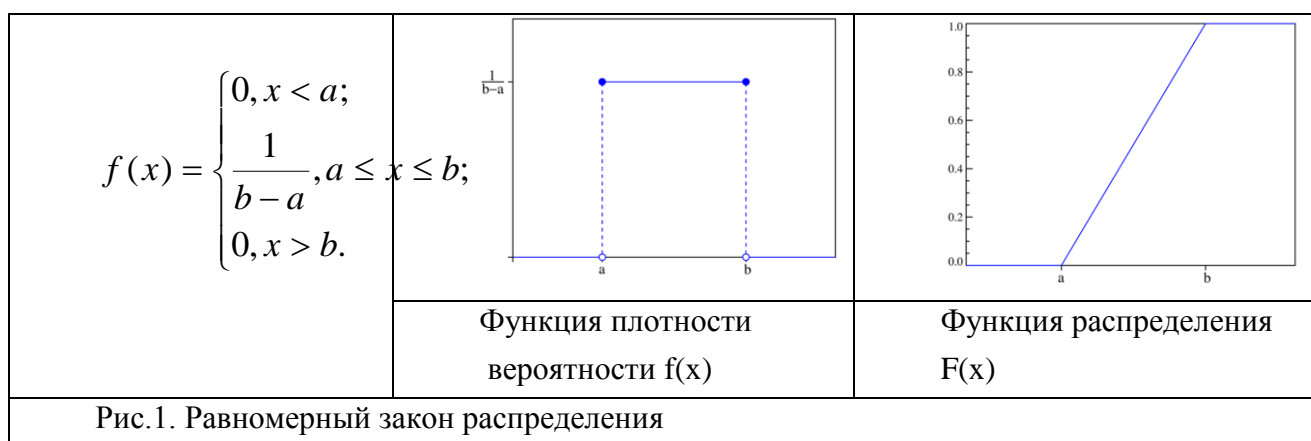
Такой функцией является плотность распределения вероятностей. Плотностью вероятности (плотностью распределения, дифференциальной функцией) случайной

величины X называется функция $f(x)$, являющаяся первой производной интегральной функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

Про случайную величину X говорят, что она имеет распределение (распределена) с плотностью $f(x)$ на определенном участке оси абсцисс.

Равномерный закон распределения. Непрерывная случайная величину X имеет равномерный закон распределения (закон постоянной плотности) на отрезке $[a; b]$, если на этом отрезке функция плотности вероятности случайной величины постоянна, т.е. $f(x)$ имеет вид:



Пример 4. Время ожидания ответа на телефонный звонок – случайная величина, подчиняющаяся равномерному закону распределения в интервале от 0 до 2 минут. Найти интегральную и дифференциальную функции распределения этой случайной величины.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x-0}{2-0} = \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Нормальный закон распределения (закон Гаусса). Непрерывная случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами μ и σ^2 (обозначают $X \subset N(\mu; \sigma^2)$), если ее плотность вероятности имеет вид:

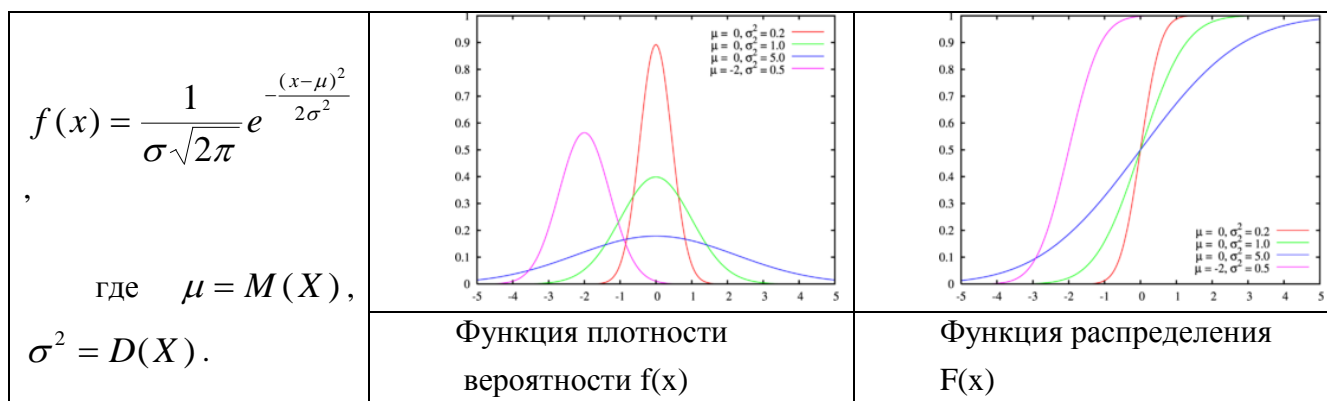


Рис.2. Нормальный закон распределения

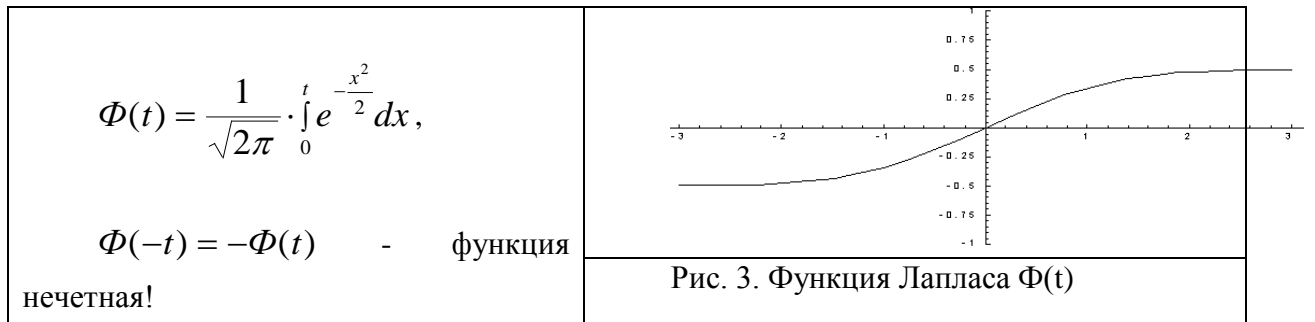
Математическое ожидание характеризует центр рассеивания значений случайной величины и при изменении μ кривая будет смещаться вдоль оси абсцисс (см. рис. 2 при $\mu = 0$ и при $\mu = -2$). Если же при неизменном математическом ожидании у случайной величины изменяется дисперсия, то кривая будет изменять свою форму, сжимаясь или растягиваясь (см. рис. 2 при $\mu = 0$: $\sigma^2 = 0,2$; $\sigma^2 = 1,0$; $\sigma^2 = 5,0$). Таким образом, параметр μ характеризует положение, а параметр σ^2 - форму кривой плотности вероятности.

Нормальный закон распределения случайной величины X с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ (обозначается $N(0;1)$) называется стандартным или нормированным, а соответствующая нормальная кривая – стандартной или нормированной.

Согласно определению функция плотности вероятности и функция распределения связаны между собой:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ где } t = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

Интеграл такого рода является "неберущимся", поэтому для его нахождения используют особую функцию, так называемый интеграл вероятностей или функцию Лапласа, для которой составлены таблицы (см. Приложение 2).



Используя функцию Лапласа можно выразить функцию распределения нормального закона по формуле:

$$F(x) = 0,5 + \Phi(t), \text{ где } t = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

Для практических целей очень важны свойства случайной величины, имеющей нормальный закон распределения.

1. Если $X \subset N(\mu; \sigma^2)$, то для нахождения вероятности попадания этой величины в заданный интервал $(x_1; x_2)$ используется формула:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right).$$

2. Вероятность того, что отклонение случайной величины $X \subset N(\mu; \sigma^2)$ от ее математического ожидания μ не превысит величину $\delta > 0$ (по абсолютной величине), равна:

$$P(|X - \mu| \leq \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

3. "Правило трех сигм". Если случайная величина $X \subset N(\mu; \sigma^2)$, то практически достоверно, что ее значения заключены в интервале $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$. (Вероятность выхода за эти границы составляет 0,0027.) Правило позволяет, зная параметры (σ и μ), ориентировочно определить интервал практических значений случайной величины.

Пример 5. Случайная величина распределена нормально с параметрами $\mu = 8$, $\sigma = 3$. Найти вероятность того, что случайная величина в результате опыта примет значение, заключенное в интервале (12,5; 14).

$$P(12,5 \leq X < 14) = \Phi\left(\frac{14-8}{3}\right) - \Phi\left(\frac{12,5-8}{3}\right) = \Phi(2) - \Phi(1,5) = 0,4772 - 0,4332 = 0,044.$$

Пример 6. Случайная погрешность измерения подчинена нормальному закону распределения с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 9$. Проводятся три независимых измерения. Найти вероятность того, что погрешность хотя бы одного измерения не превосходит по абсолютной величине 3 мм.

Вероятность того, что погрешность измерения в одном испытании не превышает 3 мм:

$$P(|X - 0| \leq 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{9}\right) = 2\Phi(0,33) = 2 \cdot 0,1293 = 0,2586.$$

Вероятность того, что эта погрешность измерения в одном испытании превышает 3 мм, равна:

$$P(|X| > 3) = 1 - P(|X| < 3) = 1 - 0,2586 = 0,7414.$$

Вероятность того, что во всех трех испытаниях погрешность измерения превышает 3 мм:

$$P(\bar{A}) = P(|X| > 3)^3 = 0,4075.$$

Искомая вероятность: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,4075 = 0,5925$.

Тема 8. Закон больших чисел

Неравенство Чебышёва позволяет доказать замечательный результат, лежащий в основе математической статистики – закон больших чисел. Из него вытекает, что выборочные характеристики при возрастании числа опытов приближаются к

теоретическим, а это дает возможность оценивать параметры вероятностных моделей по опытным данным. Без закона больших чисел не было бы *большой* части прикладной математической статистики.

Теорема Чебышёва. Пусть случайные величины X_1, X_2, \dots, X_k попарно независимы и существует число C такое, что $D(X_i) < C$ при всех $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда для любого положительного ε выполнено неравенство

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k}{k} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_k)}{k}\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{C}{k\varepsilon^2}. \quad (11)$$

Доказательство. Рассмотрим случайные величины $Y_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ и $Z_k = Y_k/k$. Тогда согласно утверждению 10

$$M(Y_k) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_k), \quad D(Y_k) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_k).$$

Из свойств математического ожидания следует, что $M(Z_k) = M(Y_k)/k$, а из свойств дисперсии - что $D(Z_k) = D(Y_k)/k^2$. Таким образом,

$$M(Z_k) = \{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_k)\}/k,$$

$$D(Z_k) = \{D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_k)\}/k^2.$$

Из условия теоремы Чебышёва, что

$$D(Z_k) \leq \frac{Ck}{k^2} = \frac{C}{k}.$$

Применим к Z_k второе неравенство Чебышёва. Получим для стоящей в левой части неравенства (11) вероятности оценку

$$P\{|Z_k - M(Z_k)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(Z_k)}{\varepsilon^2} \leq \frac{C}{k\varepsilon^2},$$

что и требовалось доказать.

Эта теорема была получена П.Л.Чебышёвым в той же работе 1867 г. «О средних величинах», что и неравенства Чебышёва.

Пример 13. Пусть $C = 1$, $\varepsilon = 0,1$. При каких k правая часть неравенства (11) не превосходит 0,1? 0,05? 0,00001?

В рассматриваемом случае правая часть неравенства (11) равно $100/k$. Она не превосходит 0,1, если k не меньше 1000, не превосходит 0,05, если k не меньше 2000, не превосходит 0,00001, если k не меньше 10 000 000.

Правая часть неравенства (11), а вместе с ней и левая, при возрастании k и фиксированных C и ε убывает, приближаясь к 0. Следовательно, вероятность того, что среднее арифметическое независимых случайных величин отличается от своего математического ожидания менее чем на ε , приближается к 1 при возрастании числа случайных величин, причем при любом ε . Это утверждение называют ЗАКОНОМ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ.

Наиболее важен для вероятностно-статистических методов принятия решений (и для математической статистики в целом) случай, когда все X_i , $i = 1, 2, \dots$, имеют одно и то же математическое ожидание $M(X_1)$ и одну и ту же дисперсию $\sigma^2 = D(X_1)$. В качестве

замены (оценки) неизвестного исследователю математического ожидания используют выборочное среднее арифметическое

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k}{k}.$$

Из закона больших чисел следует, что \bar{X} при увеличении числа опытов (испытаний, измерений) сколь угодно близко приближается к $M(X_1)$, что записывают так:

$$\bar{X} \xrightarrow{P} M(X_1).$$

Здесь знак \xrightarrow{P} означает «сходимость по вероятности». Обратим внимание, что понятие «сходимость по вероятности» отличается от понятия «переход к пределу» в математическом анализе. Напомним, что последовательность b_n имеет предел b при $n \rightarrow \infty$, если для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ существует число $n(\delta)$ такое, что при любом $n > n(\delta)$ справедливо утверждение: $b_n \in (b - \delta; b + \delta)$. При использовании понятия «сходимость по вероятности» элементы последовательности предполагаются случайными, вводится еще одно сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$ и утверждение $b_n \in (b - \delta; b + \delta)$ предполагается выполненным не наверняка, а с вероятностью не менее $1 - \varepsilon$.

