*Известия вузов. Математика* *http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/*
*2012, № 9, с. 8–18* *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0079*

*И.В. КОННОВ*

# О СКАЛЯРИЗАЦИИ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИОННОГО ТИПА

*Аннотация.* Рассматриваются вопросы скаляризации векторных задач в условиях, когда отношение предпочтения задано достаточно произвольным множеством. Предлагается алгоритм выбора весов для априорно неизвестных отношений предпочтения. Приводятся примеры приложений полученных результатов к векторным задачам оптимизации, игрового равновесия и вариационным неравенствам.

*Ключевые слова*: векторные задачи, скаляризация, алгоритм выбора весов.

*УДК*: 519.85

## 1. Введение

Задачи с векторными критериями довольно часто возникают в моделях, связанных с принятием решений в сложных системах. Наличие векторного критерия приводит к дополнительным трудностям по сравнению с соответствующими скалярными задачами как при определении понятия решения, так и при исследовании его свойств и разработке численных методов. Обычно для определения понятия решения используется некоторое отношение предпочтения в пространстве критериев (оценок), наиболее популярным является предпочтение по Парето (например, [1], [2]). Такое отношение предпочтения обычно неполно, в результате множество решений (недоминируемых вариантов) оказывается слишком широким, недостаточным для принятия решения. Широко применяемый для векторных задач метод скаляризации с помощью (линейной) свертки также сталкивается с трудностью назначения весов, особенно при существенной разнородности критериев. Наконец, хорошо известный способ задания предпочтения посредством выпуклого конуса (например, [3], [4]) налагает ряд дополнительных условий (однородность, аддитивность предпочтений), которые могут оказаться ограничительными для реальных прикладных задач.

В данной работе эти проблемы рассматриваются совместно, выявляются новые связи между ними и предлагаются общие подходы по их преодолению при достаточно слабых предположениях. В частности, предлагается алгоритм выбора весов для априорно неизвестных отношений предпочтения. Кроме того, приводятся примеры приложений полученных результатов к векторным задачам оптимизации, игрового равновесия и вариационным неравенствам.

## 2. Вспомогательные свойства

Приведем некоторые результаты из выпуклого анализа, используемые в дальнейшем. Отметим, что близкие результаты содержатся во многих работах (например, [5]–[9]), но

Поступила 15.08.2011

обычно при несколько иных предположениях. Поэтому для удобства здесь даны полные доказательства.

Множество $K$ будем называть конусом, если для любой точки $x \in K$ выполняется $\lambda x \in K$ при любом числе $\lambda \geq 0$. Для множества $Q$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ можно определить полярный (или сопряженный) конус

$$Q^\star = \{p \in \mathbb{R}^m \mid \langle q, p\rangle \geq 0 \ \forall q \in Q\},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение. Ясно, что $Q^\star$ — выпуклый и замкнутый конус. Если $K$ — выпуклый и замкнутый конус в $\mathbb{R}^m$, то $K^{\star\star} = \overline{K} = K$. Для конуса $K$ обозначим $S(K) = K \bigcap S(\mathbf{0}, 1)$, где $S(\mathbf{0}, 1) = \{z \mid \|z\| = 1\}$.

**Лемма 1.**

a) *Пусть $Q$ — множество в $\mathbb{R}^m$. Если $p \in \operatorname{int} Q$, то*

$$\langle q, p\rangle > 0 \quad \forall q \in Q^\star \setminus \{\mathbf{0}\}. \tag{1}$$

b) *Пусть $K$ — выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^m$. Если*

$$\langle x, q\rangle > 0 \quad \forall q \in K^\star \setminus \{\mathbf{0}\}, \tag{2}$$

*то $x \in \operatorname{int} K$ (т. е. $\operatorname{int} K \neq \varnothing$).*

*Доказательство.* Если $p \in \operatorname{int} Q$, то найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $p + \varepsilon z \in Q$ для всех $z$, $\|z\| \leq 1$. Поэтому

$$\langle p + \varepsilon z, q\rangle \geq 0 \quad \forall q \in Q^\star \setminus \{\mathbf{0}\},$$

отсюда

$$\langle p, q\rangle \geq -\varepsilon\langle z, q\rangle = \varepsilon\|q\| > 0$$

