ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 4 (491)

УДК 517.929

Ю.Ф. ДОЛГИЙ, В.С. ТАРАСЯН

УСЛОВИЯ КОНЕЧНОМЕРНОСТИ ОПЕРАТОРА МОНОДРОМИИ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

1. Введение

Линейная периодическая система дифференциальных уравнений с последействием описывается следующим образом:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-r}^{0} d_s\eta(t,s)x(t+s), \quad t \in R^+ = [0,+\infty). \tag{1.1}$$

Матричная функция $\eta : (-\infty,+\infty) \times [-r,0] \to R^{n\times n}$ является ω-периодической по первому аргументу и измеримой по Лебегу на множестве $[0,\omega] \times [-r,0]$, $\eta(\cdot,0) = 0$, $\omega > r > 0$. Для почти всех $t \in [0,\omega]$ существует конечная вариация $V(t) = \mathrm{Var}_{[-r,0]}\,\eta(t,\cdot)$ и функция V интегрируема на $[0,\omega]$.

При указанных выше условиях система дифференциальных уравнений с последействием (1.1) для начального момента $t_0 = 0$ и произвольной начальной функции $\varphi \in C([-r,0],R^n)$ имеет единственное решение ([1], с. 173). Введем для него обозначение $x(t,\varphi)$, $t \geq -r$. Здесь выполняется условие $x(t,\varphi) = \varphi(t)$ при $t \in [-r,0]$. Качественное поведение решений системы дифференциальных уравнений с последействием (1.1) удобно описывать в функциональном пространстве состояний $C([-r,0],R^n)$. При этом эволюция функциональных элементов x_t ($x_t(s) = x(t+s)$, $s \in [-r,0]$), $t \geq 0$ ([2], с. 157; [3]) этого пространства описывается дифференциальным уравнением с неограниченным оператором. Решение последнего уравнения, отвечающее начальному моменту $t_0 = 0$ и начальному значению $x_0 = \varphi$, обозначим через $x_t(\varphi)$ ($x_t(\varphi)(s) = x(t+s,\varphi)$, $s \in [-r,0]$), $t \geq 0$.

Оператор монодромии определяется формулой $U\varphi = x_\omega(\varphi)$, действует в пространстве $C([-r,0],R^n)$ и является вполне непрерывным ([1], с. 228). Его область значений принадлежит пространству векторнозначных функций, абсолютно непрерывных на отрезке $[-\omega,0]$, имеющих ограниченные в существенном производные на этом отрезке. Используя формулу общего решения системы дифференциальных уравнений с последействием ([1], с. 180), находим представление оператора монодромии

$$(U\varphi)(\vartheta) = V(\omega+\vartheta,0)\varphi(0) + \int_{-r}^{-0} d_\beta\Big(\int_0^{\omega+\vartheta} V(\omega+\vartheta,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha\Big)\varphi(\beta), \quad \vartheta \in [-r,0]. \tag{1.2}$$

Здесь матричная функция $V(\cdot,\cdot)$ локально абсолютно непрерывна по первому аргументу t на полуинтервале $[\alpha,+\infty)$ при каждом фиксированном значении второго аргумента $\alpha \in [0,+\infty)$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00145, и Министерства образования Российской Федерации, грант № Е 00-10-91.

имеет конечную вариацию по второму аргументу α на отрезке $[0,t]$ при каждом фиксированном значении первого аргумента $t\in(0,+\infty)$, удовлетворяет матричным уравнениям

$$\frac{\partial V(t,\alpha)}{\partial t}=\int_{-r}^{0}d_\tau\eta(t,\tau)V(t+\tau,\alpha),\quad 0\le\alpha\le t<\infty, \tag{1.3}$$

$$V(t,\alpha)=I_n-\int_{\alpha}^{t}V(t,\tau)\eta(\tau,\alpha-\tau)d\tau,\quad 0\le\alpha\le t<\infty, \tag{1.4}$$

и начальным условиям $V(t,\alpha)=0$ при $\alpha-r\le t<\alpha$, $V(\alpha,\alpha)=I_n$, $\alpha\in R^+$. Здесь I_n — единичная матрица размерности $n\times n$. В (1.2) и (1.4) с помощью равенств $\eta(\cdot,\tau)=\eta(\cdot,-r)$ и $\eta(\cdot,\tau)=0$ доопределены значения функции η при $-\infty<\tau<-r$ и $0\le\tau<+\infty$ соответственно.

Устойчивость периодических систем с последействием описывается в терминах оператора монодромии ([1], с. 233). Проблема нахождения спектра этого оператора и проблема Рауса–Гурвица (случай единичного круга) для спектра оператора монодромии относятся к классу трудных задач теории дифференциальных уравнений с последействием [4]. В данной работе в случае $0<r<\omega$ описан специальный класс периодических систем с последействием, для которых операторы монодромии конечномерны. Случай $r=\omega$ изучался в [5]. Рассматриваемый класс периодических систем дифференциальных уравнений с последействием и с конечномерными операторами монодромии содержит класс систем дифференциальных уравнений, изучавшийся в [6]. Он может быть использован при описании математических моделей импульсных систем с амплитудно-импульсной модуляцией [7]. В задачах устойчивости периодических режимов в нелинейных динамических моделях с кусочно-постоянными аргументами [8], [9] требуется исследовать рассматриваемые в данной работе системы дифференциальных уравнений.

2. Условия конечномерности

Оператор монодромии действует в пространстве $C([-r,0],R^n)$, и его представление задается формулой (1.2). Для описания условий конечномерности этого оператора введем

Определение. Матричная функция $f:[a,b]\times[c,d)\to R^{n\times n}$ называется вырожденной, если существует натуральное число N и набор матричных функций $f_j^1:[a,b]\to R^{n\times n}$, $f_j^2:[c,d)\to R^{n\times n}$, $1\le j\le N$, таких, что справедливо представление

$$f(t,s)=\sum_{j=1}^{N}f_j^1(t)f_j^2(s),\quad t\in[a,b],\quad s\in[c,d).$$

Введем матричную функцию $f:[\omega-r,\omega]\times[-r,0)\to R^{n\times n}$ с помощью формулы

$$f(t,\beta)=\eta(t,\beta-t)+\int_0^{\omega-r}\eta(t,\tau-t)\int_0^{\tau}G(\tau,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha\, d\tau-$$
$$-\int_0^{\omega-r}\eta(t,\tau-t)\eta(\tau,\beta-\tau)d\tau,\quad t\in[\omega-r,\omega],\quad \beta\in[-r,0), \tag{2.1}$$

где G является резольвентным ядром, определяющим решение ([10], с. 45)

$$x(\alpha)=y(\alpha)-\int_{\alpha}^{\omega-r}y(\tau)G(\tau,\alpha)d\tau,\quad 0\le\alpha\le\omega-r,$$

интегрального уравнения Вольтерра 2 рода

$$x(\alpha)=y(\alpha)-\int_{\alpha}^{\omega-r}x(\tau)\eta(\tau,\alpha-\tau)d\tau,\quad 0\le\alpha\le\omega-r.$$

Матричная функция G удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра 2 рода ([10], с. 54)

$$G(\tau,\alpha)=\eta(\tau,\alpha-\tau)-\int_{\alpha}^{\tau}\eta(\tau,s-\tau)G(s,\alpha)ds,\quad 0\le\alpha\le\tau\le\omega-r. \tag{2.2}$$

Подчеркнем, что функция f определяется полностью заданием функции η.