Сходимость частот к вероятностям. Уже отмечалось, что с точки зрения ряда естествоиспытателей вероятность события A – это число, к которому приближается отношение количества осуществлений события A к количеству всех опытов при безграничном увеличении числа опытов. Известный математик Якоб Бернулли (1654-1705), живший в городе Базель в Швейцарии, в самом конце XVII века доказал это утверждение в рамках математической модели (опубликовано доказательство было лишь после его смерти, в 1713 году). Современная формулировка теоремы Бернулли такова.

Теорема Бернулли. Пусть m – число наступлений события A в k независимых (попарно) испытаниях, и p есть вероятность наступления события A в каждом из испытаний. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P\left\{\left|\frac{m}{k} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{p(1-p)}{k\varepsilon^2}. \quad (12)$$

Доказательство. Как показано в примере 10, случайная величина m имеет биномиальное распределение с вероятностью успеха p и является суммой k независимых случайных величин $X_i, i = 1, 2, \dots, k$, каждое из которых равно 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1-p$, т.е. $m = X_1 + X_2 + \dots + X_k$. Применим к X_1, X_2, \dots, X_k теорему Чебышёва с $C = p(1-p)$ и получим требуемое неравенство (12).

Теорема Бернулли дает возможность связать математическое определение вероятности (по А.Н.Колмогорову) с определением ряда естествоиспытателей (по Р. Мизесу (1883-1953)), согласно которому вероятность есть предел частоты в бесконечной последовательности испытаний. Продемонстрируем эту связь. Для этого сначала отметим, что

$$p(1-p) \leq \frac{1}{4}$$

при всех p . Действительно,

$$\frac{1}{4} - p(1-p) = (p - \frac{1}{2})^2 \geq 0.$$

Следовательно, в теореме Чебышёва можно использовать $C = \frac{1}{4}$. Тогда при любом p и фиксированном ε правая часть неравенства (12) при возрастании k приближается к 0, что и доказывает согласие математического определения в рамках вероятностной модели с мнением естествоиспытателей.

Есть и прямые экспериментальные подтверждения того, что частота осуществления определенных событий близка к вероятности, определенной из теоретических соображений. Рассмотрим бросания монеты. Поскольку и герб, и решетка имеют одинаковые шансы оказаться сверху, то вероятность выпадения герба равна $\frac{1}{2}$ из соображений равновозможности. Французский естествоиспытатель XVIII века Бюффон бросил монету 4040 раз, герб выпал при этом 2048 раз. Частота появления герба в опыте Бюффона равна 0,507. Английский статистик К.Пирсон бросил монету 12000 раз и при этом наблюдал 6019 выпадений герба – частота 0,5016. В другой раз он бросил монету 24000 раз, герб выпал 12012 раз – частота 0,5005. Как видим, во всех этих случаях частоты лишь незначительно отличаются от теоретической вероятности 0,5

Тема 9. Случайные процессы. Цепи Маркова

Понятие случайного процесса является одним из важнейших не только в современной теории вероятностей, но и в естествознании, инженерном деле, экономике, теории связи и других областях. Оно позволяет описывать динамику развития изучаемого случайного явления во времени. Создание и развитие математической теории случайных процессов началось в XX веке и было связано с трудами А.Н.Колмогорова (1903-1987), А.Я.Хинчина (1894-1959), Е.Е.Слуцкого (1880-1948), Н.Винера (1894-1965), Дж.Дуба (1910-2004), П.Леви (1886-1971), В.Феллера (1906-1970) и многих других ученых.

Имелся ряд импульсов к возникновению нового раздела теории вероятностей. Считается, что основной из них дала физика. Напомним, что в 1827 году шотландский ботаник Р.Броун (1773-1858) обнаружил под микроскопом хаотическое движение частиц цветочной пыльцы в воде.

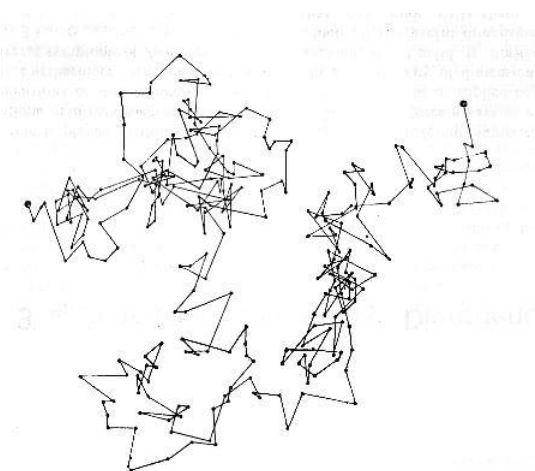


Рис. 1. Броуновское движение.

Однако природа этого движения, получившего название броуновского, долго оставалась невыясненной. Только в конце XIX — начале XX века было осознано, что оно представляет собой одно из проявлений теплового движения атомов и молекул вещества. Оказалось, что для описания процессов такого рода требуются вероятностно-статистические подходы. Математические и физические модели броуновского движения и более общих процессов диффузии были построены А.Эйнштейном (1879-1955), М.Смолуховским (1872-1917), М.Планком (1858-1847), А.Фоккером (1887-1972), П.Ланжевеном (1872-1946), Н.Винером (1894-1964) и другими учеными. Интересно отметить, что в диссертации Л.Башелье (1870-1946), написанной в 1900 году под руководством А.Пуанкаре (1854-1912), впервые, на 5 лет раньше физиков, предложена модель для описания флуктуаций на бирже курсов ценных бумаг, которая содержала математическую теорию броуновского движения. Эта работа долго оставалась без должного внимания.

Среди важных предпосылок создания теории случайных процессов следует назвать "цепную зависимость", введенную А.А.Марковым (1856-1922) в 1906 году. Удивительно, что построенная модель случайных величин, получившая название цепи Маркова, возникла при изучении им расположения комбинаций гласных и согласных букв в тексте романа "Евгений Онегин" и лишь позднее была использована и обобщена в ряде физических исследований. На сегодняшний день создана мощная теория марковских процессов, имеющая разнообразные применения, в частности, в биологии. Интерес представляет и теория марковских случайных полей, возникшая на основе теории марковских процессов. Марковские цепи и поля находят приложения и при распознавании образов. Упомянем также широко известный метод Монте-Карло марковских цепей (английская аббревиатура МСМС). Укажем на книги Е.Б.Дынкина, Ю.А.Розанова, Р.Киндермана, Н.Бремо, Г.Винклера.

Кроме того, Ф.Лундбергом (1876-1965) в его диссертации (1903) была введена модель, описывающая деятельность страховой компании. В этой работе впервые возник так называемый пуассоновский процесс, который позднее стал использоваться при

изучении радиоактивного распада. В теории страхования ныне широко известны модели Крамера – Лундберга и Спарре Андерсена. Процессы с "дискретным вмешательством случая" и идеи, восходящие к классическим задачам "геометрических вероятностей" (например, о "случайном бросании" на плоскость точки или иглы) привели позднее к созданию теории точечных случайных процессов (см., например, монографию Д.Штояна и Г.Штояна). Отметим также модель Гальтона – Ватсона, относящуюся к анализу вымирания аристократических фамилий в Великобритании. Эта модель сформировалась в 1873 году в ходе переписки Ф.Гальтона (1822-1911) и Г.Ватсона (1827-1903), приведшей к "теореме вырождения". Она послужила основой для развития во второй половине XX века теории ветвящихся процессов, изучающей эволюцию семейств рождающихся и гибнущих частиц, а также взаимодействия частиц различных типов. Укажем на труды А.Н.Колмогорова, Н.А.Дмитриева (1924-2000), Б.А.Севастьянова, Р.Беллмана (1920-1984), Т.Харриса (1919-2005), П.Ягерса и их последователей.

Выдающуюся роль в создании общей теории случайных процессов сыграли статьи А.Н.Колмогорова "Об аналитических методах в теории вероятностей" (1931) и А.Я.Хинчина "Теория корреляции стационарных стохастических процессов" (1934). Однако прочный фундамент для теории случайных процессов (и всей теории вероятностей) был заложен лишь в 1933 году благодаря аксиоматике Колмогорова.

Случайный процесс – это семейство случайных величин $\{X(t), t \in T\}$, заданных на некотором вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) и некотором промежутке $T \subset \mathbb{R}$. Параметр t интерпретируется как время. Таким образом, $X(t)$ представляет собой состояние (исследуемой) "системы" в момент t . Точнее говоря, случайный процесс – это функция $X=X(\omega, t)$ переменных $\omega \in \Omega$ и $t \in T$ такая, что $X(\cdot, t)$ является случайной величиной при каждом $t \in T$. При фиксированном ω функция $X(\omega, \cdot)$ называется траекторией (или реализацией) процесса. Обычно аргумент ω опускают и пишут $X(t)$.

Разумеется, можно рассматривать случайный процесс, заданный на каком-либо вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) и произвольном параметрическом множестве T . Если $T \subset \mathbb{R}^d$ и $d > 1$, то говорят о случайном поле. Возможны и дальнейшие обобщения, например, исследуются процессы, у которых величины $X(t)$ принимают значения в абстрактном пространстве S , снабженном σ -алгеброй \mathcal{S} (при каждом $t \in T$ величина $X(t)$ является $\mathcal{F} | \mathcal{S}$ -измеримой). Наряду с термином случайный процесс (определенный на некотором множестве T) как синоним используется термин случайная функция.

Классическая теорема Колмогорова дает условия, при которых на некотором пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) существует случайный процесс $\{X(t), t \in T\}$ с заданными конечномерными распределениями, т.е. мерами, представляющими собой законы распределения векторов $(X(t_1), \dots, X(t_n))$, где $t_1, \dots, t_n \in T$ и $n \in \mathbb{N}$.

Случайный процесс $\{X(t), t \in T\}$, где $T \subset \mathbb{R}_+$ называется цепью Маркова, если величины $X(t)$ при всех $t \in T$ принимают значения в конечном или счетном множестве S

(точки которого удобно отождествить с их номерами) и выполнено следующее соотношение. Для всех $i_1, \dots, i_n, i, j \in S$, $s_1 < \dots < s_n < s < t$, $s_1, \dots, s_n, s, t \in T$ и $n \in \mathbb{N}$

$$P(X(t) = j \mid X(s_1) = i_1, \dots, X(s_n) = i_n, X(s) = i) = P(X(t) = j \mid X(s) = i),$$

когда $P(X(s_1) = i_1, \dots, X(s_n) = i_n, X(s) = i) \neq 0$.

Смысл данного определения состоит в том, что поведение «системы» в момент времени $t \in T$ при заданных состояниях в предшествующие моменты времени $s_1, \dots, s_n, s \in T$ зависит только от ее состояния в последний момент s , предшествующий t . Обычно рассматриваются цепи Маркова с дискретным или непрерывным временем, т.е. когда соответственно $T = \mathbb{C}_{\mathbb{Z}}$ или $T = [0, \infty)$. Конечномерные распределения марковской цепи задаются двумя объектами – переходными вероятностями

$$p_{i,j}(s,t) = P(X(t) = j \mid X(s) = i),$$

где $s \leq t$ ($s, t \in T$), и начальным распределением $P(X(0) = i)$, $i, j \in S$.

Заметим, что динамика случайных явлений фактически присутствовала и в ряде классических задач, вовлекавших рассмотрение последовательности случайных величин X_1, X_2, \dots . Достаточно упомянуть первую предельную теорему теории вероятностей – закон больших чисел, установленный Бернулли в 1713 году. Эта теорема в современном

изложении утверждает, что $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow p$ по вероятности при $n \rightarrow \infty$ для последовательности независимых случайных величин, принимающих значения 1 и 0 соответственно с вероятностями p и $1-p$ ($0 < p < 1$). Другими словами, при каждом $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - p\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Тем самым "частота" появления "успехов" (т.е. единиц) сходится в указанном смысле с ростом n к вероятности "успеха" в отдельном испытании.

Развитие этого направления привело в теории случайных процессов к рождению эргодической теории. В этой связи достаточно упомянуть эргодическую теорему Биркгофа – Хинчина и субэргодическую теорему Кингмана – Лиггетта. Например, с помощью последней теоремы устанавливается теорема Фюрстенберга – Кестена, утверждающая следующее. Пусть X^1, X^2, \dots – стационарная последовательность $d \times d$ -матриц с положительными элементами, логарифм которых интегрируем по мере P . Тогда найдется случайная величина Y такая, что для матричных элементов $X^1 \dots X^n$ при всех $k, r \in \{1, \dots, d\}$ имеем

$$\frac{1}{n} \log(X^1 \dots X^n)_{k,r} \rightarrow Y \text{ п.н. и в } L^1(\Omega, \mathcal{F}, P), \quad n \rightarrow \infty$$

Стационарность означает инвариантность конечномерных распределений указанной последовательности относительно сдвигов в пространстве индексов \mathbb{Z} .