при $z = -q/\|q\|$ и выполняется (1). В случае b) пусть выполняется (2), тогда очевидно

$$\langle x, q\rangle \geq 0 \quad \forall q \in K^\star$$

и $x \in K^{\star\star} = K$. Теперь

$$\langle x, q\rangle > 0 \quad \forall q \in S(K^\star),$$

но множество $S(K^\star)$ компактно, поэтому найдется точка $\overline{q} \in S(K^\star)$ такая, что

$$\langle x, \overline{q}\rangle = \min_{q \in S(K^\star)} \langle x, q\rangle = \varepsilon > 0.$$

Выберем произвольно $z \in S(\mathbf{0}, 1)$ и $\delta > 0$, тогда для $u = x + \delta z$ и любого $q \in S(K^\star)$ имеем

$$\langle q, u\rangle = \langle q, x\rangle + \delta\langle q, z\rangle \geq \langle \overline{q}, x\rangle - \delta\|\overline{q}\|\,\|z\| = \varepsilon - \delta > 0$$

при $\varepsilon > \delta > 0$. Поэтому $x + \delta S(\mathbf{0}, 1) \subset K$ при $\varepsilon > \delta > 0$, т. е. $x \in \operatorname{int} K$. □

Конус $K$ называется заостренным, если $K \bigcap (-K) = \{\mathbf{0}\}$. Для конуса $K$ обозначим $P(K) = \operatorname{conv} S(K)$ и

$$p(K) = \operatorname{argmin}\{\|p\| \mid \ p \in P(K)\}.$$

**Лемма 2.** *Пусть $K$ — выпуклый и заостренный конус в $\mathbb{R}^m$. Тогда $\mathbf{0} \notin P(K)$.*

*Доказательство.* Если $\mathbf{0} \in P(K)$, то найдутся элементы $q^i \in S(K)$ и числа $\alpha_i > 0$ такие, что

$$\mathbf{0} = \sum_{i \in I} \alpha_i q^i, \quad \sum_{i \in I} \alpha_i = 1,$$

где $I$ — конечное множество индексов. Обозначим $p^1 = q^1$ и

$$p^2 = \sum_{i \in I,\, i \neq 1} (\alpha_i / \alpha_1) q^i,$$

тогда $p^1, p^2 \in K$ и $p^1 = -p^2$, т. е. $p^1 \in K \bigcap (-K)$ и конус $K$ не заостренный. □

Для множества $Q$ можно определить его коническую оболочку

$$\operatorname{cone} Q = \{x \mid x = \lambda q,\ \lambda \geq 0,\ q \in Q\}.$$

Множество $W$ будем называть базой конуса $K$, если $K = \operatorname{cone} W$ и $\mathbf{0} \notin W$.

**Предложение 1.** *Следующие утверждения эквивалентны*:

a) $K$ *— выпуклый, замкнутый и заостренный конус*;
b) $K$ *— выпуклый замкнутый конус,* $p(K) \neq \mathbf{0}$;
c) $K$ *— выпуклый замкнутый конус,* $\operatorname{int} K^\star \neq \varnothing$;
d) *конус* $K$ *имеет выпуклую и компактную базу.*

*Доказательство.* Пусть конус $K$ заостренный, тогда множество $P(K)$ является его базой, при этом оно выпукло и компактно как выпуклая оболочка компакта $S(K)$ (например, [5], теорема 1.7). Итак, из a) следует d). Кроме того, элемент $p(K)$ существует как проекция нуля на выпуклый компакт. Далее, $p(K) \neq \mathbf{0}$ в силу леммы 2, т. е. из a) следует b). По свойству проекции

$$\langle p(K), x - p(K) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in P(K),$$

отсюда

$$\langle x, p(K) \rangle \geq \|p(K)\|^2 = \delta > 0 \quad \forall x \in S(K),$$

т. е.

$$\langle x, p(K) \rangle > 0 \quad \forall x \in K \setminus \{\mathbf{0}\} = (K^\star)^\star \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