Теорема. *Пусть матричная функция η является ω-периодической по первому аргументу, измеримой по Лебегу на множестве $[0,\omega]\times[-r,0]$ $(\omega > r)$, $\eta(\cdot,s)=0$ при $s\geq 0$ и $\eta(\cdot,s)=\eta(\cdot,-r)$ при $s\leq -r$. Для почти всех $t\in[0,\omega]$ существует конечная вариация $V(t)=\operatorname{Var}_{[-r,0]}\eta(t,\cdot)$ и функция V интегрируема на $[0,\omega]$. Тогда для конечномерности оператора монодромии, действующего в пространстве $C([-r,0],R^n)$, необходимо и достаточно, чтобы матричная функция f, определяемая формулой (2.1), была вырожденной.*

Доказательство. Необходимость. Пусть оператор монодромии конечномерен и второе слагаемое в (1.2) допускает представление

$$\sum_{j=1}^{N} W_j(\vartheta)f_j(\varphi), \quad \vartheta\in[-r,0],$$

где $W_j:[-r,0]\to R^{n\times n}$ $(1\leq j\leq N)$ — абсолютно непрерывные матричные функции, $f_j: C([-r,0],R^n)\to R^n$ — непрерывные отображения, описываемые формулами

$$f_j(\varphi)=\int_{-r}^{-0} d\psi_j(\beta)\varphi(\beta) \quad (1\leq j\leq N),$$

где $\psi_j:[-r,0]\to R^{n\times n}$ — матричные функции с ограниченным изменением. Тогда для любой функции $\varphi\in C([-r,0],R^n)$ справедливо равенство

$$\int_{-r}^{-0} d_\beta\Big(\int_0^{\omega+\vartheta} V(\omega+\vartheta,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha\Big)\varphi(\beta)=\sum_{j=1}^{N} W_j(\vartheta)\int_{-r}^{-0} d\psi_j(\beta)\varphi(\beta), \quad \vartheta\in[-r,0],$$

из которого следует, что матричная функция

$$\int_0^{\omega+\vartheta} V(\omega+\vartheta,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha, \quad \vartheta\in[-r,0], \quad \beta\in[-r,0), \tag{2.3}$$

является вырожденной. Полагая $\omega+\vartheta=t$, находим, что функция

$$F(t,\beta)=\int_0^{t} V(t,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha, \quad t\in[\omega-r,\omega], \quad \beta\in[-r,0), \tag{2.4}$$

является вырожденной. Требуется описать условия вырожденности функции F в терминах функции η. С этой целью правые части выражений (2.4) и (1.4) представим следующим образом:

$$F(t,\beta)=\int_0^{\omega-r} V(t,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha+\int_{\omega-r}^{t} V(t,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha, \tag{2.5}$$

$$V(t,\alpha)=I_n-\int_\alpha^{\omega-r} V(t,\tau)\eta(\tau,\alpha-\tau)d\tau-\int_{\omega-r}^{t} V(t,\tau)\eta(\tau,\alpha-\tau)d\tau, \tag{2.6}$$

$$t\in[\omega-r,\omega], \quad \beta\in[-r,0), \quad \alpha\in[0,\omega-r].$$

Решение интегрального уравнения (2.6) имеет вид

$$V(t,\alpha)=I_n-\int_{\omega-r}^{t} V(t,\tau)\eta(\tau,\alpha-\tau)d\tau-\int_\alpha^{\omega-r} G(\tau,\alpha)d\tau+$$
$$+\int_\alpha^{\omega-r}\int_{\omega-r}^{t} V(t,s)\eta(s,\tau-s)ds G(\tau,\alpha)d\tau, \quad 0\leq\alpha\leq\omega-r\leq t\leq\omega. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в (2.5), находим

$$F(t,\beta)=\int_0^{\omega-r}\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha-\int_0^{\omega-r}\int_\alpha^{\omega-r}G(\tau,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\tau d\alpha+$$
$$+\int_0^{\omega-r}\int_\alpha^{\omega-r}x(t,\tau)G(\tau,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\tau d\alpha+x(t,\beta)-$$
$$-\int_0^{\omega-r}x(t,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha,\quad t\in[\omega-r,\omega],\quad \beta\in[-r,0),$$

где функция $x:[\omega-r,\omega]\times[-r,\omega-r]\to R^{n\times n}$ определяется формулой

$$x(t,\alpha)=\int_{\omega-r}^t V(t,\tau)\eta(\tau,\alpha-\tau)d\tau,\quad t\in[\omega-r,\omega],\quad \alpha\in[-r,\omega-r]. \tag{2.8}$$

Из вырожденности функции F следует вырожденность функции

$$F_1(t,\beta)=x(t,\beta)+\int_0^{\omega-r}x(t,\tau)\int_0^\tau G(\tau,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha\,d\tau-$$
$$-\int_0^{\omega-r}x(t,\tau)\eta(\tau,\beta-\tau)d\tau,\quad t\in[\omega-r,\omega],\quad \beta\in[-r,0), \tag{2.9}$$

т. к. разность функций $F(t,\beta)-F_1(t,\beta)$ зависит только от аргумента β. Используя формулы (2.8) и (2.9), определяющие функции x и F_1, находим

$$F_1(t,\beta)=\int_{\omega-r}^t V(t,\tau)f(\tau,\beta)d\tau,\quad \beta\in[-r,0),\quad t\in[\omega-r,\omega], \tag{2.10}$$

где

$$f(\tau,\beta)=\eta(\tau,\beta-\tau)+\int_0^{\omega-r}\eta(\tau,\alpha-\tau)G_1(\alpha,\beta)d\alpha, \tag{2.11}$$

$$G_1(\tau,\beta)=\int_0^\tau G(\tau,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha-\eta(\tau,\beta-\tau), \tag{2.12}$$

$-r\le\beta<0$, $\omega-r\le\tau\le t\le\omega$. Из (2.10) и дифференцируемости по t функции V следует дифференцируемость по t функции F_1. Ее производная определяется формулой

$$\frac{\partial F_1(t,\beta)}{\partial t}=f(t,\beta)+\int_{\omega-r}^t\frac{\partial V(t,\tau)}{\partial t}f(\tau,\beta)d\tau, \tag{2.13}$$

где $\beta\in[-r,0)$, $t\in[\omega-r,\omega]$, и является вырожденной функцией. При фиксированном значении β равенство (2.13) является уравнением Вольтерра 2 рода для функции f и его решение определяется формулой

$$f(t,\beta)=\frac{\partial F_1(t,\beta)}{\partial t}-\int_{\omega-r}^t\Gamma(t,s)\frac{\partial F_1(s,\beta)}{\partial s}ds, \tag{2.14}$$

где $t\in[\omega-r,\omega]$, $\beta\in[-r,0)$, Γ — резольвентное ядро рассматриваемого интегрального уравнения (2.13). Из (2.14) следует, что функция f является вырожденной. Подставляя (2.12) в (2.11), получим, что представление функции f, определяемое формулами (2.12) и (2.11), совпадает с представлением (2.1). Необходимость доказана.

