И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1998 МАТЕМАТИКА № 7 (434)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 512 : 519.4

Ю.М. ВАЖЕНИН, Ю.В. НАГРЕБЕЦКАЯ

О КРИТИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ ГРУПП И МОНОИДОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МАТРИЦ

В [1] доказана неразрешимость элементарной теории полной линейной группы $GL(n,\mathbb{Z})$ целочисленных матриц порядка $n \geq 3$. В [2] получен результат о неразрешимости универсальной теории группы $GL(3,\mathbb{Z})$. Наконец, в [3] показано, что для любого $n \geq 3$ элементарная $\forall\exists$-теория группы $GL(n,\mathbb{Z})$ неразрешима. Интересно поэтому поставить вопрос о нахождении разрешимых теорий группы $GL(n,\mathbb{Z})$. Мы будем изучать этот вопрос в рамках схемно-альтернативной иерархии [4]–[6], имея в виду получение информации в терминах критических теорий (определения напоминаются ниже). Кроме группы $GL(n,\mathbb{Z})$ исследуем критические теории и родственной этой группе алгебры — полного линейного моноида $ML(n,\mathbb{Z})$. Это объясняется не только самостоятельным интересом к нему, но и тем, что алгоритмические свойства $ML(n,\mathbb{Z})$ представляется возможным распространить на $GL(n,\mathbb{Z})$. Данная работа посвящена нахождению некоторых критических теорий группы $GL(3,\mathbb{Z})$ и моноида $ML(3,\mathbb{Z})$.

Напомним кратко необходимые определения из [4]–[6]. Пусть $\mathcal{E}$ — множество всех формул логики первого порядка некоторой сигнатуры σ, записанных в предваренной нормальной форме. Пусть $C_i \in \{\forall,\exists\}$, $C_i \neq C_{i+1}$ для $i \in \{1,\dots,p-1\}$ и пусть $r,s,t \in \{0,1\}$. Определим язык $C_1 \dots C_p\neg^r \wedge^s \vee^t$ из $\mathcal{E}$, где $z^1 = z$ и z^0 — пустой символ для $z \in \{\neg,\wedge,\vee\}$, следующим образом. Во-первых, блочная схема кванторной приставки каждой из формул $C_1 \dots C_p\neg^r \wedge^s \vee^t$ является подсловом слова $C_1 \dots C_p$. Во-вторых, связка $\neg$, $\wedge$, $\vee$ допускается в бескванторной части этих формул, если соответственно $r = 1$, $s = 1$, $t = 1$, и не допускается, если соответственно $r = 0$, $s = 0$, $t = 0$. Обозначим, кроме того, через $\neg^r \wedge^s \vee^t$ бескванторный подъязык языка $\forall\neg^r \wedge^s \vee^t$ и через $\varpi\neg^r \wedge^s \vee^t$ объединение $\bigcup\limits_{p\in\omega} C_1 \dots C_p\neg^r \wedge^s \vee^t$. В теореме, сформулированной ниже, будут фигурировать языки первого вида, а именно: $\forall\neg^1 \wedge^0 \vee^1 = \forall\neg\vee$ и $\exists\neg^1 \wedge^1 \vee^0 = \exists\neg\wedge$.

Семейство SA всех языков вида $C_1 \dots C_p\neg^r \wedge^s \vee^t$, $\neg^r \wedge^s \vee^t$ и $\varpi\neg^r \wedge^s \vee^t$ упорядочивается включением и называется *схемно-альтернативной иерархией языков*. Для языка $L \in SA$ и класса K алгебраических систем сигнатуры σ через LK обозначим теорию языка L класса K, т.е. совокупность всех предложений из L, истинных на K. *Схемно-альтернативной иерархией теорий* класса K называется частично упорядоченное множество

$$SAK = \langle \{LK \mid L \in SA\};\ \subseteq \rangle.$$

Теория $LK \in SAK$ называется *критической*, если она является минимальной в SAK неразрешимой теорией. *Границей разрешимости* K называется множество