В силу леммы 1 b), имеем $p(K) \in \operatorname{int} K^\star$, т. е. из b) следует c). Далее, пусть $p \in \operatorname{int} K^\star$, но конус $K$ не заостренный. Тогда найдется элемент $q \in K \setminus \{\mathbf{0}\}$ такой, что $-q \in K$. По лемме 1 a) получаем противоречие

$$0 < \langle p, q \rangle = -\langle p, -q \rangle < 0,$$

т. е. из c) следует a). Теперь пусть выполняется d), тогда конус $K$ выпуклый (например, [5], теорема 3.6). Покажем, что он замкнутый. Пусть имеется последовательность $\{q^k\} \to q'$, где $q^k \in K$. Тогда для любого $k$ существуют элемент $x^k$ базы $W$ и число $\lambda_k \in [0, \overline{\lambda}]$, $0 < \overline{\lambda} < \infty$, такие, что $q^k = \lambda_k x^k$. Последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{x^k\}$ ограничены, поэтому из них можно выделить сходящиеся подпоследовательности $\{\lambda_{k_s}\} \to \lambda' \in [0, \overline{\lambda}]$ и $\{x^{k_s}\} \to x' \in W$ в силу компактности $W$. Отсюда имеем

$$q' = \lim_{k_s \to \infty} \lambda_{k_s} x^{k_s} = \lambda' x' \in K,$$

т. е. $K$ — замкнутый конус. Поскольку $\mathbf{0} \notin W$, то по теореме отделимости найдется элемент $p \neq \mathbf{0}$ такой, что

$$0 = \langle p, \mathbf{0} \rangle \leq \beta < \langle p, x \rangle \quad \forall x \in W,$$

для некоторого числа $\beta$. Отсюда

$$\langle p, x \rangle > 0 \quad \forall x \in K \setminus \{\mathbf{0}\} = (K^\star)^\star \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

В силу леммы 1 b) имеем $p \in \operatorname{int} K^\star$, т. е. из d) следует c), поэтому и a). □

## 3. Скаляризация векторных оценок

Пусть $Y$ — множество в пространстве $\mathbb{R}^m$, в котором задано отношение предпочтения $\succ$ с помощью множества $Q \subset \mathbb{R}^m$ такого, что $\mathbf{0} \in Q$ и $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$, а именно

$$x \succ y, \quad \text{если} \quad x - y \in \operatorname{int} Q$$

(например, [4], с. 2). Обычно в качестве множества $Q$ используется выпуклый конус, тогда, помимо свойств транзитивности и антисимметричности, отношение обладает свойством линейности. Наиболее известный способ $Q = \mathbb{R}^m_+$, где $\mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m\}$, соответствует отношению предпочтения по Парето (например, [2], [3]). Далее, можно определить наиболее предпочтительный элемент по данному отношению в множестве $Y$:

$$\overline{y} \in Y,\ (Y - \overline{y}) \bigcap (\operatorname{int} Q) = \varnothing. \tag{3}$$

Ясно, что в случае $Q = \mathbb{R}^m_+$ получаем слабое решение по Парето. Также рассмотрим скаляризованную задачу: *найти*

$$\overline{y} \in Y,\ \exists p \in Q^\star \setminus \{\mathbf{0}\},\ \langle p, \overline{y} \rangle = \max_{y \in Y} \langle p, y \rangle. \tag{4}$$

Приводимое ниже соотношение является обобщением и модификацией многих известных результатов (например, [2], [3]). Как правило, для этого и следующего утверждения рассматривался случай выпуклого конуса $Q$ (прежде всего, $Q = \mathbb{R}^m_+$) в различных пространствах.

**Теорема 1.** *Пусть $Q$ — выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{0} \in Q \setminus \operatorname{int} Q$, $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$.*

a) *Если множество $Y$ выпукло, то из* (3) *следует* (4).

b) *Из* (4) *следует* (3).

*Доказательство.* Пусть выполняются соотношения (4), но $\overline{y}$ не удовлетворяет (3). Тогда найдется элемент $y \in Y$ такой, что $y - \overline{y} \in \operatorname{int} Q$. Если взять $p$ из (4), то по лемме 1 a) имеем $\langle y - \overline{y}, p \rangle > 0$, что противоречит (4). Итак, утверждение b) справедливо. В условиях п. a) множества $Y - \overline{y}$ и $\operatorname{int} Q$ выпуклы, поэтому по теореме отделимости найдется элемент $p \neq \mathbf{0}$ такой, что

$$\forall y \in Y \quad \langle p, y - \overline{y} \rangle \leq \alpha \leq \langle p, x \rangle \quad \forall x \in \operatorname{int} Q,$$

для некоторого числа $\alpha$, отсюда

$$\forall y \in Y \quad \langle p, y - \overline{y} \rangle \leq \alpha \leq \langle p, x \rangle \quad \forall x \in Q.$$