Достаточность. Из (2.1) находим

$$\eta(t,\beta-t)=f(t,\beta)-\int_0^{\omega-r}\eta(t,\tau-t)\int_0^\tau G(\tau,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha\,d\tau+$$
$$+\int_0^{\omega-r}\eta(t,\tau-t)\eta(\tau,\beta-\tau)d\tau,\quad t\in[\omega-r,\omega],\quad \beta\in[-r,0), \tag{2.15}$$

где f — вырожденная функция. Подставляя (2.15) в (2.5) и убирая вырожденное слагаемое, получим

$$F'(t,\beta)=\int_0^{\omega-r}V(t,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha+\int_{\omega-r}^{t}V(t,\alpha)\int_0^{\omega-r}\eta(\alpha,\tau-\alpha)\eta(\tau,\beta-\tau)d\tau\,d\alpha-$$
$$-\int_{\omega-r}^{t}V(t,\alpha)\int_0^{\omega-r}\eta(\alpha,\tau-\alpha)\int_0^{\tau}G(\tau,\xi)\eta(\xi,\beta-\xi)d\xi\,d\tau\,d\alpha,\quad (2.16)$$

где $t\in[\omega-r,\omega]$, $\beta\in[-r,0)$. Используя интегральное уравнение (1.4),

$$\int_{\omega-r}^{t}V(t,\alpha)\eta(\alpha,\tau-\alpha)d\alpha=I_n-V(t,\tau)-\int_{\tau}^{\omega-r}V(t,\alpha)\eta(\alpha,\tau-\alpha)d\alpha,$$
$$0\le\tau\le\omega-r\le t\le\omega,$$

преобразуем третье слагаемое в формуле (2.16)

$$F_3'=\int_{\omega-r}^{t}V(t,\alpha)\int_0^{\omega-r}\eta(\alpha,\tau-\alpha)\int_0^{\tau}G(\tau,\xi)\eta(\xi,\beta-\xi)d\xi\,d\tau\,d\alpha=$$
$$=\int_0^{\omega-r}\int_0^{\tau}G(\tau,\xi)\eta(\xi,\beta-\xi)d\xi d\tau-\int_0^{\omega-r}V(t,\tau)\int_0^{\tau}G(\tau,\xi)\eta(\xi,\beta-\xi)d\xi\,d\tau-$$
$$-\int_0^{\omega-r}\int_{\tau}^{\omega-r}V(t,\alpha)\eta(\alpha,\tau-\alpha)d\alpha\int_0^{\tau}G(\tau,\xi)\eta(\xi,\beta-\xi)d\xi\,d\tau,\quad (2.17)$$

где $t\in[\omega-r,\omega]$, $\beta\in[-r,0)$. В представлении (2.17) преобразуем третье слагаемое

$$F_3''=\int_0^{\omega-r}\int_{\tau}^{\omega-r}\int_0^{\tau}V(t,\alpha)\eta(\alpha,\tau-\alpha)G(\tau,\xi)\eta(\xi,\beta-\xi)d\xi\,d\alpha\,d\tau=$$
$$=\int_0^{\omega-r}\int_0^{\alpha}V(t,\alpha)\int_{\xi}^{\alpha}\eta(\alpha,\tau-\alpha)G(\tau,\xi)d\tau\,\eta(\xi,\beta-\xi)d\xi\,d\alpha,\quad (2.18)$$

где $t\in[\omega-r,\omega]$, $\beta\in[-r,0)$. Используя уравнение (2.2), преобразуем выражение (2.18)

$$F_3''=\int_0^{\omega-r}\int_0^{\alpha}V(t,\alpha)\eta(\alpha,\xi-\alpha)\eta(\xi,\beta-\xi)d\xi\,d\alpha-$$
$$-\int_0^{\omega-r}\int_0^{\alpha}V(t,\alpha)G(\alpha,\xi)\eta(\xi,\beta-\xi)d\xi\,d\alpha,\quad t\in[\omega-r,\omega],\quad \beta\in[-r,0).\quad (2.19)$$

Заменяя в (2.17) третье слагаемое F_3'' выражением (2.19), получим

$$F_3'=\int_0^{\omega-r}\int_0^{\tau}G(\tau,\xi)\eta(\xi,\beta-\xi)d\xi\,d\tau-$$
$$-\int_0^{\omega-r}\int_0^{\alpha}V(t,\alpha)\eta(\alpha,\xi-\alpha)\eta(\xi,\beta-\xi)d\xi\,d\alpha,\quad t\in[\omega-r,\omega],\quad \beta\in[-r,0).$$

Заменяя в (2.16) третье слагаемое F_3' полученным выражением и убирая вырожденное слагаемое, находим

$$F''(t,\beta)=\int_0^{\omega-r}V(t,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha+\int_{\omega-r}^{t}V(t,\alpha)\int_0^{\omega-r}\eta(\alpha,\tau-\alpha)\eta(\tau,\beta-\tau)d\tau\,d\alpha+$$
$$+\int_0^{\omega-r}\int_0^{\alpha}V(t,\alpha)\eta(\alpha,\tau-\alpha)\eta(\tau,\beta-\tau)d\tau\,d\alpha=$$
$$=\int_0^{\omega-r}V(t,\tau)\eta(\tau,\beta-\tau)d\tau+\int_0^{\omega-r}\int_{\omega-r}^{t}V(t,\alpha)\eta(\alpha,\tau-\alpha)\eta(\tau,\beta-\tau)d\alpha\,d\tau+$$
$$+\int_0^{\omega-r}\int_{\tau}^{\omega-r}V(t,\alpha)\eta(\alpha,\tau-\alpha)\eta(\tau,\beta-\tau)d\alpha\,d\tau=$$

$$= \int_0^{\omega-r}\left[V(t,\tau)+\int_\tau^t V(t,\alpha)\eta(\alpha,\tau-\alpha)d\alpha\right]\eta(\tau,\beta-\tau)d\tau.$$

Используя интегральное уравнение (1.2), находим

$$F''(t,\beta)=\int_0^{\omega-r}\eta(\tau,\beta-\tau)d\tau,$$

т.е. F'' — вырожденная функция, что завершает доказательство достаточности. □

Введем функцию $\eta_1 : [0,\omega]\times[-r,\omega-r]\to R^{n\times n}$ с помощью формулы

$$\eta_1(t,\tau)=\eta(t,\tau-t),\quad t\in[0,\omega],\quad \tau\in[-r,\omega-r].$$

Замечание 1. Для вырожденности функции (2.1) достаточно, чтобы сужение функции η_1 на множество $[0,\omega-r]\times[-r,0)$ при $\omega\ge 2r$ или сужение функции η_1 на множество $[0,\omega]\times[-r,0)$ при $\omega<2r$ были вырожденными функциями.