$$\mathcal{B}(K) = \{L \in SA \mid LK \text{ — критическая теория}\}.$$

Нахождение границы разрешимости класса K означает установление полной в рамках иерархии SA алгоритмической картины для K, поскольку теория $LK \in SAK$ будет разрешимой тогда и только тогда, когда $L \not\supseteq L_1$ для любого языка $L_1 \in \mathcal{B}(K)$. Всюду в работе используем следующие обозначения: G — полная линейная группа $GL(3,\mathbb{Z})$, рассматриваемая как алгебра сигнатуры $\langle \cdot, 1, ^{-1}\rangle$; M — полный линейный моноид $ML(3,\mathbb{Z})$, т.е. алгебра сигнатуры $\langle \cdot, 1\rangle$ с основным множеством всех матриц порядка 3 над $\mathbb{Z}$; M_0 — подмоноид моноида M, состоящий из всех невырожденных матриц из $ML(3,\mathbb{Z})$; $F(\vec{x}) = F(x_1,\ldots,x_n)$ — свободный моноид над алфавитом $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Обозначим через E и E_{ij} единичную матрицу и соответственно матричную (i,j)-единицу порядка 3.

Основной результат работы — следующая

Теорема. *Теории* $\forall\neg\vee G$, $\exists\neg\wedge G$, $\forall\neg\vee M$, $\exists\neg\wedge M$ *являются критическими.*

Схема доказательства. В группе G есть подгруппа, свободно порожденная счетным множеством. Это вытекает из того, что матрицы $E+E_{12}$ и $E+E_{21}$ свободно порождают свободную подгруппу в G [7] и из факта существования в свободной группе ранга 2 подгруппы, изоморфной свободной группе счетного ранга ([8], гл. 1, § 1.4, с. 51). Отсюда нетрудно получить разрешимость теории $\forall\wedge\vee G$. Теория $\exists\wedge\vee G$ разрешима благодаря присутствию в сигнатуре единицы. Согласно основной теореме из работы [2] теория $\forall\neg\wedge\vee G$ неразрешима. В силу полноты элементарной теории $\mathcal{E}G$ отсюда следует, что неразрешимыми являются теории $\forall\neg\vee G$ и $\exists\neg\wedge G$. Отмеченная выше разрешимость теорий $\forall\wedge\vee G$ и $\exists\wedge\vee G$ позволяет легко доказать, что теории, покрываемые в иерархии SAG теориями $\forall\neg\vee G$ и $\exists\neg\wedge G$, разрешимы. Таким образом, последние являются критическими.

Для доказательства утверждения теоремы в случае моноида M необходимо показать, что справедлива (имеющая самостоятельный интерес)

Лемма. *Теория* $\exists\forall\wedge\vee M$ *разрешима.*

Доказательство леммы основывается на истинности следующей импликации: если на M истинно тождество $\forall X\varphi(X)$, где

$$\varphi(X) = (M_1X^{n_1}M_2X^{n_2}\ldots M_kX^{n_k}M_{k+1} = N_1X^{m_1}N_2X^{m_2}\ldots N_lX^{m_l}N_{l+1}),$$
$$M_p, N_q \in GL(3,\mathbb{Z}),\quad p\in\{1,\ldots,k+1\},\quad q\in\{1,\ldots,l+1\},\quad \sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{j=1}^{l} m_j,$$

то $k=l$, $M_1=N_1$. Подставляя вместо X в формулу $\varphi(X)$ матрицы из множества

$$\mathcal{K} = \{N(xE_{1i}+yE_{2i}+zE_{3i}+uE) \mid x,y,z,u\in\mathbb{Z},\ u\notin\{-x,-y,-z\},$$
$$i\in\{1,2,3\},\ N\in\{E, E_{12}+E_{13}+E_{23}+E\}\},$$

смотрим на $\varphi(X)$ как на равенство двух многочленов от x, y, z, u с коэффициентами из $\mathbb{Z}$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых одночленах и производя в $\varphi(X)$ сокращения, получаем требуемое.