Выдающийся вклад в эргодическую теорию внесен Я.Г.Синаем и его школой.

Здесь же упомянем интенсивно развивающуюся область изучения случайных операторов и их спектров. Более того, оказалось, что изучение спектров бесконечных случайных матриц имеет непосредственное отношение к знаменитой гипотезе Римана о нулях ζ -функции.

Теория случайных процессов бурно развивалась в XX-м веке. Возникли обширные новые направления этой теории. Например, исследования А.К.Эрланга (1878-1929), связанные с изучением загрузки телефонных сетей, привели к формированию теории массового обслуживания ("теории очередей"). В этой области выделяются работы Б.В.Гнеденко (1912-1995), И.Н.Коваленко, Ю.К.Беляева и А.Д.Соловьева (1927-2001). Ныне эта теория охватывает новые области исследований, например, транспортные сети.

Введение К.Ито (1915-2008) стохастического интеграла, называемого ныне интегралом Ито, привело к созданию стохастического исчисления и мощной теории стохастических дифференциальных уравнений. Например, уравнение Ланжевена для скорости $V=V(t)$ движения частицы в жидкости может быть записано в виде

$$dV(t) = a V(t)dt + b dW(t), \quad t \geq 0,$$

где a и b – числовые коэффициенты, характеризующие массу частицы и вязкость среды, а $W=W(t)$ – винеровский процесс (броуновское движение). Поразительный факт заключается в том, что почти все (по мере P) траектории винеровского процесса не дифференцируемы ни в одной точке $t \in [0, \infty)$! Поэтому приведенное уравнение следует понимать как формальную запись некоторого интегрального соотношения, вовлекающего интеграл Ито. Для привлечения внимания читателей к этой области исследований отметим, что методы стохастического анализа позволили решить сложные и важные задачи выделения сигнала на фоне шума. Более того, отметим, что ныне на передний край выходят исследования стохастических дифференциальных уравнений в частных производных.

Отдельного упоминания заслуживают разнообразные задачи оптимального управления случайными процессами. Например, задачи нахождения (в определенном смысле) оптимальных режимов функционирования сложных систем.

Теория гиббсовских случайных полей, заложенная в 60-е годы прошлого века в работах Р.Л.Добрушина (1929-1995), О.Лэнфорда и Д.Рюэля, позволила, например, интерпретировать фазовые переходы состояний вещества. Теория автомодельных процессов, инициированная А.Н.Колмогоровым в 40-е годы XX-го столетия, обеспечила прогресс в изучении турбулентности. Оказалось, что автомодельность свойственна многим физическим процессам. Дальнейшее развитие этой теории "фрактальности" связано с работами Б.Мандельброта и его последователей.

Отдельно отметим, что возникли новые разделы математической статистики, относящиеся к изучению случайных процессов (в частности, прогноз и интерполяция). В этой связи укажем на исследования У.Гренандера, И.А.Ибрагимова и Р.З.Хасьминского.

Важную роль в современных условиях играет и моделирование (на компьютере) случайных процессов и полей.

Можно сказать, что сейчас существует целый ряд самостоятельных направлений исследований в теории случайных процессов, некоторые из них были упомянуты выше. Как правило, выделяются достаточно широкие классы случайных процессов и для их изучения используется соответствующий набор методов.

По семействам независимых случайных величин (более общим образом, случайных элементов), которые существуют в силу теоремы Ломницкого - Улама, возможно строить новые случайные функции. Так, например, определяются процессы восстановления. Напомним, что если X_1, X_2, \dots – независимые одинаково распределенные положительные величины, то простейший процесс восстановления задается формулой

$$Y(t) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^n X_k \leq t\},$$

где $t \in [0, \infty)$ и сумма по пустому множеству индексов (т.е. когда $X_1 > t$) считается равной нулю. Если "поломки" некоторого устройства происходят в случайные моменты $X_1, X_1 + X_2, X_1 + X_2 + X_3, \dots$, и мгновенно производится устранение этих поломок, то $Y(t)$ дает общее число восстановлений за время от 0 до t . Заметим, что анализ траекторий сумм независимых случайных величин (иначе говоря, случайных блужданий) нашел применения в теории полимеров. Большой интерес представляют также случайные блуждания в случайной среде.

Важный класс образуют процессы с независимыми приращениями. В этот класс входят броуновское движение (называемое также винеровским процессом) и пуассоновский процесс. В связи с задачами стохастической финансовой математики большое значение приобрели также процессы Леви.

Обширный и хорошо изученный класс составляют гауссовские процессы. Действительный гауссовский процесс $\{X(t), t \in T\}$ – это процесс, имеющий гауссовскими все конечномерные распределения, т.е. при любом $n \in \mathbb{N}$ и произвольных $t_1, \dots, t_n \in T$ вектор $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ является гауссовским. Другими словами, характеристическая функция этого вектора имеет вид

$$E \exp\{i(\lambda_1 X(t_1) + \dots + \lambda_n X(t_n))\} = \exp\{i(\lambda, a) - \frac{1}{2}(C\lambda, \lambda)\},$$

где (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в \mathbb{R}^n , $i^2 = -1$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, вектор $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ и $n \times n$ -матрица $C = (c_{k,r})$ симметрична и обладает свойством неотрицательной определенности ($a_k = EX(t_k)$ и $c_{k,r} = \text{cov}(X(t_k), X(t_r))$). Заметим, что компоненты гауссовского вектора $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ независимы в том и только том случае, когда $\text{cov}(X(t_k), X(t_r)) = 0$ при всех $k \neq r$ ($k, r \in \{1, \dots, n\}$). Броуновское движение является гауссовским процессом.

Множество глубоких результатов относится к изучению траекторий гауссовских процессов (и полей). Например, найдены необходимые и достаточные условия непрерывности траекторий. Исследованы такие важные задачи, как нахождение асимптотики вероятности выброса процесса за высокий уровень u (когда $u \rightarrow \infty$).

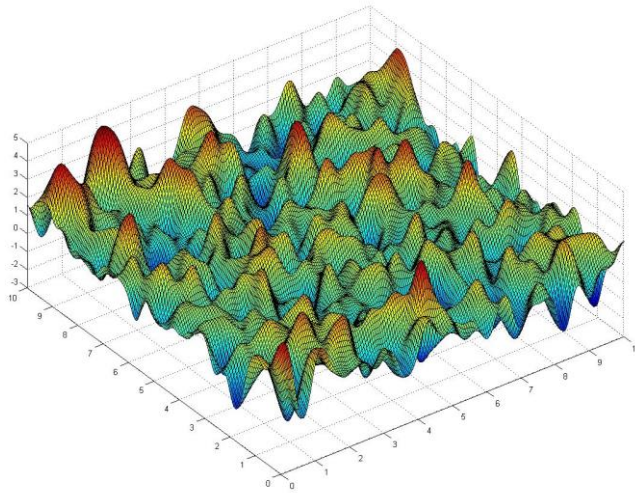


Рис. 2. Реализация гауссовского случайного поля.

В XX-м веке наряду с марковской зависимостью появились и другие важные определения, приводящие к новым классам процессов. Достаточно напомнить определение процессов, представляющих собой мартингалы (имеются также субмартингалы и супермартингалы). Этот класс задается с помощью фильтрации, т.е. семейства σ -алгебр \mathcal{F}_t , где $t \in T \subset \mathbb{R}$, обладающих свойством "возрастания": $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ при всех $s, t \in T$, для которых $s \leq t$. Действительный случайный процесс $\{X(t), t \in T\}$ называется мартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, если величина $X(t)$ является \mathcal{F}_t -измеримой при любом $t \in T$ и $E(X(t) | \mathcal{F}_s) = X(s)$ для всех $s, t \in T$ таких, что $s \leq t$. Здесь $E(\cdot | \mathcal{F}_s)$ обозначает условное математическое ожидание относительно σ -алгебры \mathcal{F}_s . Оказалось, что класс мартингалов (и более общий класс семимартингалов) играет важнейшую роль в теории стохастических дифференциальных уравнений.

Во второй половине XX-го века стали исследоваться процессы и поля с перемешиванием, а начиная с 70-х годов - процессы и поля, обладающие различными формами положительной или отрицательной зависимости. Часто положительную зависимость называют ассоциированностью. В физической литературе используются близкие условия, носящие название ФКЖ-неравенств. Такие неравенства и их аналоги оказались полезными в задачах теории перколяции (или просачивания). Простейший вариант такой задачи был сформулирован в 1957 году С.Бродбентом и Дж.Хаммерсли (1920-2004). Поместим пористый камень в емкость с водой. С какой вероятностью вода

попадет в заданную точку этого камня? Формализуется задача следующим образом. Представим себе камень как множество "широких" и "узких" каналов. Удобно рассматривать камень как решетку \mathbb{C}^d (при $d=3$) и считать каналами ребра, соединяющие соседние вершины (для которых $|x-y|=1$, где $x, y \in \mathbb{C}^d$ и $|u| = \sum_{k=1}^d |u_k|$, $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{C}^d$).

Пусть каждое ребро \mathbb{C}^d является открытым ("широким") с вероятностью p и закрытым ("узким") с вероятностью $1-p$, причем все ребра открываются или закрываются независимо друг от друга ($0 < p < 1$). Спрашивается, при каких p на решетке \mathbb{C}^d возникает бесконечный путь из открытых каналов (имеются и другие формулировки). Доказывается, что ответ на поставленный вопрос зависит от того, больше или меньше p некоторой критической вероятности $p_c(d)$. Дальнейшему развитию этой проблематики посвящены, например, книги Г.Кестена и Дж.Гримметта.

Во второй половине прошлого века были установлены глубокие взаимосвязи между изучением процессов (полей), заданных на дискретных и непрерывных параметрических множествах, а также исследованы распределения процессов в различных функциональных пространствах. Огромный вклад в эту область функциональных предельных теорем внесли А.Н.Колмогоров, Ю.В.Прохоров, А.В.Скорород, В.Штрассен, А.А.Боровков, А.Н.Ширяев, Ж.Жакод и другие ученые.

Новые проблемы, требующие развития теории случайных процессов и полей, возникают в биологии и медицине. Усилия многих математиков направлены также на развитие актуарной и стохастической финансовой математики.

Интересно, что вероятностные идеи используются в различных математических областях. Например, в комплексном анализе хорошо известно уравнение Левнера. А именно, рассмотрим односвязную область $D \subset \mathbb{C}^2$ и простую непрерывную кривую γ в D , начинающуюся на ∂D . По теореме Римана $D_t := D \setminus \gamma([0, t])$ конформно изоморфно D . Пусть D – единичный диск, $f_t : D \rightarrow D_t$ – должным образом нормированный изоморфизм. Для $z \in D$ уравнение Левнера имеет вид

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = -f_t'(z) \frac{\zeta(t) + z}{\zeta(t) - z}, \quad f_0(z) = z,$$

где $\zeta(t)$ – некоторая функция. Эволюция Шрамма -- Левнера означает выбор $\zeta(t) = W(\kappa t)$. Здесь W – винеровский процесс и κ – некоторая константа. Удобно вместо f_t использовать обратное отображение g_t , а также переход от диска к верхней полуплоскости, тогда возникает уравнение

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - \zeta(t)}, \quad g_0(z) = z.$$

Выяснилось, что с помощью этого уравнения можно находить критические показатели перколяции на определенных решетках.

Известно, что крупные достижения в науке возникают на стыке нескольких областей. Отметим, что в 2006 году А.Ю.Окунькову была присуждена премия Филдса "за достижения, соединяющие теорию вероятностей, теорию представлений и алгебраическую геометрию". В 2010 году С.К.Смирнов был удостоен премии Филдса за работы по теории перколяции и исследование скейлинговых пределов в моделях статистической физики.

Тема 10. Выборочный метод

Общее понятие о выборочном методе. Множество всех единиц совокупности, обладающих определенным признаком и подлежащих изучению, носит в статистике название генеральной совокупности.

На практике по тем или иным причинам не всегда возможно или же нецелесообразно рассматривать всю генеральную совокупность. Тогда ограничиваются изучением лишь некоторой части ее, конечной целью которого является распространение полученных результатов на всю генеральную совокупность, т. е. применяют выборочный метод.

Для этого из генеральной совокупности особым образом отбирается часть элементов, так называемая выборка, и результаты обработки выборочных данных (например, средние арифметические значения) обобщаются на всю совокупность.