Замечание 2. Для вырожденности функции (2.1) достаточно, чтобы сужение функции η_1 на множество $[\omega-r,\omega]\times[0,\omega-r)$ при $\omega\ge 2r$ или сужение функции η_1 на множество $[\omega-r,\omega]\times[-r,\omega-r)$ при $\omega<2r$ были вырожденными функциями.

В предельном случае $r\to\omega$ достаточные условия вырожденности функции (2.1), приведенные в замечаниях 1 и 2, т. е. конечномерности оператора монодромии, совпадают с необходимыми и достаточными условиями конечномерности оператора монодромии, которые получены в [5].

Специально отметим, что в определении функции (2.1) функция η должна удовлетворять условиям $\eta(\cdot,s)=0$ при $s\ge 0$, $\eta(\cdot,s)=\eta(\cdot,-r)$ при $s\le -r$. Эти дополнительные требования затрудняют реализацию условий теоремы.

3. Реализация условий конечномерности оператора монодромии

Рассмотрим возможности реализации условий теоремы и процедуры построения конечномерных операторов монодромии. Ограничимся изучением двух случаев.

1. Задается специальное вырожденное представление сужения отображения η_1 на множество $[0,\omega-r]\times[-r,0)$, определяемое формулой $\eta_1(t,\beta)=\sum\limits_{j=1}^{N}\eta_j^1(t)\eta_j^2(\beta)$, $t\in[0,\omega-r]$, $\beta\in[-r,0)$, где $\eta_j^1:[0,\omega-r]\to R^{n\times n}$ $(j=\overline{1,N})$ — интегрируемые по Лебегу функции, $\eta_j^2:[-r,0)\to R^{n\times n}$ $(j=\overline{1,N})$ — функции с конечным изменением. Чтобы удовлетворить дополнительным требованиям, накладываемым на функцию $\eta:\eta(\cdot,s)=0$ при $s\ge 0$ и $\eta(\cdot,s)=\eta(\cdot,-r)$ при $s\le -r$, выберем произвольное конечное разбиение полуинтервала

$$[-r,0)=\bigcup_{k=1}^{N+1}[\beta_{-k},\beta_{-k+1}),$$

где $-r=\beta_{-N-1}<\beta_{-N}<\cdots<\beta_{-1}<\beta_0=0$. Полагаем $\eta_j^2(\beta)=0$ при $\beta\in[-r,0)$, $\beta\notin[\beta_{-j},\beta_{-j+1})$, $j=\overline{1,N}$. Фиксируем натуральное k, для которого полуинтервал $[\beta_{-k},\beta_{-k+1})$ пересекается при некотором $t\in[0,\omega-r]$ с множеством $\{\beta:\beta-t\le -r\}$, т. е. $\beta_{-k}-t\le -r$. Требуем, чтобы $\eta_k^1(t)=0$ для выбранного k и всех $t\in[0,\omega-r]\bigcap[\beta_{-k}+r,\omega-r]$.

1a) Пусть $\omega\ge 2r$. Тогда $\eta(t,\beta-t)\equiv 0$ при $t\in[\omega-r,\omega]$, $\beta\in[-r,0)$. Из формулы (2.1) следует

$$f(t,\beta)=\sum_{j=1}^{N}\int_0^{\omega-r}\eta(t,\tau-t)\left[\int_0^\tau G(\tau,\alpha)\eta_j^1(\alpha)d\alpha-\eta_j^1(\tau)\right]d\tau\,\eta_j^2(\beta),$$

где $t\in[\omega-r,\omega]$, $\beta\in[-r,0)$, т. е. функция f вырождена. Используя (2.5), находим

$$F(t,\beta)=\int_0^{\omega-r}V(t,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha=\sum_{j=1}^{N}\int_0^{\omega-r}V(t,\alpha)\eta_j^1(\alpha)d\alpha\,\eta_j^2(\beta),$$

где $t \in [\omega - r, \omega]$, $\beta \in [-r, 0)$. Следовательно,

$$(U\varphi)(\vartheta) = V(\omega + \vartheta, 0)\varphi(0) + \int_{-r}^{-0} d_\beta F(\omega + \vartheta, \beta)\varphi(\beta) = \sum_{j=0}^{N} W_j(\vartheta) f_j(\varphi), \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Здесь

$$W_0(\vartheta) = V(\omega + \vartheta, 0), \quad W_j(\vartheta) = \int_0^{\omega - r} V(\omega + \vartheta, \alpha)\eta_j^1(\alpha)d\alpha, \quad \vartheta \in [-r, 0]; \tag{3.1}$$

$$f_0(\varphi) = \varphi(0), \quad f_j(\varphi) = \int_{-r}^{-0} d_\beta \eta_j^2(\beta)\varphi(\beta), \quad j = \overline{1, N}.$$

С помощью формул (3.1) продолжаем функции W_k, $k = \overline{0, N}$, на отрезок $[-\omega - r, 0]$. Из начальных условий для функции V имеем

$$W_0(-\omega) = I_n, \quad W_0(\vartheta) = 0, \quad W_j(-\omega) = W_j(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-\omega - r, -\omega), \ \ j = \overline{1, N}. \tag{3.2}$$

Из (1.3) следует, что функция W_0 на отрезке $[-\omega, 0]$ является решением уравнения

$$\frac{dW_0(\vartheta)}{d\vartheta} = \int_{-r}^{0} d_\tau \eta(\omega + \vartheta, \tau) W_0(\vartheta + \tau). \tag{3.3}$$

На отрезке $[-\omega, -r]$ для функции W_j ($j = \overline{1, N}$) справедливо равенство

$$\frac{dW_j(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta}\int_0^{\omega + \vartheta} V(\omega + \vartheta, \alpha)\eta_j^1(\alpha)d\alpha = \eta_j^1(\omega + \vartheta) + \int_0^{\omega + \vartheta} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, \alpha)}{\partial \vartheta}\eta_j^1(\alpha)d\alpha.$$

Используя (1.3), получим, что на отрезке $[-\omega, -r]$ функция W_j удовлетворяет уравнению

$$\frac{dW_j(\vartheta)}{d\vartheta} = \eta_j^1(\omega + \vartheta) + \int_{-r}^{0} d_\tau \eta(\omega + \vartheta, \tau) W_j(\vartheta + \tau).$$

На отрезке $[-r, 0]$ для функции W_j справедливо равенство

$$\frac{dW_j(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta}\int_0^{\omega - r} V(\omega + \vartheta, \alpha)\eta_j^1(\alpha)d\alpha = \int_0^{\omega - r} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, \alpha)}{\partial \vartheta}\eta_j^1(\alpha)d\alpha.$$

Используя (1.3), получим, что на отрезке $[-r, 0]$ функция W_j удовлетворяет уравнению

$$\frac{dW_j(\vartheta)}{d\vartheta} = \int_{-r}^{0} d_\tau \eta(\omega + \vartheta, \tau) W_j(\vartheta + \tau).$$

1б) Пусть $\omega < 2r$. Из формулы (2.1) находим

$$\eta(t, \beta - t) = f(t, \beta) - \sum_{j=1}^{N} \int_0^{\omega - r} \eta(t, \tau - t)\left[\int_0^{\tau} G(\tau, \alpha)\eta_j^1(\alpha)d\alpha - \eta_j^1(\tau)\right] d\tau \, \eta_j^2(\beta), \tag{3.4}$$