Пусть

$$\nu = (\exists\vec{a}\in G^n\,\forall\vec{x}(u_1(\vec{a})v_1(\vec{x})\ldots u_k(\vec{a})v_k(\vec{x})u_{k+1}(\vec{a}) = f_1(\vec{a})w_1(\vec{x})\ldots f_l(\vec{a})w_l(\vec{x})f_{l+1}(\vec{a}))),$$

где $\vec{a}=a_1\ldots a_n$, $\vec{x}=x_1\ldots x_n$; $u_i, f_j\in F(\vec{a})$ для $i\in\{1,\ldots,k+1\}$, $j\in\{1,\ldots,l+1\}$, $v_s, w_t\in F(\vec{x})$ для $s\in\{1,\ldots,k\}$, $t\in\{1,\ldots,l\}$, причем $u_i\neq 1$, $f_j\neq 1$ в $F(\vec{a})$ для $i\in\{2,\ldots,k\}$, $j\in\{2,\ldots,l\}$, $v_s\neq 1$, $w_t\neq 1$ в $F(\vec{x})$ для $s\in\{1,\ldots,k\}$, $t\in\{1,\ldots,l\}$. Из доказанного следует, что предложение ν истинно на M_0 тогда и только тогда, когда в $F(\vec{x})$ имеет место $v_1(\vec{x})\ldots v_k(\vec{x}) = w_1(\vec{x})\ldots w_l(\vec{x})$. С помощью этого факта доказывается разрешимость теории $\exists\forall\wedge M$.

Доказательство разрешимости теории $\exists\forall\wedge\vee M$ проводится аналогично только что приведенному доказательству разрешимости теории $\exists\forall\wedge M$. Завершает доказательство теоремы построение интерпретации неразрешимой теории $\forall\neg\wedge\vee G$ в теории $\forall\neg\wedge\vee M$.

В заключение отметим, что мы получим полное описание границ разрешимости $\mathcal{B}(G)$ и $\mathcal{B}(M)$, если будет получен ответ на следующий

Вопрос. Разрешимы ли теории ΓG и ΔM для

$$\Gamma,\Delta \in \{C_1\ldots C_p\neg^r \mid p\geq 2,\ r\in\{0,1\}\}\cup\{C_1\ldots C_p\wedge^s\vee^t \mid p\geq 2,\ s,t\in\{0,1\}\}$$
$$\text{и}\quad \Delta\notin\{\exists\forall,\exists\forall\wedge,\exists\forall\vee,\exists\forall\wedge\vee\}\,?$$

Авторы выражают признательность Л.Н. Шеврину за внимание к работе и ряд полезных замечаний.

Литература

1. Мальцев А.И. *Об элементарных свойствах линейных групп* // Некотор. пробл. матем. и механ. – Новосибирск, 1961. – С. 110-132.
2. Слободской А.М. *Универсальная теория группы* $GL_3(\mathbb{Z})$ // Алгоритмическ. вопр. алгебраическ. систем и ЭВМ. – Иркутск, 1979. – С. 200–217.
3. Дурнев В.Г. *Неразрешимость некоторых теорий групп* $SL(n,\mathbb{Z})$ *и* $GL(n,\mathbb{Z})$ $(n\geq 3)$ // Вопр. теории групп и гомологической алгебры. – Ярославль, 1994. – С. 61–68.
4. Важенин Ю.М. *Критические теории* // Сиб. матем. журн. – 1988. – Т. 29. – № 1. – С. 23–31.
5. Важенин Ю.М., Попов В.Ю. *Критические теории свободных нильпотентных колец некоторых типов* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 3. – С. 74–76.
6. Важенин Ю.М. *Множества, логика, алгоритмы*: Учеб. пособие. – Екатеринбург: УрГУ, 1995. – 152 с.
7. Санов И.Н. *Свойство одного представления свободной группы* // ДАН СССР. – 1947. – № 57. – С. 657–659.
8. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. *Комбинаторная теория групп.* – М.: Наука, 1974. – 456 с.

Уральский государственный университет

Поступили
полный текст 25.11.1996
краткое сообщение 13.02.1998