Теоретической основой выборочного метода является закон больших чисел. В силу этого закона при ограниченном рассеивании признака в генеральной совокупности и достаточно большой выборке с вероятностью, близкой к полной достоверности, выборочная средняя может быть сколь угодно близка к генеральной средней. Закон этот, включающий в себя группу теорем, доказан строго математически. Таким образом, средняя арифметическая, рассчитанная по выборке, может с достаточным основанием рассматриваться как показатель, характеризующий генеральную совокупность в целом.

Разумеется, не всякая выборка может быть основой для характеристики всей совокупности, к которой она принадлежит. Таким свойством обладают лишь репрезентативные (представительные) выборки, т. е. выборки, которые правильно отражают свойства генеральной совокупности. Существуют способы, позволяющие гарантировать достаточную репрезентативность выборки. Как доказано в ряде теорем математической статистики, таким способом при условии достаточно большой выборки является метод случайного отбора элементов генеральной совокупности, такого отбора, когда каждый элемент генеральной совокупности имеет равный с другими элементами шанс попасть в выборку. Выборки, полученные таким способом, называются случайными выборками. Случайность выборки является, таким образом, существенным условием применения выборочного метода

Области применения выборочного метода в исторических исследованиях. Сфера приложения этого метода в изучении истории обширна. Во-первых, историки могут применять выборочный метод при проведении всякого рода обследований с целью

изучения различных явлений и процессов современности. Правда, сейчас такими исследованиями больше занимаются социологи, чем историки, хотя именно историки могут проводить конкретно-социологические обследования, опираясь на исторические данные, и добиваться наибольшего эффекта таких исследований.

Во-вторых, историки нередко имеют дело с сохранившимися данными ранее проведенных собственно выборочных обследований. Такие обследования стали все более широко применяться с конца XIX в. Так, при проведении ряда сплошных обследований и переписей выборочно собирались и собираются сведения по более широкой программе. Многие данные собирались только выборочно. Наиболее интересными среди них для историков являются описания разного рода хозяйственных комплексов (крестьянских хозяйств, промышленных предприятий, колхозов, совхозов и т. д.), а также бюджетные и другого рода обследования различных слоев населения.

В-третьих, в распоряжении историков имеется значительное число разнообразных первичных сплошных массовых данных, полная обработка которых весьма затруднительна даже при применении современной вычислительной техники. При изучении их может быть применен выборочный метод. Такие материалы имеются по всем периодам истории, но особенно много их по истории XIX—XX вв.

Наконец, историкам очень часто приходится иметь дело с частичными данными, так называемыми естественными выборками. При обработке этих данных также может быть применен выборочный метод. Характер естественных выборок бывает различным. Прежде всего они могут представлять собой сохранившийся остаток некогда существовавшей более или менее полной совокупности данных. Так, многие актовые материалы, документы текущего делопроизводства и отчетности представляют остатки в прошлом обширных и систематических массивов данных. Далее, при систематическом сборе тех или иных сведений отдельные показатели могли учитываться лишь частично (именно частично, а не выборочно). Так, при составлении «Экономических примечаний» к Генеральному межеванию второй половины XVIII в., которое охватило большую часть территории страны, ряд показателей (численность населения, площадь земельных угодий и др.) учитывался повсеместно, а некоторые важные данные (о величине барских запасов, размерах оброка) были собраны в силу целого ряда причин лишь частично. Многие сведения вообще собирались только частично. Это прежде всего относится к тем из них, которые не являлись нормативными и сбором которых занимались различные местные органы, научные и общественные организации и отдельные лица.

Итак, области выборочного метода в исторических исследованиях весьма обширны, а задачи, которые следует при этом решать, различны.

Так, при организации выборочного обследования и формировании выборки из имеющихся сплошных данных исследователь располагает определенной свободой маневра для обеспечения репрезентативности выборок. При этом он может опираться на хорошо разработанную в математической статистике теорию, методика и технику получения таких выборок.

При оперировании же данными ранее проведенных выборочных обследований следует проверить, в какой мере они были выполнены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к выборочному методу. Для этого надо знать, как было проведено это обследование. Чаще всего это вполне можно сделать.

И совсем иное дело — естественные выборки данных, с которыми очень часто имеет дело историк. Прежде всего необходимо доказать их репрезентативность. Без этого экстраполяция показателей выборок на всю изучаемую совокупность будет необоснованной. Поскольку пока еще нет достаточно надежных методов математической проверки репрезентативности естественных выборок, то решающую роль здесь играет выяснение истории их возникновения и содержательный анализ имеющихся данных.

Виды выборочного изучения. В зависимости от того, как осуществляется отбор элементов совокупности в выборку, различают несколько видов выборочного обследования. Отбор может быть случайным, механическим, типическим и серийным.

Случайным является такой отбор, при котором все элементы генеральной совокупности имеют равную возможность быть отобранными. Другими словами, для каждого элемента генеральной совокупности обеспечена равная вероятность попасть в выборку.

Требование случайности отбора достигается на практике с помощью жребия или таблицы случайных чисел.

При отборе способом жеребьевки все элементы генеральной совокупности предварительно нумеруются и номера их наносятся на карточки. После тщательной перетасовки из пачки любым способом (подряд или в любом другом порядке) выбирается нужное число карточек, соответствующее объему выборки. При этом можно либо откладывать отобранные карточки в сторону (тем самым осуществляется так называемый бесповторный отбор), либо, вытащив карточку, записать ее номер и вернуть в пачку, тем самым давая ей возможность появиться в выборке еще раз (повторный отбор). При повторном отборе всякий раз после возвращения карточки пачка должна быть тщательно перетасована.

Способ жеребьевки применяется в тех случаях, когда число элементов всей изучаемой совокупности невелико. При большом объеме генеральной совокупности осуществление случайного отбора методом жеребьевки становится сложным. Более надежным и менее трудоемким в случае большого объема обрабатываемых данных является метод использования таблицы случайных чисел.

Таблиц случайных чисел существует несколько, одна из них приведена в приложении (табл. 9). Способ отбора с помощью таблицы случайных чисел рассмотрим на примере.

Пример 1. Пусть совокупность состоит из 900 элементов, а намеченный объем выборки равен 20 единицам.

Из таблицы случайных чисел (см. табл. 9 приложения) отбираем числа, не превосходящие 900, до тех пор, пока не наберем нужных 20 чисел. Получаем:

146 867 505 139 653 480 426 765 478 807 47 220 522 221 835 368 275 424 703

Выписанные числа будем считать порядковыми номерами тех элементов генеральной совокупности, которые попали в выборку.

Для очень больших совокупностей отбор с помощью таблицы случайных чисел становится трудно осуществимым, так как сложно перенумеровать всю совокупность. Здесь лучше применить механический отбор.

Механический отбор производится следующим образом. Если формируется 10%-ная выборка, т. е. из каждых десяти элементов должен быть отобран один, то вся совокупность условно разбивается на равные части по 10 элементов. Затем из первой десятки выбирается случайным образом элемент. Например, жеребьевка указала девятый номер. Отбор остальных элементов выборки полностью определяется указанной пропорцией отбора N номером первого отобранного элемента. В рассматриваемом случае выборка будет состоять из элементов 9, 19, 29 и т. д.

Механическим отбором следует пользоваться осторожно, так как существует реальная опасность возникновения так называемых систематических ошибок (см. § 2). Поэтому прежде чем делать механическую выборку, необходимо проанализировать изучаемую совокупность. Если ее элементы расположены случайным образом, то выборка, полученная механическим способом, будет случайной. Однако нередко элементы исходной совокупности бывают частично или даже полностью упорядочены. Весьма нежелательным для механического отбора является порядок элементов, имеющий правильную повторяемость, период которой может совпасть с периодом механической выборки.

Нередко элементы совокупности бывают упорядочены по величине изучаемого признака в убывающем или возрастающем порядке и не имеют периодичности. Механический отбор из такой совокупности приобретает характер направленного отбора, так как отдельные части совокупности оказываются представленными в выборке пропорционально их численности во всей совокупности, т. е. отбор направлен на то, чтобы сделать выборку представительной.

Механический отбор, как никакой другой, широко использовался в русской и советской статистике.

Большую ценность представляют обследования земских статистиков, которые наряду со сплошным подворным обследованием крестьянских хозяйств по сокращенной «похозяйственной карточке» изучали по расширенной программе определенную часть хозяйств, отобранных механическим способом.

Механический отбор использовался советскими статистиками для учета посевных площадей, численности скота, размеров урожая и многого другого накануне сплошной коллективизации, когда в сельском хозяйстве насчитывалось 25 млн. мелких крестьянских хозяйств (так называемый 10%-ный весенний опрос крестьянских хозяйств и 5%-ный осенний опрос).

Другим видом направленного отбора является типический отбор. Следует отличать типический отбор от отбора типичных объектов. Отбор типичных объектов применялся в земской статистике, а также при бюджетных обследованиях. При этом отбор «типичных селений» или «типичных хозяйств» производился по некоторым экономическим признакам, например по размерам землевладения на двор, по роду занятий жителей и т. п. Отбор такого рода не может быть основой для применения выборочного метода, так как здесь не выполнено основное его требование — случайность отбора.

При собственно типическом отборе в выборочном методе совокупность разбивается на группы, однородные в качественном отношении, а затем уже внутри каждой группы производится случайный отбор. Типический отбор организовать сложнее, чем собственно случайный, так как необходимы определенные знания о составе и свойствах генеральной совокупности, но зато он дает более точные результаты.

При серийном отборе вся совокупность разбивается на группы (серии). Затем путем случайного или механического отбора выделяют определенную часть этих серий и производят их сплошную обработку. По сути дела, серийный отбор представляет собой случайный или механический отбор, осуществленный для укрупненных элементов исходной совокупности.

В теоретическом плане серийная выборка является самой несовершенной из рассмотренных. Для обработки материала она, как правило, не используется, но представляет определенные удобства при организации обследования, особенно в изучении сельского хозяйства. Например, ежегодные выборочные обследования крестьянских хозяйств в годы, предшествовавшие коллективизации, проводились способом серийного отбора. Историком полезно знать о серийной выборке, поскольку он может встретиться с результатами таких обследований.

Кроме описанных выше классических способов отбора в практике выборочного метода используются и другие способы. Рассмотрим два из них.

Изучаемая совокупность может иметь многоступенчатую структуру, она может состоять из единиц первой ступени, которые, в свою очередь, состоят из единиц второй ступени, и т. д. Например, губернии включают в себя уезды, уезды можно рассматривать как совокупность волостей, волости состоят из сел, а села — из дворов.

К таким совокупностям можно применять многоступенчатый отбор, т. е. последовательно осуществлять отбор на каждой ступени. Так, из совокупности губерний механическим, типическим или случайным способом можно отобрать уезды (первая ступень), затем одним из указанных способов выбрать волости (вторая ступень), далее провести отбор сел (третья ступень) и, наконец, дворов (четвертая ступень).

Примером двухступенчатого механического отбора может служить давно практикуемый отбор бюджетов рабочих. На первой ступени механически выбираются предприятия, на второй — рабочие, бюджет которых обследуется.

Изменчивость признаков исследуемых объектов может быть различной. Например, обеспеченность крестьянских хозяйств собственной рабочей силой колеблется меньше, чем, скажем, размеры их посевов. В связи с этим меньшая по объему выборка по обеспеченности рабочей силой будет столь же представительной, как и большая по числу элементов выборка данных о размерах посевов. В этом случае из выборки, по которой определяются размеры посевов, можно сделать под выборку, достаточно репрезентативную для определения обеспеченности рабочей силой, осуществив тем самым двухфазный отбор. В общем случае можно добавить и следующие фазы, т. е. из полученной подвыборки сделать еще подвыборку и т. д. Этот же способ отбора применяется в тех случаях, когда цели исследования требуют различной точности при исчислении разных показателей.

Потребность в многофазном отборе возникла при выборочной обработке материалов профессиональной переписи 1918 года. Как показали исследования, для выявления доли рабочих Ярославской губернии, уходящих на полевые работы, требовалась выборка одного объема, тогда как для изучения общей связи рабочих с землей можно было ограничиться выборкой меньшего объема. Разные объемы выборок потребовались и при изучении групп рабочих различных отраслей промышленности Ярославской губернии. Так, предварительные расчеты показали, что для достаточно надежных выводов по группе рабочих полиграфической промышленности требовалась, по крайней мере, 5%-ная выборка, а для исследования рабочих текстильной, пищевой, металлообрабатывающей и машиностроительной промышленности достаточной оказалась 1%-ная выборка

Тема 11. Статистическая проверка гипотез

Статистическая гипотеза - представляет собой некоторое предположение о законе распределения случайной величины или о параметрах этого закона, формулируемое на основе выборки.