где $t \in [\omega - r, \omega]$, $\beta \in [-r, 0)$. Фиксируем $k = \overline{1, N}$, для которого $[\beta_{-k}, \beta_{-k+1})$ пересекается при некотором $t \in [\omega - r, \omega]$ с множеством $\{\beta : \beta - t \le -r\}$, т.е. $\beta_{-k} - t \le -r$. Требуем, чтобы $\eta(t, \beta - t) = 0$ при всех $t \in [\omega - r, \omega] \bigcap [\beta_{-k} + r, \omega]$, $\beta \in [\beta_{-k}, \beta_{-k+1})$. Находим

$$f(t, \beta) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^{\omega - r} \eta(t, \tau - t)\left[\int_0^{\tau} G(\tau, \alpha)\eta_j^1(\alpha)d\alpha - \eta_j^1(\tau)\right] d\tau \, \eta_j^2(\beta), \tag{3.5}$$

$$\beta \in [\beta_{-k}, \beta_{-k+1}), \quad t \in [\omega - r, \omega] \bigcap [\beta_{-k} + r, \omega], \quad k = \overline{1, N}.$$

Полагаем

$$f(t, \beta) = 0, \quad \beta \in [\beta_{-k}, \beta_{-k+1}), t \in [\omega - r, \omega] \bigcap (0, \beta_{-k} + r), \quad k = \overline{1, N},$$

$$f(t, \beta) = 0, \quad \beta \in [-r, \beta_{-N}), \quad t \in [\omega - r, \omega].$$

Построенная функция f является вырожденной. Согласно теореме оператор монодромии является конечномерным. Учитывая условия (3.4) и (3.5), находим

$$\eta(t,\beta-t)=0,\quad \beta\in[\beta_{-k},\beta_{-k+1}),\quad t\in[\omega-r,\omega]\bigcap[\beta_{-k}+r,\omega],\quad k=\overline{1,N},$$
$$\eta(t,\beta-t)=0,\quad \beta\in[-r,\beta_{-N}),\quad t\in[\omega-r,\omega],$$
$$\eta(t,\beta-t)=-\sum_{j=1}^{N}\int_0^{\omega-r}\eta(t,\tau-t)\Big[\int_0^{\tau}G(\tau,\alpha)\eta_j^1(\alpha)d\alpha-\eta_j^1(\tau)\Big]d\tau\eta_j^2(\beta),$$
$$\beta\in[\beta_{-k},\beta_{-k+1}),\quad t\in[\omega-r,\omega]\bigcap(0,\beta_{-k}+r),\quad k=\overline{1,N}.$$

При реализации условий теоремы в первом случае мы специальным образом определяем функцию $\eta:(t,s)\to R^{n\times n}$ в области $\{(t,s): t\in[0,\omega],\ s=\beta-t,\ \beta\in[-r,0)\}$. В области $\{(t,s): t\in[0,\omega],\ s=\beta-t,\ \beta\in[-r,\omega-r)\}$ функция η может выбираться произвольным образом с соблюдением требуемых в теореме условий гладкости и условий $\eta(\cdot,s)=0$ при $s\geq 0$, $\eta(\cdot,s)=\eta(\cdot,-r)$ при $s\leq -r$.

Используя (2.5), находим

$$F(t,\beta)=\sum_{j=1}^{N}\int_0^{\omega-r}V(t,\alpha)\eta_j^1(\alpha)d\alpha\,\eta_j^2(\beta)-\sum_{k=1}^{N}1(\beta_{-k}+2r-\omega)\int_{\omega-r}^{t}1(\beta_{-k}+r-\alpha)V(t,\alpha)\times$$
$$\times\int_0^{\omega-r}\eta(\alpha,\tau-\alpha)\Big[\int_0^{\tau}G(\tau,\xi)\eta_k^1(\xi)d\xi-\eta_k^1(\tau)\Big]d\tau\,d\alpha\,\eta_k^2(\beta),$$

где $t\in[\omega-r,\omega]$, $\beta\in[-r,0)$, $1(\cdot)$ — функция Хевисайда. Полученная функция порождает конечномерное представление оператора монодромии

$$(U\varphi)(\vartheta)=\sum_{j=0}^{N}W_j(\vartheta)f_j(\varphi),\quad \vartheta\in[-r,0].$$

Здесь

$$W_0(\vartheta)=V(\omega+\vartheta,0),\quad W_j(\vartheta)=\int_0^{\omega-r}V(\omega+\vartheta,\alpha)\eta_j^1(\alpha)d\alpha-$$
$$-1(\beta_{-j}+2r-\omega)\int_{\omega-r}^{\omega+\vartheta}1(\beta_{-j}+r-\alpha)V(\omega+\vartheta,\alpha)\times$$
$$\times\int_0^{\omega-r}\eta(\alpha,\tau-\alpha)\Big[\int_0^{\tau}G(\tau,\xi)\eta_j^1(\xi)d\xi-\eta_j^1(\tau)\Big]d\tau\,d\alpha,\quad \vartheta\in[-r,0];\tag{3.6}$$
$$f_0(\varphi)=\varphi(0),\quad f_j(\varphi)=\int_{-r}^{-0}d_\beta\eta_j^2(\beta)\varphi(\beta),\quad j=\overline{1,N}.$$

С помощью формул (3.6) функции W_j, $j=\overline{0,N}$, удовлетворяющие начальным условиям (3.2), продолжим на отрезок $[-\omega-r,0]$. Так же, как в случае 1a), устанавливаем, что функция W_0 на отрезке $[-\omega,0]$ является решением уравнения (3.3). На отрезке $[-\omega,-r]$ функция W_j описывается формулой

$$W_j(\vartheta)=\int_0^{\omega+\vartheta}V(\omega+\vartheta,\alpha)\eta_j^1(\alpha)d\alpha$$

и удовлетворяет уравнению

$$\frac{dW_j(\vartheta)}{d\vartheta}=\eta_j^1(\omega+\vartheta)+\int_{-r}^{0}d_\tau\eta(\omega+\vartheta,\tau)W_j(\vartheta+\tau),\quad j=\overline{1,N}.$$

На отрезке $[-r,0]$ для нее справедливо равенство

$$\frac{dW_j(\vartheta)}{d\vartheta}=\int_0^{\omega-r}\frac{\partial V(\omega+\vartheta,\alpha)}{\partial\vartheta}\eta_j^1(\alpha)d\alpha-1(\beta_{-j}+2r-\omega)1(\beta_{-j}+r-\omega-\vartheta)\times$$

$$\times \int_0^{\omega-r} \eta(\omega+\vartheta,\tau-\omega-\vartheta)\Big[\int_0^\tau G(\tau,\xi)\eta_j^1(\xi)d\xi-\eta_j^1(\tau)\Big]d\tau -$$

$$-1(\beta_{-j}+2r-\omega)\int_{\omega-r}^{\omega+\vartheta} 1(\beta_{-j}+r-\alpha)\frac{\partial V(\omega+\vartheta,\alpha)}{\partial\vartheta}\times$$

$$\times\int_0^{\omega-r}\eta(\alpha,\tau-\alpha)\Big[\int_0^\tau G(\tau,\xi)\eta_j^1(\xi)d\xi-\eta_j^1(\tau)\Big]d\tau d\alpha,\quad j=\overline{1,N},$$

откуда в силу (1.3)

$$\frac{dW_j(\vartheta)}{d\vartheta}=\int_{-r}^0 d_\tau\eta(\omega+\vartheta,\tau)W_j(\vartheta+\tau)-1(\beta_{-j}+2r-\omega)1(\beta_{-j}+r-\omega-\vartheta)\times$$

$$\times\int_0^{\omega-r}\eta(\omega+\vartheta,\tau-\omega-\vartheta)\Big[\int_0^\tau G(\tau,\xi)\eta_j^1(\xi)d\xi-\eta_j^1(\tau)\Big]d\tau,\quad j=\overline{1,N}.$$

2. Задается специальное вырожденное представление сужения отображения η_1 на множество $[\omega-r,\omega]\times[0,\omega-r)$, определяемое $\eta_1(t,\tau)=\sum\limits_{j=1}^N\eta_j^1(t)\eta_j^2(\tau)$, $t\in[0,\omega-r]$, $\tau\in[-r,0)$, где $\eta_j^1:[\omega-r,\omega]\to R^{n\times n}$ $(j=\overline{1,N})$ — интегрируемые по Лебегу функции, $\eta_j^2:[0,\omega-r)\to R^{n\times n}$ $(j=\overline{1,N})$ — функции с конечным изменением. Выберем произвольное конечное разбиение полуинтервала

$$[\omega-r,\omega)=\bigcup_{k=1}^{N+1}[t_{k-1},t_k),$$

где $\omega-r=t_0<t_1<\cdots<t_N<t_{N+1}=\omega$. Полагаем $\eta_j^1(t)=0$ при $t\notin[t_{j-1},t_j)$, $j=\overline{1,N}$. Фиксируем k, для которого полуинтервал $[t_{k-1},t_k)$ пересекается при некотором $\tau\in[0,\omega-r)$ с множеством $\{t:\tau-t\le -r\}$, т. е. $t_k>\tau+r$. Требуем, чтобы $\eta_k^2(\tau)=0$ для выбранного k и всех $\tau\in[0,\omega-r]\bigcap[0,t_k-r)$.

2а) Пусть $\omega\ge 2r$. Тогда $\eta(t,\beta-t)\equiv 0$ при $t\in[\omega-r,\omega]$, $\beta\in[-r,0)$. Из формулы (2.1) следует

$$f(t,\beta)=\sum_{j=1}^N\eta_j^1(t)\int_0^{\omega-r}\eta_j^2(\tau)\Big[\int_0^\tau G(\tau,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha-\eta(\tau,\beta-\tau)\Big]d\tau,$$

где $t\in[\omega-r,\omega]$, $\beta\in[-r,0)$, т. е. функция f вырождена. Используя (2.5), запишем

$$F(t,\beta)=\int_0^{\omega-r}V(t,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha,\quad t\in[\omega-r,\omega],\quad \beta\in[-r,0).\tag{3.7}$$

Из (2.7) находим

$$V(t,\alpha)=I_n-\int_{\omega-r}^t V(t,\tau)\sum_{j=1}^N\eta_j^1(\tau)\eta_j^2(\alpha)d\tau-\int_\alpha^{\omega-r}G(\tau,\alpha)d\tau+$$

$$+\int_\alpha^{\omega-r}\int_{\omega-r}^t V(t,s)\sum_{j=1}^N\eta_j^1(s)\eta_j^2(\tau)dsG(\tau,\alpha)d\tau=I_n-\int_\alpha^{\omega-r}G(\tau,\alpha)d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^N\int_{\omega-r}^t V(t,s)\eta_j^1(s)ds\Big[\int_\alpha^{\omega-r}\eta_j^2(\tau)G(\tau,\alpha)d\tau-\eta_j^2(\alpha)\Big],\tag{3.8}$$

где $t\in[\omega-r,\omega]$, $\alpha\in[0,\omega-r]$. Подставляя (3.8) в (3.7), имеем

$$F(t,\beta)=\int_0^{\omega-r}\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha-\int_0^{\omega-r}\int_\alpha^{\omega-r}G(\tau,\alpha)d\tau\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha+$$

$$+\sum_{j=1}^N\int_{\omega-r}^t V(t,s)\eta_j^1(s)ds\int_0^{\omega-r}\Big[\int_\alpha^{\omega-r}\eta_j^2(\tau)G(\tau,\alpha)d\tau-\eta_j^2(\alpha)\Big]\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha,$$

где $t \in [\omega - r, \omega]$, $\beta \in [-r, 0)$. Полученная функция порождает конечномерное представление оператора монодромии

$$(U\varphi)(\vartheta) = \sum_{j=0}^{N+1} W_j(\vartheta) f_j(\varphi), \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Здесь

$$\begin{gathered} W_0(\vartheta) = V(\omega + \vartheta, 0), \quad W_{N+1}(\vartheta) = I_n, \\ W_j(\vartheta) = \int_{\omega - r}^{\omega + \vartheta} V(\omega + \vartheta, s) \eta_j^1(s) ds, \quad \vartheta \in [-r, 0]; \\ f_0(\varphi) = \varphi(0), \quad f_j(\varphi) = \int_{-r}^{-0} d_\beta \psi_j(\beta) \varphi(\beta), \quad j = \overline{1, N+1}, \end{gathered} \tag{3.9}$$

где

$$\begin{gathered} \psi_j(\beta) = \int_0^{\omega - r} \left[\int_\alpha^{\omega - r} \eta_j^2(\tau) G(\tau, \alpha) d\tau - \eta_j^2(\alpha) \right] \eta(\alpha, \beta - \alpha) d\alpha, \quad j = \overline{1, N}, \\ \psi_{N+1}(\beta) = \int_0^{\omega - r} \eta(\alpha, \beta - \alpha) d\alpha - \int_0^{\omega - r} \int_\alpha^{\omega - r} G(\tau, \alpha) d\tau \, \eta(\alpha, \beta - \alpha) d\alpha, \end{gathered}$$

где $\beta \in [-r, 0)$. С помощью формул (3.9) функции W_j, $j = \overline{0, N}$, удовлетворяющие начальным условиям (3.2), продолжим на отрезок $[-\omega - r, 0]$. Функция W_0 на отрезке $[-\omega, 0]$ является решением уравнения (3.3). На отрезке $[-\omega, -r]$ функции W_j, $j = \overline{1, N}$, тождественно равны нулю. На отрезке $[-r, 0]$ функция W_j ($j = \overline{1, N}$) удовлетворяет уравнению

$$\frac{dW_j(\vartheta)}{d\vartheta} = \eta_j^1(\omega + \vartheta) + \int_{-r}^0 d_\tau \eta(\omega + \vartheta, \tau) W_j(\vartheta + \tau).$$