Примерами статистических гипотез являются предположения: генеральная совокупность распределена по экспоненциальному закону; математические ожидания двух экспоненциально распределенных выборок равны друг другу. В первой из них высказано предположение о виде закона распределения, а во второй – о параметрах двух распределений. Гипотезы, в основе которых нет никаких допущений о конкретном виде закона распределения, называют непараметрическими, в противном случае – параметрическими.

Гипотезу, утверждающую, что различие между сравниваемыми характеристиками отсутствует, а наблюдаемые отклонения объясняются лишь случайными колебаниями в выборках, на основании которых производится сравнение, называют нулевой (основной) гипотезой и обозначают H_0 . Наряду с основной гипотезой рассматривают и альтернативную (конкурирующую, противоречащую) ей гипотезу H_1 . И если нулевая гипотеза будет отвергнута, то будет иметь место альтернативная гипотеза.

Различают простые и сложные гипотезы. Гипотезу называют простой, если она однозначно характеризует параметр распределения случайной величины. Например, если σ^2 является параметром экспоненциального распределения, то гипотеза H_0 о равенстве $\sigma^2 = 10$ – простая гипотеза. Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного множества простых гипотез. Сложная гипотеза H_0 о неравенстве $\sigma^2 > 10$ состоит из бесконечного множества простых гипотез H_0 о равенстве $\sigma^2 = b_i$, где b_i – любое число, большее 10. Гипотеза H_0 о том, что математическое ожидание нормального распределения равно двум при неизвестной дисперсии, тоже является сложной. Сложной гипотезой будет предположение о распределении случайной величины X по нормальному закону, если не фиксируются конкретные значения математического ожидания и дисперсии.

Проверка гипотезы основывается на вычислении некоторой случайной величины – критерия, точное или приближенное распределение которого известно. Обозначим эту величину через Z , ее значение является функцией от элементов выборки $Z = Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Процедура проверки гипотезы предписывает каждому значению критерия одно из двух решений – принять или отвергнуть гипотезу. Тем самым все выборочное пространство и соответственно множество значений критерия делятся на два непересекающихся подмножества S_0 и S_1 . Если значение критерия Z попадает в область S_0 , то гипотеза принимается, а если в область S_1 , – гипотеза отклоняется. Множество S_0 называется областью принятия гипотезы или областью допустимых значений, а множество S_1 – областью отклонения гипотезы или критической областью. Выбор одной области однозначно определяет и другую область.

Принятие или отклонение гипотезы H_0 по случайной выборке соответствует истине с некоторой вероятностью и, соответственно, возможны два рода ошибок.

Ошибка первого рода - возникает с вероятностью α тогда, когда отвергается верная гипотеза H_0 и принимается конкурирующая гипотеза H_1 .

Ошибка второго рода - возникает с вероятностью β в том случае, когда принимается неверная гипотеза H_0 , в то время как справедлива конкурирующая гипотеза H_1 .

Доверительная вероятность – это вероятность не совершить ошибку первого рода и принять верную гипотезу H_0 . Вероятность отвергнуть ложную гипотезу H_0 называется мощностью критерия. Следовательно, при проверке гипотезы возможны четыре варианта исходов, табл. 3.1.

Таблица 3.1.

Гипотеза	Решение	Вероятность	Примечание
Верная H_0	Принимается	$1 - \alpha$	Доверительная вероятность
	Отвергается	α	Вероятность ошибки первого

	есть		рода
Неверно	Принимается	α	Вероятность ошибки второго рода
Отвергается		$1-\alpha$	Мощность критерия

Например, рассмотрим случай, когда некоторая несмещенная оценка параметра θ вычислена по выборке объема n , и эта оценка имеет плотность распределения $f(\theta)$, рис. 3.1.

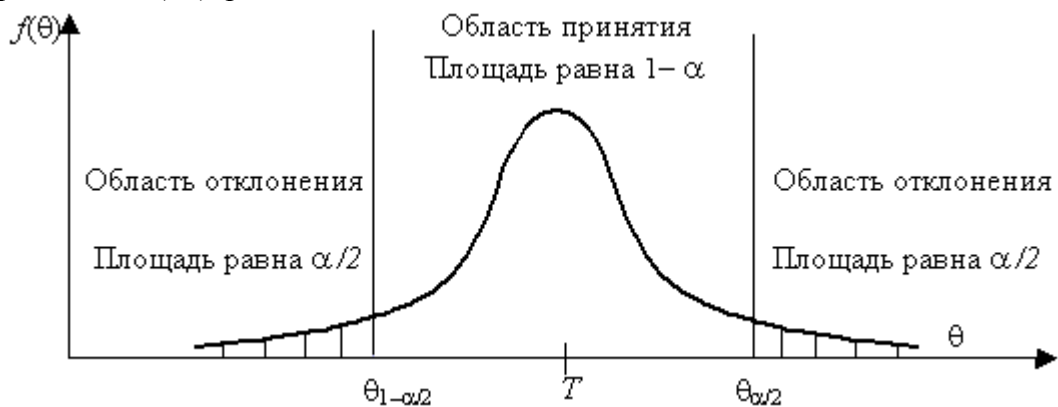
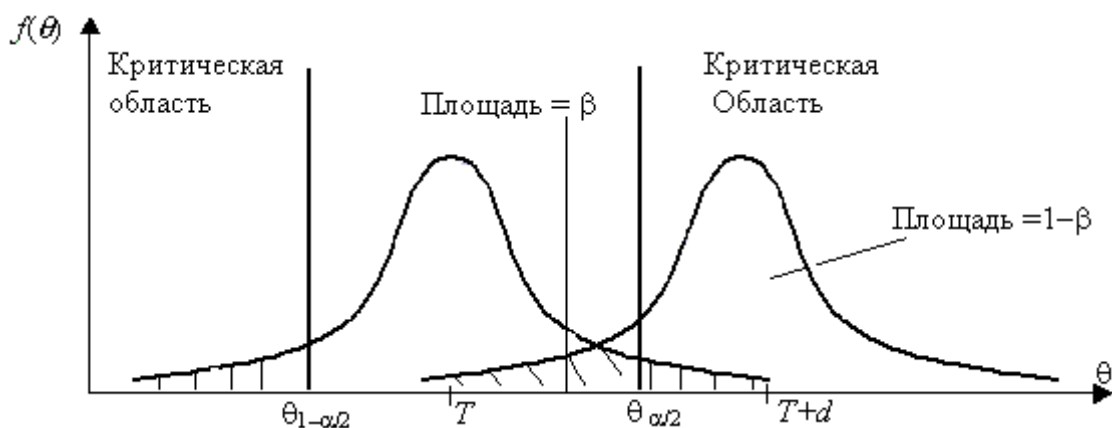


Рис. 3.1. Области и отклонения гипотезы

Предположим, что истинное значение оцениваемого параметра равно T . Если рассматривать гипотезу H_0 о равенстве $\theta = T$, то насколько велико должно быть различие между θ и T , чтобы эту гипотезу отвергнуть. Ответить на данный вопрос можно в статистическом смысле, рассматривая вероятность достижения некоторой заданной разности между θ и T на основе выборочного распределения параметра θ .

Целесообразно полагать одинаковыми значения вероятности выхода параметра θ за нижний и верхний пределы интервала. Такое допущение во многих случаях позволяет минимизировать доверительный интервал, т.е. повысить мощность критерия проверки. Суммарная вероятность того, что параметр θ выйдет за пределы интервала с границами $\theta_{1-\alpha/2}$ и $\theta_{\alpha/2}$, составляет величину α . Эту величину следует выбрать настолько малой, чтобы выход за пределы интервала был маловероятен. Если оценка параметра попала в заданный интервал, то в таком случае нет оснований подвергать сомнению проверяемую гипотезу, следовательно, гипотезу равенства $\theta = T$ можно принять. Но если после получения выборки окажется, что оценка выходит за установленные пределы, то в этом случае есть серьезные основания отвергнуть гипотезу H_0 . Отсюда следует, что вероятность допустить ошибку первого рода равна α (равна уровню значимости критерия).

Если предположить, например, что истинное значение параметра в действительности равно $T+d$, то согласно гипотезе H_0 о равенстве $\theta = T$ – вероятность того, что оценка параметра θ попадет в область принятия гипотезы, составит β , рис. 3.2.



При заданном объеме выборки вероятность совершения ошибки первого рода можно уменьшить, снижая уровень значимости α . Однако при этом увеличивается вероятность ошибки второго рода β (снижается мощность критерия). Аналогичные рассуждения можно провести для случая, когда истинное значение параметра равно $T - d$.

Единственный способ уменьшить обе вероятности состоит в увеличении объема выборки (плотность распределения оценки параметра при этом становится более "узкой"). При выборе критической области руководствуются правилом Неймана – Пирсона: следует так выбирать критическую область, чтобы вероятность α была мала, если гипотеза верна, и велика в противном случае. Однако выбор конкретного значения α относительно произволен. Употребительные значения лежат в пределах от 0,001 до 0,2. В целях упрощения ручных расчетов составлены таблицы интервалов с границами $\alpha_{1-\alpha/2}$ и $\alpha_{\alpha/2}$ для типовых значений α и различных способов построения критерия.

При выборе уровня значимости необходимо учитывать мощность критерия при альтернативной гипотезе. Иногда большая мощность критерия оказывается существенно более важной, чем малый уровень значимости, и его значение выбирают относительно большим, например 0,2. Такой выбор оправдан, если последствия ошибок второго рода более существенны, чем ошибок первого рода. Например, если отвергнуто правильное решение "продолжить работу пользователей с текущими паролями", то ошибка первого рода приведет к некоторой задержке в нормальном функционировании системы, связанной со сменой паролей. Если же принято решение не менять пароли, несмотря на опасность несанкционированного доступа посторонних лиц к информации, то эта ошибка повлечет более серьезные последствия.

В зависимости от сущности проверяемой гипотезы и используемых мер расхождения оценки характеристики от ее теоретического значения применяют различные критерии. К числу наиболее часто применяемых критериев для проверки гипотез о законах распределения относят критерии хи-квадрат Пирсона, Колмогорова, Мизеса, Вилкоксона, о значениях параметров – критерии Фишера, Стьюдента.

3.2. Типовые распределения

При проверке гипотез широкое применение находит ряд теоретических законов распределения. Наиболее важным из них является нормальное распределение. С ним связаны распределения хи-квадрат, Стьюдента, Фишера, а также интеграл вероятностей.

Для указанных законов функции распределения аналитически не представимы. Значения функций определяются по таблицам или с использованием стандартных процедур пакетов прикладных программ. Указанные таблицы обычно построены в целях удобства проверки статистических гипотез в ущерб теории распределений – они содержат не значения функций распределения, а критические значения аргумента $z(\alpha)$.

Для односторонней критической области $z(\alpha) = z_{1-\alpha}$, т.е. критическое значение аргумента $z(\alpha)$ соответствует квантили $z_{1-\alpha}$ уровня $1-\alpha$, так

$$\int_{z(\alpha)}^{\infty} f(z) dz = \alpha = 1 - \int_{-\infty}^{z(\alpha)} f(z) dz$$

как , рис. 3.3.

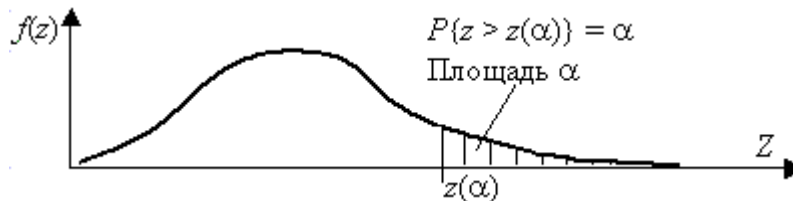


Рис. 3.3. Односторонняя критическая область

Для двусторонней критической области, с уровнем значимости α , размер левой области $\alpha/2$, правой $\alpha/2$ ($\alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$), рис. 3.4. Значения $z(\alpha/2)$ и $z(\alpha/2)$ связаны с квантилями распределения соотношениями $z(\alpha/2) = z_{1-\alpha/2}$, $z(\alpha/2) = z_{\alpha/2}$, так

$$\int_{-\infty}^{z(\alpha/2)} f(z) dz = 1 - \alpha/2, \quad \int_{-\infty}^{z(\alpha/2)} f(z) dz = \alpha/2$$

как . Для симметричной функции плотности

распределения $f(z)$ критическую область выбирают из условия $\alpha/2 = \alpha/2 = \alpha/2$ (обеспечивается наибольшая мощность критерия). В таком случае левая и правая границы будут равны $|z(\alpha/2)|$.