2б) Пусть $\omega < 2r$. Из формулы (2.1) находим

$$\eta(t, \beta - t) = f(t, \beta) - \sum_{j=1}^N \eta_j^1(t) \int_0^{\omega - r} \eta_j^2(\tau) \left[\int_0^\tau G(\tau, \alpha) \eta(\alpha, \beta - \alpha) d\alpha - \eta(\tau, \beta - \tau) \right] d\tau,$$

где $t \in [\omega - r, \omega]$, $\beta \in [-r, 0)$. Фиксируем $k = \overline{1, N}$, для которого $[t_{k-1}, t_k)$ пересекается при некотором $\beta \in [-r, 0)$ с множеством $\{t : \beta - t \le -r\}$, т. е. $t_k > \beta + r$. Требуем, чтобы $\eta(t, \beta - t) = 0$ при всех $\beta \in [-r, 0) \bigcap [-r, t_k - r)$, $t \in [t_{k-1}, t_k)$. Находим

$$\begin{gathered} f(t, \beta) = \sum_{j=1}^N \eta_j^1(t) \int_0^{\omega - r} \eta_j^2(\tau) \left[\int_0^\tau G(\tau, \alpha) \eta(\alpha, \beta - \alpha) d\alpha - \eta(\tau, \beta - \tau) \right] d\tau, \\ t \in [t_{k-1}, t_k), \quad \beta \in [-r, 0) \bigcap [-r, t_k - r), \quad k = \overline{1, N}. \end{gathered}$$

Полагаем

$$\begin{gathered} f(t, \beta) = 0, \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \quad \beta \in [-r, 0) \bigcap [t_k - r, 0), \quad k = \overline{1, N}, \\ f(t, \beta) = 0, \quad t \in [t_N, \omega), \quad \beta \in [-r, 0). \end{gathered}$$

Построенная функция f является вырожденной. Согласно теореме оператор монодромии является конечномерным. Находим

$$\begin{gathered} \eta(t, \beta - t) = 0, \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \quad \beta \in [-r, 0) \bigcap [-r, t_k - r), \quad k = \overline{1, N}, \\ \eta(t, \beta - t) = 0, \quad t \in [t_N, \omega), \quad \beta \in [-r, 0), \\ \eta(t, \beta - t) = -\sum_{j=1}^N \eta_j^1(t) \int_0^{\omega - r} \eta_j^2(\tau) \left[\int_0^\tau G(\tau, \alpha) \eta(\alpha, \beta - \alpha) d\alpha - \eta(\tau, \beta - \tau) \right] d\tau, \end{gathered}$$

$$t \in [t_{k-1}, t_k), \quad \beta \in [-r, 0) \bigcap [t_k - r, 0), \quad k = \overline{1, N}. \tag{3.10}$$

При реализации условий теоремы во втором случае мы специальным образом определяем функцию $\eta : (t, s) \to R^{n \times n}$ в области $\{(t, s) : t \in [\omega - r, \omega],\ s = \tau - t,\ \tau \in [-r, \omega - r)\}$. В области $\{(t, s) : t \in [0, \omega - r],\ s = \tau - t,\ \tau \in [-r, \omega - r)\}$ функция η может выбираться произвольным образом с соблюдением требуемых в теореме условий гладкости и условий $\eta(\cdot, s) = 0$ при $s \geq 0$, $\eta(\cdot, s) = \eta(\cdot, -r)$ при $s \leq -r$. Используя (2.5), находим

$$F(t, \beta) = \int_0^{\omega - r} V(t, \alpha)\eta(\alpha, \beta - \alpha)d\alpha + \int_{\omega - r}^{t} V(t, \alpha)\eta(\alpha, \beta - \alpha)d\alpha, \tag{3.11}$$

где $t \in [\omega - r, \omega]$, $\beta \in [-r, 0)$. Здесь согласно (3.8)

$$V(t, \alpha) = I_n + \sum_{j=1}^{N} \int_{\omega - r}^{t} V(t, s)\eta_j^1(s)ds \Big[\int_{\alpha}^{\omega - r} \eta_j^2(\tau)G(\tau, \alpha)d\tau - \eta_j^2(\alpha) \Big] - \\ - \int_{\alpha}^{\omega - r} G(\tau, \alpha)d\tau, \quad t \in [\omega - r, \omega], \quad \alpha \in [0, \omega - r]. \tag{3.12}$$

Из (3.10) следует

$$\eta(\alpha, \beta - \alpha) = -\sum_{k=1}^{N} \chi_{[t_{k-1}, t_k)}(\alpha) 1(\beta + r - t_k) \times \\ \times \sum_{j=1}^{N} \eta_j^1(\alpha) \int_0^{\omega - r} \eta_j^2(\tau) \Big[\int_0^{\tau} G(\tau, \zeta)\eta(\zeta, \beta - \zeta)d\zeta - \eta(\tau, \beta - \tau) \Big] d\tau, \tag{3.13}$$

где $\alpha \in [\omega - r, \omega]$, $\beta \in [-r, 0)$, χ_E — индикатор множества E. Подставляя (3.12) и (3.13) в (3.11), находим

$$F(t, \beta) = -\sum_{j,k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} 1(\alpha - t)\eta_j^1(\alpha)d\alpha 1(\beta + r - t_k) \times \\ \times \int_0^{\omega - r} \eta_j^2(\tau) \Big[\int_{\alpha}^{\tau} G(\tau, \zeta)\eta(\zeta, \beta - \zeta)d\zeta - \eta(\tau, \beta - \tau) \Big] d\tau + \\ + \sum_{j=1}^{N} \int_{\omega - r}^{t} V(t, s)\eta_j^1(s)ds \int_0^{\omega - r} \Big[\int_{\alpha}^{\omega - r} \eta_j^2(\tau)G(\tau, \alpha)d\tau - \eta_j^2(\alpha) \Big] \eta(\alpha, \beta - \alpha)d\alpha + \\ + \int_0^{\omega - r} \Big(I_n - \int_{\alpha}^{\omega - r} G(\tau, \alpha)d\tau \Big) \eta(\alpha, \beta - \alpha)d\alpha, \quad t \in [\omega - r, \omega], \quad \beta \in [-r, 0).$$

Полученная функция порождает конечномерное представление оператора монодромии

$$(U\varphi)(\vartheta) = \sum_{j=0}^{N+1} W_j(\vartheta)f_j(\varphi) + \sum_{k,j=0}^{N} W_{kj}(\vartheta)f_{kj}(\varphi),$$