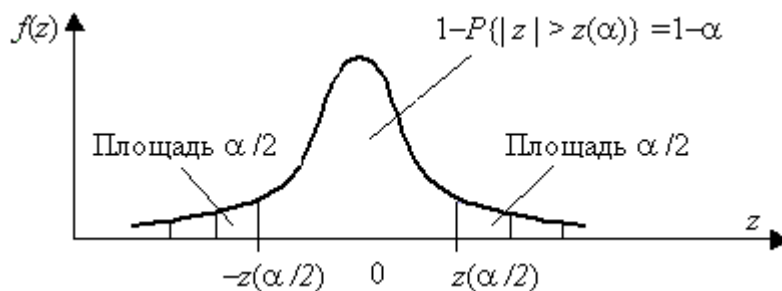


Рис. 3.4. Двусторонняя критическая область

Нормальное распределение

Этот вид распределения является наиболее важным в связи с центральной предельной теоремой теории вероятностей: распределение суммы независимых случайных величин стремится к нормальному с увеличением их количества при произвольном законе распределения отдельных слагаемых, если слагаемые обладают конечной дисперсией. Так как реальные физические явления часто представляют собой результат суммарного воздействия многих факторов, то в таких случаях нормальное распределение является хорошим приближением наблюдаемых значений. Функция плотности нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_2}} \exp \left[\frac{-(x - m_1)^2}{2m_2} \right]$$

(3.1)

– унимодальная, симметричная, аргумент x может принимать любые действительные значения, рис. 3.5.

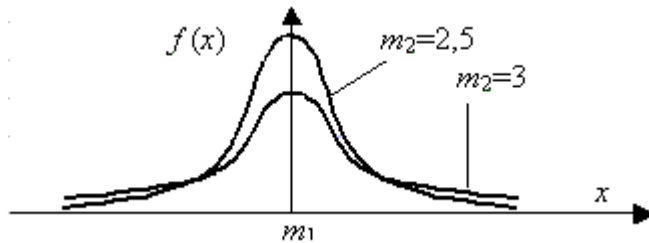


Рис. 3.5. Плотность нормального распределения

Функция плотности нормального распределения стандартизованной

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-u^2}{2} \right].$$

величины u имеет вид

Вычисление значений функции распределения $\Phi(u)$ для стандартизованного неотрицательного аргумента u ($u \geq 0$) можно произвести с помощью полинома наилучшего приближения [9, стр. 694]

$$\Phi(u) = 1 - 0,5(1 + 0,196854u + 0,115194u^2 + 0,000344u^3 + 0,019527u^4)^{-4}.$$

(3.2)

Такая аппроксимация обеспечивает абсолютную ошибку не более 0,00025. Для вычисления $\Phi(u)$ в области отрицательных значений стандартизованного аргумента u ($u < 0$) следует воспользоваться свойством симметрии нормального распределения $\Phi(u) = 1 - \Phi(-u)$.

Иногда в справочниках вместо значений функции $\Phi(u)$ приводят значения интеграла вероятностей

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \exp(-x^2/2) dx, \quad u > 0.$$

(3.3)

Интеграл вероятностей связан с функцией нормального распределения соотношением $\Phi(u) = 0,5 + F(u)$.

Распределение хи-квадрат

Распределению хи-квадрат (χ^2 -распределению) с k степенями свободы

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2$$

соответствует распределение суммы квадратов n стандартизованных случайных величин u_i , каждая из которых распределена по нормальному закону,

причем k из них независимы, $n \geq k$. Функция плотности распределения хи-квадрат с k степенями свободы

$$f(x) = \left[2^{k/2} \Gamma(k/2) \right]^{-1} x^{k/2-1} e^{-x/2}, \quad x \geq 0, \quad (3.4)$$

где $x = \chi^2$, $\Gamma(k/2)$ – гамма-функция.

Число степеней свободы k определяет количество независимых слагаемых в выражении для χ^2 . Функция плотности при k , равном одному или двум, – монотонная, а при $k > 2$ – унимодальная, несимметричная, рис. 3.6.

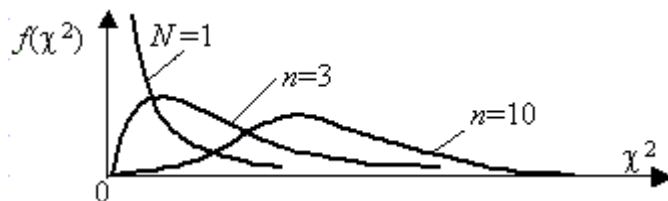


Рис. 3.6. Плотность распределения хи-квадрат

Математическое ожидание и дисперсия величины χ^2 равны соответственно k и $2k$. Распределение хи-квадрат является частным случаем более общего гамма-распределения, а величина, равная корню квадратному из хи-квадрат с двумя степенями свободы, подчиняется распределению Рэлея.

С увеличением числа степеней свободы ($k > 30$) распределение хи-квадрат приближается к нормальному распределению с математическим ожиданием k и дисперсией $2k$. В таких случаях критическое значение $\chi^2(k; \alpha) \approx u_{1-\alpha/2}(k, 2k)$, где $u_{1-\alpha/2}(k, 2k)$ – квантиль нормального распределения. Погрешность аппроксимации не превышает нескольких процентов.

Распределение Стьюдента

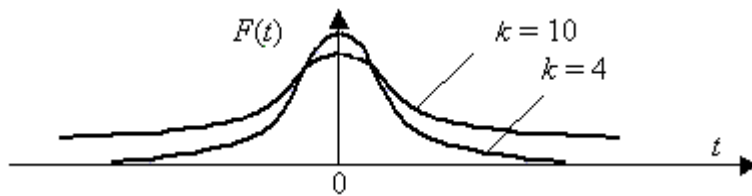
Распределение Стьюдента (t-распределение, предложено в 1908 г. английским статистиком В. Госсетом, публиковавшим научные труды под псевдонимом Student)

$$t = \frac{u_0}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_k^2) / k}}$$

характеризует распределение случайной величины $t = \frac{u_0}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_k^2) / k}}$, где u_0, u_1, \dots, u_k взаимно независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией. Аргумент t не зависит от дисперсии слагаемых. Функция плотности распределения Стьюдента

$$f(t) = \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\sqrt{\pi k} \Gamma(k/2)} \left[1 + \frac{t^2}{k} \right]^{-(k+1)/2}. \quad (3.5)$$

Величина k характеризует количество степеней свободы. Плотность распределения – унимодальная и симметричная функция, похожая на нормальное распределение, рис. 3.7.



Область изменения аргумента t от $-\infty$ до ∞ . Математическое ожидание и дисперсия равны 0 и $k/(k-2)$ соответственно, при $k > 2$. По сравнению с нормальным распределением Стьюдента более пологое, оно имеет меньшую дисперсию. Это отличие заметно при небольших значениях k , что следует учитывать при проверке статистических гипотез (критические значения аргумента распределения Стьюдента превышают аналогичные показатели нормального распределения). Таблицы распределения содержат значения для

односторонней $\int_{t(k; \alpha)}^{\infty} f(t) dt = \alpha$ или двусторонней $\int_{-t(k; \alpha)}^{t(k; \alpha)} f(t) dt = \alpha$ критической области.

Распределение Стьюдента применяется для описания ошибок выборки при $k \leq 30$. При $k > 100$ данное распределение практически соответствует нормальному, для $30 < k < 100$ различия между распределением Стьюдента и нормальным распределением составляют несколько процентов. Поэтому относительно оценки ошибок малыми считаются выборки объемом не более 30 единиц, большими – объемом более 100 единиц. При аппроксимации распределения Стьюдента нормальным распределением для односторонней критической области вероятность $P\{t > t(k; \alpha)\} = u_{1-\alpha}(0, k/(k-2))$, где $u_{1-\alpha}(0, k/(k-2))$ – квантиль нормального распределения. Аналогичное соотношение можно составить и для двусторонней критической области.

Распределение Фишера

Распределению Р.А. Фишера (F-распределению Фишера – Снедекора) подчиняется случайная величина $x = [(y_1/k_1)/(y_2/k_2)]$, равная отношению двух случайных величин y_1 и y_2 , имеющих хи-квадрат распределение с k_1 и k_2 степенями свободы. Область изменения аргумента x от 0 до ∞ . Плотность распределения

$$f(x) = \frac{\left[\frac{k_1}{k_2} \right]^{k_1/2} \Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma(k_1/2)\Gamma(k_2/2)} x^{(k_1-2)/2} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} x\right)^{-(k_1+k_2)/2}$$

(3.6)

В этом выражении k_1 обозначает число степеней свободы величины y_1 с большей дисперсией, k_2 – число степеней свободы величины y_2 с меньшей дисперсией. Плотность распределения – унимодальная, несимметричная, рис. 3.8.

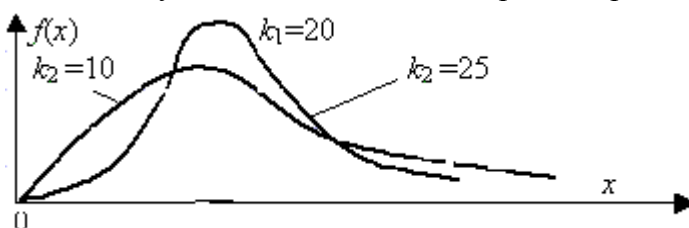


Рис. 3.8. Плотность распределения Фишера

Математическое ожидание случайной величины x равно $k_2/(k_2-2)$ при $k_2 > 2$, дисперсия $\sigma^2 = [2 k_2^2 (k_1+k_2-2)]/[k_1(k_2-2)^2(k_2-4)]$ при $k_2 > 4$. При $k_1 > 30$ и $k_2 > 30$ величина x распределена приближенно нормально с центром $(k_1 - k_2)/(2 k_1 k_2)$ и дисперсией $(k_1 + k_2)/(2 k_1 k_2)$.

3.3. Проверка гипотез о законе распределения

Обычно сущность проверки гипотезы о законе распределения ЭД заключается в следующем. Имеется выборка ЭД фиксированного объема, выбран или известен вид закона распределения генеральной совокупности. Необходимо оценить по этой выборке параметры закона, определить степень согласованности ЭД и выбранного закона распределения, в котором параметры заменены их оценками. Пока не будем касаться способов нахождения оценок параметров распределения, а рассмотрим только вопрос проверки согласованности распределений с использованием наиболее употребительных критериев.

Критерий хи-квадрат К. Пирсона

Использование этого критерия основано на применении такой меры (статистики) расхождения между теоретическим $F(x)$ и эмпирическим распределением $F_n(x)$, которая приближенно подчиняется закону распределения χ^2 . Гипотеза H_0 о согласованности распределений проверяется путем анализа распределения этой статистики. Применение критерия требует построения статистического ряда.

Итак, пусть выборка представлена статистическим рядом с количеством разрядов \square . Наблюдаемая частота попаданий в i -й разряд n_i . В соответствии с теоретическим законом распределения ожидаемая частота попаданий в i -й разряд составляет F_i . Разность между наблюдаемой и ожидаемой частотой составит величину $(n_i - F_i)$. Для нахождения общей степени расхождения между $F(x)$ и $F_n(x)$ необходимо подсчитать взвешенную сумму квадратов разностей по всем разрядам статистического ряда

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\square} \frac{(n_i - F_i)^2}{F_i}$$

(3.7)

Величина χ^2 при неограниченном увеличении n имеет распределение хи-квадрат (асимптотически распределена как хи-квадрат). Это распределение зависит от числа степеней свободы k , т.е. количества независимых значений слагаемых в выражении (3.7). Число степеней свободы равно числу \square минус число линейных связей, наложенных на выборку. Одна связь существует в силу того, что любая частота может быть вычислена по совокупности частот в оставшихся $\square - 1$ разрядах. Кроме того, если параметры распределения неизвестны заранее, то имеется еще одно ограничение, обусловленное подгонкой распределения к выборке. Если по выборке определяются \square параметров распределения, то число степеней свободы составит $k = \square - \square - 1$.

Область принятия гипотезы H_0 определяется условием $\chi^2 \leq \chi^2_{\square}(k; \square)$, где $\chi^2_{\square}(k; \square)$ – критическая точка распределения хи-квадрат с уровнем значимости \square . Вероятность ошибки первого рода равна \square , вероятность ошибки второго рода четко определить

нельзя, потому что существует бесконечно большое множество различных способов несовпадения распределений. Мощность критерия зависит от количества разрядов и объема выборки. Критерий рекомендуется применять при $n > 200$, допускается применение при $n > 40$, именно при таких условиях критерий состоятелен (как правило, отвергает неверную нулевую гипотезу).

Тема 12. Регрессионный анализ

В регрессионном анализе изучается односторонняя зависимость переменной Y от одной или нескольких переменных X_1, \dots, X_k . Переменную Y называют функцией отклика или объясняемой переменной, а X_1, \dots, X_k - объясняющими переменными. Основная задача регрессионного анализа - установление формы зависимости между объясняемой и объясняющими переменными и анализ достоверности модельных параметров этой зависимости (см. §2.5).

Пусть требуется найти аналитический вид (формулу вычисления) некоторого экономического показателя Y .

На первом шаге регрессионного анализа идентифицируют переменные X_1, \dots, X_k , от которых зависит Y , т.е. определяют те существенные факторы, которые воздействуют на этот показатель (см. Пример 9.1). Символически этот факт записывается так: $Y = f(X_1, \dots, X_k)$.