где

$$W_0(\vartheta) = V(\omega + \vartheta, 0), \quad W_j(\vartheta) = \int_{\omega - r}^{\omega + \vartheta} V(\omega + \vartheta, s)\eta_j^1(s)ds, \quad W_{N+1}(\vartheta) = I_n,$$

$$W_{kj}(\vartheta) = -\int_{t_{k-1}}^{t_k} 1(\alpha - \omega - \vartheta)\eta_j^1(\alpha)d\alpha, \quad k, j = \overline{1, N}, \quad \vartheta \in [-r, 0]; \tag{3.14}$$

$$f_j(\varphi) = \int_{-r}^{-0} d_\beta \Big(\int_0^{\omega - r} \Big[\int_{\alpha}^{\omega - r} \eta_j^2(\tau)G(\tau, \alpha)d\tau - \eta_j^2(\alpha) \Big] \eta(\alpha, \beta - \alpha)d\alpha \Big) \varphi(\beta),$$

$$f_{N+1}(\varphi) = \int_{-r}^{-0} d_\beta \Big(\int_0^{\omega - r} \Big(I_n - \int_{\alpha}^{\omega - r} G(\tau, \alpha)d\tau \Big) \eta(\alpha, \beta - \alpha)d\alpha \Big) \varphi(\beta),$$

$$f_0(\varphi) = \varphi(0), \quad f_{kj}(\varphi) = \int_{-r}^{-0} d_\beta \Big(1(\beta + r - t_k) \int_0^{\omega - r} \eta_j^2(\tau) \times$$

$$\times \Big[\int_0^\tau G(\tau, \zeta)\eta(\zeta, \beta - \zeta)d\zeta - \eta(\tau, \beta - \tau) \Big] d\tau \Big) \varphi(\beta), \quad k, j = \overline{1, N}.$$

С помощью формул (3.14) функции W_j, $j = \overline{0, N}$, удовлетворяющие начальным условиям (3.2), продолжим на отрезок $[-\omega - r, 0]$. Функция W_0 на отрезке $[-\omega, 0]$ является решением уравнения (3.3). Функции $W_j \equiv 0$, $j = \overline{1, N}$, на отрезке $[-\omega, -r]$. На отрезке $[-r, 0]$ функция W_j ($j = \overline{1, N}$) удовлетворяет уравнению

$$\frac{dW_j(\vartheta)}{d\vartheta} = \eta_j^1(\omega + \vartheta) + \int_{-r}^0 d_\tau \eta(\omega + \vartheta, \tau) W_j(\vartheta + \tau).$$

4. Пример

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение вида

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = A\,(t)\,x\,(t) + B\,(t)\,x\,([t])\,,$$

где x — непрерывная векторная функция, заданная на положительной полуоси, A и B — периодические матрицы размерности $n \times n$ с периодом $\omega = 2$, интегрируемые по Лебегу на отрезке $[0, 2]$. Данное уравнение можно записать в виде (1.1) с $r = 1$ и функцией

$$\eta\,(t, s) = \begin{cases} 0, & s \geq 0; \\ -A\,(t)\,, & [t] - t < s < 0; \quad t \in [0, 2]\,. \\ -A\,(t) - B\,(t)\,, & s \leq [t] - t, \end{cases}$$

Находим функцию

$$\eta_1\,(t, \tau) = \eta\,(t, \tau - t) = \begin{cases} 0, & \tau \geq t; \\ -A\,(t)\,, & [t] < \tau < t; \quad t \in [0, 2]\,. \\ -A\,(t) - B\,(t)\,, & \tau \leq [t]\,, \end{cases}$$

На множестве $[0, \omega - r] \times [-r, 0) = [0, 1] \times [-1, 0)$ функцию η_1 можно представить в виде $\eta_1\,(t, \tau) = -A\,(t) - B\,(t) = \eta_1^1\,(t)\;\eta_1^2\,(\tau)$, где $\eta_1^1\,(t) = -A\,(t) - B\,(t)\,, \eta_1^2\,(t) = I_n$, т. е. функция η_1 является вырожденной. Для данного примера реализуется случай 1а), т. к. $\omega = 2r$ и функция η_1 на множестве $[0, 1] \times [-1, 0)$ вырождена. Оператор монодромии конечномерен и имеет вид $(U\varphi)(\vartheta) = W_0(\vartheta) f_0(\varphi) + W_1(\vartheta) f_1(\varphi)$, $\vartheta \in [-1, 0]$. Поскольку $f_0\,(\varphi) = \varphi\,(0)$ и $f_1\,(\varphi) = \int\limits_{-1}^{-0} d_\beta \eta_1^2\,(\beta)\,\varphi\,(\beta) \equiv 0$, то $(U\varphi)(\vartheta) = W_0(\vartheta)\varphi(0)$, $\vartheta \in [-1, 0]$. Функция W_0 является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dW_0(\vartheta)}{d\vartheta} = \int_{-1}^{-0} d_\tau \eta(\omega + \vartheta, \tau) W_0(\vartheta + \tau) = A(\vartheta) W_0(\vartheta) + B(\vartheta) W_0([\vartheta]) \tag{4.1}$$

с начальными условиями

$$W_0\,(\vartheta) = 0, \quad \vartheta < -2, \quad W_0(-2) = I_n. \tag{4.2}$$

Решение уравнения (4.1) с начальными условиями (4.2) находим методом шагов.

1) При $\vartheta \in [-2, -1)$, учитывая начальные условия, получим уравнение

$$\frac{dW_0\,(\vartheta)}{d\vartheta} = A\,(\vartheta)\,W_0\,(\vartheta) + B\,(\vartheta) \tag{4.3}$$

с решением $W_0(\vartheta) = X(\vartheta) X^{-1}(-2) + \int\limits_{-2}^{\vartheta} X(\vartheta) X^{-1}(s) B(s)\, ds$, где X — фундаментальная матрица уравнения (4.3).

2) При $\vartheta \in [-1, 0]$ получим уравнение

$$\frac{dW_0(\vartheta)}{d\vartheta} = A(\vartheta) W_0(\vartheta) + B(\vartheta) W_0(-1).$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$W_0(\vartheta) = X(\vartheta)\left[X^{-1}(-1) + \int_{-1}^{\vartheta} X^{-1}(s) B(s)\, ds\right] X(-1)\left[X^{-1}(-2) + \int_{-2}^{-1} X^{-1}(s) B(s)\, ds\right].$$

Литература

1. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.
2. Красовский Н.Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения* – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
3. Борисович Ю.Г., Турбабин А.С. *О задаче Коши для линейных неоднородных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // ДАН СССР. – 1969. – Т. 185. – № 4. – С. 741–744.
4. Долгий Ю.Ф. *Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений.* – Свердловск: УрГУ, 1996. – 84 с.
5. Долгий Ю.Ф., Тарасян В.С. *Конечномерные операторы монодромии для периодических систем дифференциальных уравнений с последействием* // Изв. Урал. ун-та. Математика и механика. – 2000. – Вып. 3. – С. 67–83.
6. Cooke K.L., Wiener J. *Retarded differential equations with piecewise constant delays* // J. Math. Anal. and Appl. – 1984. – V. 99. – P. 265–297.
7. Цыпкин Я.З. *Теория импульсных систем.* – М.: Физматгиз, 1958. – 724 с.
8. Liu Pingzhou, Gopalsamy K. *Global stability and chaos in a population model with piecewise constant arguments* // Appl. Math. and Comput. – 1999. – V. 101. – № 1. – P. 63–88.
9. Alonso Ana I., Hong Jalin, Rojo Jesus. *A class of ergodic solutions of differential equations with piecewise constant arguments* // Dyn. Syst. and Appl. – 1998. – V. 7. – № 4. – P. 561–574.
10. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. *Интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 448 с.

Уральский государственный
университет им. А.М. Горького
Уральский государственный
университет путей сообщения

Поступили
первый вариант 13.12.2001
окончательный вариант 15.08.2002