На втором шаге регрессионного анализа требуется спецификация формы связи между Y и X_1, \dots, X_k , т.е. определение вида функции f . Ориентиром для определения вида зависимости являются содержание решаемой задачи, результаты наблюдений за поведением показателя относительно изменения факторов на основе статистических данных. Например, выборочные наблюдения пар наблюдаемых значений (X^j, Y^j) , приведенные на Рис. 9.1а), говорят о линейном характере зависимости вида $Y = \alpha + \beta X$, а на Рис 9.1б) - о полиномиальной зависимости вида $Y = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

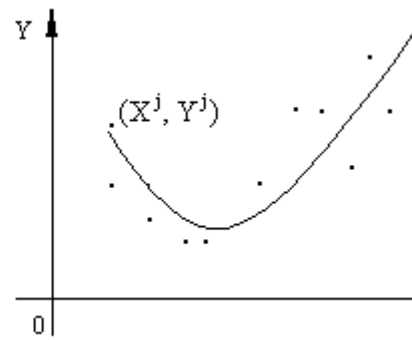
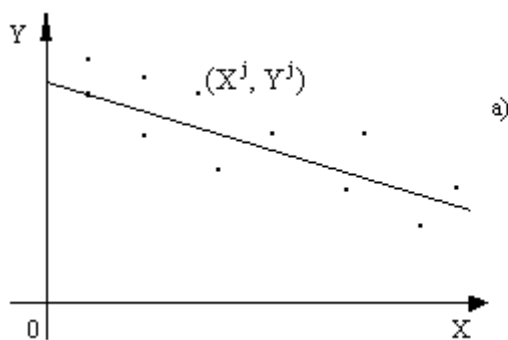


Рис. 9.1. Примеры эмпирических зависимостей

Предположим, что в результате спецификации определена линейная зависимость между показателем Y и факторами X_1, \dots, X_k :

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k \quad (9.2.1)$$

Задача третьего шага регрессионного анализа заключается в определении конкретных числовых значений параметров $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_k$ на основе статистических данных о наблюдениях значений Y, X_1, \dots, X_k .

Естественно, линейные зависимости вида (9.2.1) наиболее просты для эконометрических исследований. Оказывается, что в ряде случаев к виду (9.2.1) можно привести и нелинейные зависимости с помощью логарифмирования, введения обратных величин и других приемов. Преобразование нелинейных функций в линейные называется линеаризацией. Покажем, в связи с этим, некоторые приемы линеаризации в случае двух переменных.

Пусть нелинейное соотношение имеет гиперболический вид

$$Y = \alpha + \beta \frac{1}{X}$$

Введем переменную $Z = \frac{1}{X}$. Тогда наше соотношение становится линейным относительно Y и Z : $Y = \alpha + \beta Z$.

Рассмотрим нелинейные зависимости степенного и показательного видов:

$$Y = \alpha X^\beta, \quad Y = \alpha e^{\beta X}$$

Прологарифмируем обе части каждого соотношения:

$$\ln Y = \ln \alpha + \beta \ln X, \quad \ln Y = \ln \alpha + \beta X$$

Обозначив $U = \ln Y$, $V = \ln X$ получаем линейные соотношения

$$U = \ln \alpha + \beta V \quad (\text{относительно } U, V)$$

$$U = \ln \alpha + \beta X \quad (\text{относительно } U, X)$$

Таким образом, линеаризация расширяет область линейных моделей и повышает популярность линейных эконометрических методов. Однако опыт работы с экономическими данными показывает, что их отдельные значения не укладываются точно на прямую или на другую гладкую линию. Поэтому формализация вида (9.2.1) оказывается неадекватной целям, связанным с измерениями в экономике. Эта проблема преодолевается введением в соотношение (9.2.1) стохастического члена u :

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + u \quad (9.2.2)$$

Уравнение (9.2.2) называется линейной эконометрической моделью (или линейным уравнением регрессии Y на X_1, \dots, X_k). Если мы имеем выборку $\{Y^i, X_1^i, \dots, X_k^i\}$, $i=1, \dots, n$, из n наблюдений над переменными Y, X_1, \dots, X_k , то модель (9.2.2) можно переписать в виде:

- ошибки наблюдения или измерения наблюдаемых значений факторов X_1, \dots, X_k и показателя Y .

Дополнительное слагаемое u в (9.2.2) призвано компенсировать отклонения, вызванные этими причинами. Поскольку стохастическое возмущение u является случайной величиной, то можно говорить о свойствах ее распределения, среднем значении, дисперсии и т.д.

Теоретической основой регрессионного анализа линейных эконометрических моделей типа (9.2.2) чаще других служит метод наименьших квадратов (см. §2.5). Применение этого метода мы рассмотрим на примере парной регрессионной модели, т.е. линейной модели, состоящей из единственного уравнения, содержащего только две переменные:

$$Y = \alpha + \beta X + u \quad (9.2.3)$$

Предположим, что проведено n выборочных наблюдений, в результате чего получены значения:

	1	2	..	n
	1	2	..	n

(Так как в дальнейшем рассматривается зависимость Y только от одной переменной, в этой таблице и далее нижние индексы при X показывают, в отличие от формулы (9.2.2), номера наблюдаемых значений этой единственной переменной X ; аналогично Y_i , показывают наблюдаемые значения Y).

Введем в рассмотрение средние арифметические

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

Мы хотим с помощью наблюдаемых данных получить уравнение линии

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X \quad (9.2.4)$$

которая будет наилучшей оценкой истинной линии $Y = \alpha + \beta X$.

Согласно метода наименьших квадратов (§2.5) эти параметры $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ являются решением оптимизационной задачи

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - (\alpha + \beta X_i)]^2 \rightarrow \min$$

Необходимые условия оптимальности пары $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ имеют вид (см. (2.3.3)):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i, \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i = \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n X_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i^2. \end{cases} \quad (9.2.5)$$

После подстановки в эту систему значений выборочных наблюдений (X_i, Y_i) , мы получим линейную систему из двух уравнений с двумя неизвестными $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$. Решив ее, найдем искомые параметры.

Систему (9.2.5) можно решить другим способом. Для этого проведем следующие преобразования. Разделив первое уравнение (9.2.5) на число n , получим

$$\bar{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \bar{X} \quad (9.2.6)$$

т.е. при найденных $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ оценочная линия (9.2.4) проходит через точку средних значений (\bar{X}, \bar{Y}) (Рис. 9.2).

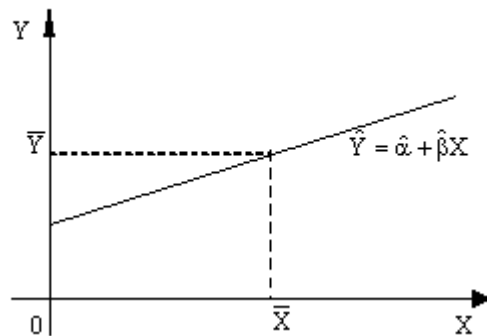


Рис. 9.2. Оценочная линия.

Вычтем (9.2.6) из (9.2.4): $\hat{Y} - \bar{Y} = \hat{\beta}(X - \bar{X})$. Отклонения наблюдаемых

значений X_i, Y_i, \hat{Y}_i от их средних обозначим малыми буквами:

$$x_i = X_i - \bar{X}, \quad y_i = Y_i - \bar{Y}, \quad \hat{y}_i = \hat{Y}_i - \bar{Y}$$

В этих обозначениях оценочное уравнение (9.2.4) запишется так:

$$\hat{y} = \hat{\beta} x \quad (9.2.7)$$

а отклонение точки (x_i, y_i) от этой линии -

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\beta} x_i$$

Задача минимизации суммы квадратов отклонения:

$$S(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}x_i)^2 \rightarrow \min$$

относительно $\hat{\beta}$ дает нам

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (9.2.8)$$

Применяя достаточный признак оптимальности (2.3.5):

$$\frac{\partial^2 S(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$$

мы убеждаемся, что $\hat{\beta}$ действительно является точкой минимума функции $S(\hat{\beta})$.
 Параметр найдем из:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \quad (9.2.9)$$

Пример 9.3. Требуется выявить зависимость аварий на дорогах от количества автотранспорта для некоторого региона на основе результатов ежегодных наблюдений, заданных в следующей таблице:

Номер года	1)										0	1
Год	2)	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998
Количество аварий на дорогах	3)	66	53	77	01	16	08	27	38	68	68	74
Количество зарегистрированных транспортных средств	4)	52	73	11	41	62	90	29	77	41	92	43

Введем

необходимые

обозначения:

i - номер года ($i=1, \dots, 11$);

Y - аварии на дорогах; Y_i - количество аварий в год i ;

X - транспортные средства; X_i - количество транспорта в год i .

Количество наблюдений $n=11$. С помощью данных столбиков (3) и (4) вычислим коэффициенты для системы:

$$\sum_{i=1}^{11} X_i = 5711$$

$$\sum_{i=1}^{11} Y_i = 2396$$

$$\sum_{i=1}^{11} X_i^2 = 3134543$$

$$\sum_{i=1}^{11} X_i Y_i = 1296836$$

Система (9.2.5) принимает вид:

$$\begin{cases} 2396 = 11\hat{\alpha} + 5711\hat{\beta}, \\ 1296836 = 5711\hat{\alpha} + 3134543\hat{\beta}, \end{cases}$$

Решением ее будут параметры $\hat{\alpha} = 55,85$; $\hat{\beta} = 0,312$. Следовательно, оценочное уравнение запишется: $\hat{Y} = 55,85 + 0,312X$.

i	1	2	3	4	5	6	
$y = Y - \bar{Y}$	51,8	64,8	40,8	16,8	1,8	9,8	,2
$x = X - \bar{X}$	167,2	146,2	108,2	78,2	57,2	29,2	,8

Если же мы хотим применять формулы, то нужно предварительно вычислить x_i и y_i (см. таблицу). Далее, подставляя эти значения в упомянутые формулы, находим

$$\hat{\beta} = \frac{52876,36}{169495,64} = 0,312$$

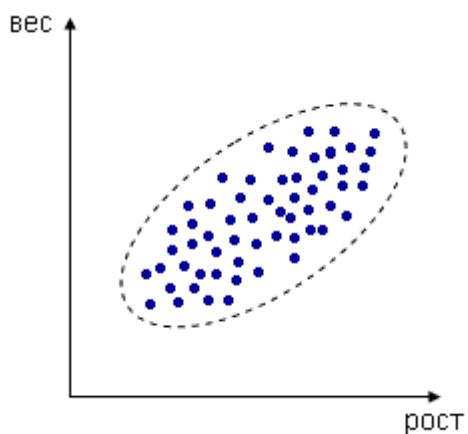
$$\hat{\alpha} = 217,818 - (0,31196) \times (519,182) = 55,85$$

Тема 13. Корреляционный анализ

Корреляционный анализ - метод, позволяющий обнаружить зависимость между несколькими случайными величинами.

Допустим, проводится независимое измерение различных параметров у одного типа объектов. Из этих данных можно получить качественно новую информацию - о взаимосвязи этих параметров.

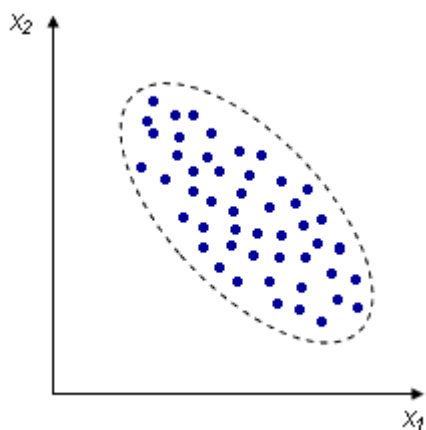
Например, измеряем рост и вес человека, каждое измерение представлено точкой в двумерном пространстве:



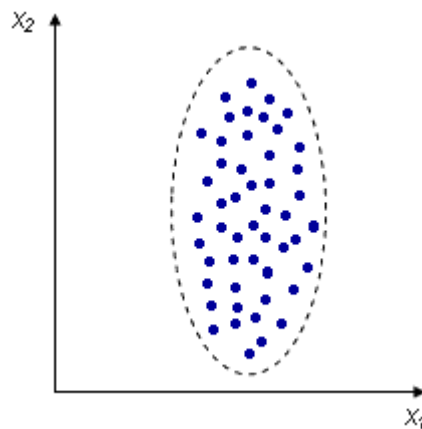
Несмотря на то, что величины носят случайный характер, в общем наблюдается некоторая зависимость - величины коррелируют.

В данном случае это положительная корреляция (при увеличении одного параметра второй тоже увеличивается). Возможны также такие случаи:

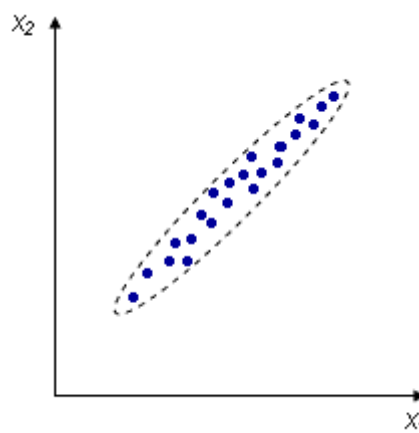
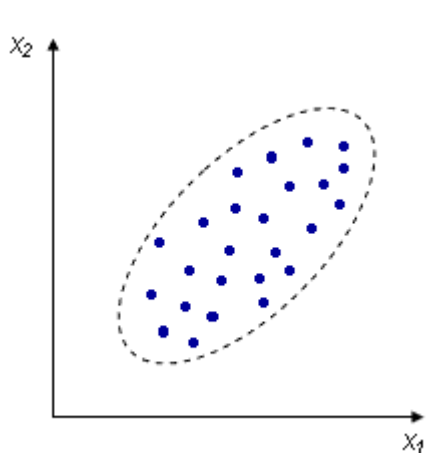
Отрицательная корреляция:



Отсутствие корреляции:



Взаимосвязь между переменными необходимо охарактеризовать численно, чтобы, например, различать такие случаи:



Для этого вводится коэффициент корреляции. Он рассчитывается следующим образом:

Есть массив из n точек $\{x_{1,i}, x_{2,i}\}$

Рассчитываются средние значения для каждого параметра: $\bar{x}_1 = \frac{\sum x_{1,i}}{n}$, $\bar{x}_2 = \frac{\sum x_{2,i}}{n}$

$$r = \frac{\sum (x_{1,i} - \bar{x}_1) \cdot (x_{2,i} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum (x_{1,i} - \bar{x}_1)^2} \cdot \sqrt{\sum (x_{2,i} - \bar{x}_2)^2}}$$

И коэффициент корреляции:

r изменяется в пределах от -1 до 1. В данном случае это линейный коэффициент корреляции, он показывает линейную взаимосвязь между x_1 и x_2 : r равен 1 (или -1), если связь линейна.

Коэффициент r является случайной величиной, поскольку вычисляется из случайных величин. Для него можно выдвигать и проверять следующие гипотезы:

1. Коэффициент корреляции значимо отличается от нуля (т.е. есть взаимосвязь между величинами):

Тестовая статистика вычисляется по формуле:

$$\xi = \left(0.5 \cdot \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right) - \frac{|r|}{2(n-1)} \right) \sqrt{n-3}$$

и сравнивается с табличным значением коэффициента Стьюдента $t(p = 0.95, f = \infty) = 1.96$

Если тестовая статистика больше табличного значения, то коэффициент значимо отличается от нуля. По формуле видно, что чем больше измерений n , тем лучше (больше тестовая статистика, вероятнее, что коэффициент значимо отличается от нуля)

2. Отличие между двумя коэффициентами корреляции значимо:

Тестовая статистика:

$$\xi = 0.5 \cdot \ln \left(\frac{(1+r_1)(1-r_2)}{(1-r_1)(1+r_2)} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}}$$

Также сравнивается с табличным значением $t(p, \infty)$

Методами корреляционного анализа решаются следующие задачи:

- 1) Взаимосвязь. Есть ли взаимосвязь между параметрами?
- 2) Прогнозирование. Если известно поведение одного параметра, то можно предсказать поведение другого параметра, коррелирующего с первым.
- 3) Классификация и идентификация объектов. Корреляционный анализ помогает подобрать набор независимых признаков для классификации.

Тема 14. Временные ряды

Для характеристики и анализа различных социально-экономических явлений за определенный период применяют показатели и методы, характеризующие эти процессы во времени.

Под временным рядом будем понимать последовательность значений объясняемой переменной, соответствующей возрастающей последовательности моментов времени:

$$\{y_t\}, t = 1, 2, \dots, T.$$

Можно выделить две основные цели анализа временных рядов: определение природы ряда (выделение детерминированной и случайной составляющих, оценка их параметров) и использование полученных оценок для целей прогнозирования.

К основным этапам анализа временного ряда можно отнести:

- графическое представление временного ряда;
- выделение и удаление детерминированных составляющих временного ряда (тренд, сезонность, циклические составляющие);
- сглаживание (устранение выбросов временного ряда);
- исследование случайной составляющей временного ряда;
- прогнозирование развития рассматриваемого процесса на основе имеющегося временного ряда.

Временные ряды могут включать в себя несколько составляющих, которые с экономической точки зрения несут разную содержательную нагрузку:

Тренд – долгосрочная тенденция динамики показателя:

линейный	$y_t = a + b \cdot t$
экспоненциальный	$y_t = a \cdot k^t$
гиперболический	$y_t = a + b/t$
степенной	$y_t = a \cdot t^b$
полиномиальный	$y_t = a + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + \dots + b_m \cdot t^m$
логарифмический	$y_t = a + b \cdot \log t$
логистический	$y_t = \frac{1}{e^{a+b \cdot t} + 1}; y_t = \frac{y_{max} - y_{min}}{e^{a+b \cdot t} - 1} + y_{min}$

В экономике достаточно часто с помощью трендов описывают следующие процессы:

- технологическое и экономическое развитие;
- потребление и изменение его структуры;
- изменение демографической ситуации и др.

Линейный тип тренда подходит для отображения тенденции примерно равномерного изменения уровней: равных в среднем величин абсолютного прироста или абсолютного сокращения уровней за равные промежутки времени. Причина близкого к равномерному изменению абсолютного прироста (сокращения) заключается во влиянии

разнонаправленных и разноускоренных сил факторов, которые взаимно усредняются, частично взаимно погашаются, а равнодействующая их влияния приобретает их характер, близкий к равномерному. Таким образом, равномерная динамика становится результатом сложения влияния большого количества факторов на изменение исследуемого показателя.

Экспоненциальным трендом называют тренд, который выражается следующим уравнением $y_t = a \cdot k^t$, где k – постоянный темп изменения уровней:

- если $k > 1$, то имеется тренд с возрастающими уровнями, причём это возрастание не просто ускоренное, а с возрастающим ускорением и возрастающими производными более высоких порядков;

- если $k < 1$, то имеется тренд, выражающий тенденцию постоянного, но замедляющегося сокращения уровней, причём замедление непрерывно усиливается.

a – свободный член экспоненты равен выровненному уровню, то есть уровню тренда в момент, принятый за начало отсчёта времени (при $t = 0$).

Экспоненциальный тренд характерен процессам, развивающимся в среде, не создающей никаких ограничений для роста уровней.

Гиперболическим трендом называют тренд, который выражается уравнением $y_t = a + b/t$, где

a – свободный член гиперболы, предел, к которому стремится уровень ряда;

b – основной параметр гиперболы:

- если $b > 0$, то этот тренд выражает тенденцию замедляющегося снижения уровней и при $t \rightarrow \infty, y_t \rightarrow a$;

- если $b < 0$, то с течением времени, уровни тренда возрастают и стремятся к величине a при $t \rightarrow \infty$.

Степенные тренды используются, когда данные состоят из результатов измерений, значения которых плавно увеличиваются с нарастающей скоростью. При этом данные не могут содержать нулевых и отрицательных значений.

Полиномиальный тренд описывает данные, плавно изменяющиеся в разных направлениях. При использовании полиномиального тренда пользователю всегда необходимо задать порядок полинома.

Если $m = 2$, то получаем параболический тренд. Тренд в форме параболы применяют для отражения тенденций динамики, для которых на некотором, обычно непродолжительном, этапе развития свойственно примерно постоянное ускорение абсолютных изменений уровней.

Уравнение логарифмического тренда применяют в том случае, когда исследуемый процесс приводит к замедлению роста показателя, но при этом рост не прекращается, а

стремится к какому-либо ограниченному пределу. В этом случае гиперболическая форма тренда или парабола с отрицательным ускорением не подходят. В логарифмическом тренде величины ускорения абсолютных изменений имеют знак, противоположный знаку самих абсолютных изменений, а по модулю постепенно уменьшаются.

Логарифмический тренд, как и гиперболический, отражает постепенно затухающий процесс изменений. Однако эти тренды имеют существенное различие: затухание по гиперболе происходит быстро при приближении к конечному пределу, а при логарифмическом тренде затухающий процесс продолжается без ограничения гораздо медленнее.

Логистическая форма тренда подходит для описания процесса, при котором изучаемый показатель проходит полный цикл развития, начиная, как правило, от нулевого уровня, сначала медленно, но с ускорением возрастая, затем ускорение становится нулевым в середине цикла, затем, в завершающей части цикла, рост замедляется по гиперболе по мере приближения к предельному значению показателя.

Логистическую тенденцию можно считать объединением трёх разных по типу тенденций: параболической с ускоряющимся ростом на первом этапе, линейной - на втором и гиперболической с замедляющимся ростом - на третьем этапе. Однако рассмотрение таких временных рядов как проявления единой логистической тенденции позволяет уже на первом этапе рассчитать всю траекторию развития, определить сроки перехода от ускоренного роста к замедленному, что чрезвычайно важно при планировании производства или реализации нового вида товара, спрос на который будет проходить все этапы логистической тенденции вплоть до насыщения рынка.

При выборе уравнения тренда необходимо руководствоваться принципом простоты, который заключается в выборе из нескольких типов трендов более близкого к эмпирическим данным, наиболее точно отражающего динамику исходного временного ряда, при этом следует выбирать более простую функциональную зависимость. Обоснованно это ещё и тем, что чем сложнее уравнение линии тренда и чем большее число параметров оно содержит, тем при равной степени приближения труднее дать надёжную оценку этих параметров.

Сезонность – строго периодические и связанные с календарным периодом отклонения от тренда:

▪ аддитивная сезонность – амплитуда сезонных колебаний не имеет ярко выраженной тенденции к изменению во времени
 $y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$ (T_t - трендовая составляющая ряда y_t , S_t – сезонная составляющая ряда y_t , ε_t - случайная ошибка).

▪ мультипликативная сезонность – амплитуда сезонных колебаний имеет выраженную тенденцию к изменению во времени
 $y_t = T_t \cdot S_t \cdot \varepsilon_t$ (T_t - трендовая составляющая ряда y_t , S_t – сезонная составляющая ряда y_t , ε_t – случайная ошибка).

Выбросы – резко выделяющиеся наблюдения.

Циклические колебания – всё, что остаётся от временного ряда после исключения трендов, сезонности и выбросов. Чаще всего циклы связаны с флуктуацией экономической активности. Циклические колебания временных рядов экономических показателей отражает периоды роста и спада экономической активности различной амплитуды и продолжительности.

Тема 15. Теория массового обслуживания

Наряду с другими экономико-математическими методами в экономическом анализе используется теория массового обслуживания. Она применяется, в частности, в розничной торговле при анализе количества обслуживаемых покупателей и продолжительности их обслуживания (при условии высокого качества их обслуживания). На эти показатели оказывают влияние различные факторы (переменные величины). Они взаимодействуют между собой в условиях процесса обслуживания покупателей, носящего стохастический характер.

На основе теории массового обслуживания выбирается оптимальный вариант организации торгового обслуживания населения, обеспечивающий минимальное время обслуживания при минимизации затрат и высоком качестве обслуживания населения.

Рассматриваемая теория находит применение и в других отраслях экономики. Теория массового обслуживания заключается в том, что на базе теории вероятностей выводятся математические методы анализа процессов массового обслуживания, а также методы оценки качества работы обслуживающих систем.

При всем своём разнообразии процессы в системах массового обслуживания имеют общие черты:

Требование на обслуживание не регулярно случайно поступает на канал обслуживания и в зависимости от его занятости, продолжительности обслуживания образуют очередь требований.

Теория массового обслуживания изучает статистические закономерности поступления. И на этой основе вырабатывает решения, то есть такие характеристики системы обслуживания, при которых затраты времени на ожидание в очереди и на простой каналов обслуживания были бы наименьшими. (если мало каналов обслуживания — то образуются большие очереди, и наоборот, если много каналов обслуживания, то очередей нет, но при этом каналы обслуживания работают не рационально, так как часть из них простаивает без работы).

Теория массового обслуживания — это прикладная область теории случайных процессов.

Предметом исследования теории массового обслуживания являются вероятностные модели физических систем обслуживания, в которых случайные и не случайные моменты времени возникают заявки на обслуживание и имеются устройства на обработку данных заявок.

Теория массового обслуживания целиком базируется на теории вероятности и на математической статистике. В определенной степени она связана с распределением Пуассона, которое описывает вероятность числа появлений в заданном интервале времени какого-либо события. Например, появление покупателя у прилавка, если известно, что появление события зависит от того давно ли оно появлялось в последний раз и сколько раз и когда именно случалось до этого.