Поскольку $\mathbf{0} \in (Y - \overline{y}) \bigcap Q$, то $\alpha = 0$. Теперь из правого неравенства следует $p \in Q^\star$, а из левого неравенства следует

$$\langle p, y \rangle \leq \langle p, \overline{y} \rangle \quad \forall y \in Y,$$

т. е. выполняются соотношения (4), и утверждение a) также справедливо. □

С помощью множества $Q$ можно определить другое отношение предпочтения $\succeq$, а именно:

$$x \succeq y, \quad \text{если} \quad x - y \in Q \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Этому отношению будет соответствовать свое понятие наиболее предпочтительного элемента в множестве $Y$:

$$\overline{y} \in Y,\ (Y - \overline{y}) \bigcap (Q \setminus \{\mathbf{0}\}) = \varnothing. \tag{5}$$

Очевидно, при $Q = \mathbb{R}^m_+$ получаем обычное решение по Парето. В любом случае из (5) следует (3). Аналогично определим скаляризованную задачу: *найти*

$$\overline{y} \in Y,\ \exists p \in \operatorname{int} Q^\star,\ \langle p, \overline{y} \rangle = \max_{y \in Y} \langle p, y \rangle. \tag{6}$$

Приводимое здесь соотношение также является обобщением и модификацией многих известных результатов (например, [10], [2], [3]).

**Теорема 2.** *Пусть $Q$ — выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{0} \in Q \setminus \operatorname{int} Q$, при этом конус $K = \operatorname{cone} Q$ имеет выпуклую и компактную базу $W$.*

a) *Если множество $Y$ выпукло, а конус $H = \operatorname{cone}(Y - h)$ замкнут для любого $h \in Y$, то из* (5) *следует* (6).

b) *Из* (6) *следует* (5).

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что при сделанных предположениях конус $K = \operatorname{cone} Q = \operatorname{cone} W$ выпуклый, замкнутый и заостренный, а также $\operatorname{int} K^\star \neq \varnothing$ в силу предложения 1, так что определение (6) корректно. Далее, имеем

$$W^\star = Q^\star = K^\star. \tag{7}$$

Действительно, $W \subseteq K$ и $Q \subseteq K$, поэтому $W^\star \supseteq K^\star$ и $Q^\star \supseteq K^\star$. Если $p \in W^\star$, то $\langle p, z\rangle \geq 0$ для всех $z \in W$, а значит, для любого $x \in K \setminus \{\mathbf{0}\}$ выполняется $\langle p, x\rangle \geq 0$, поскольку $x = \lambda z$ для некоторого $\lambda > 0$. Отсюда $p \in K^\star$. Аналогично получаем $Q^\star \subseteq K^\star$, и соотношение (7) справедливо.

Пусть выполняются соотношения (6), но $\overline{y}$ не удовлетворяет (5). Тогда найдется элемент $y \in Y$ такой, что $y - \overline{y} \in Q \setminus \{\mathbf{0}\} \subseteq K \setminus \{\mathbf{0}\}$. Если взять $p$ из (4), то в силу леммы 1 и соотношения (7) имеем $\langle y - \overline{y}, p\rangle > 0$, поскольку $K = (K^\star)^\star$. Это противоречит (6), т. е. утверждение b) справедливо.

Пусть теперь выполняется (5), тогда

$$\operatorname{cone}(Y - \overline{y}) \bigcap (K \setminus \{\mathbf{0}\}) = \varnothing. \tag{8}$$

Если $u \in K \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $u \in H = \operatorname{cone}(Y - \overline{y})$, то найдутся числа $\lambda', \lambda'' \in (0,1)$ такие, что $x' = \lambda' u \in Q$ и $x'' = \lambda'' u \in (Y - \overline{y})$ из-за выпуклости $Q$ и $Y - \overline{y}$ ([5], теорема 3.9). Обозначим $\lambda = \min\{\lambda', \lambda''\}$ и $x = \lambda u$, тогда $x \in (Y - \overline{y}) \bigcap (Q \setminus \{\mathbf{0}\})$, противоречие. Итак, выполняется (8), отсюда $H \bigcap W = \varnothing$. Поскольку множества $H$ и $W$ выпуклы и замкнуты, а множество $W$ компактно, то по теореме сильной отделимости найдется элемент $p \neq \mathbf{0}$ такой, что

$$\forall h \in H \quad \langle p, h\rangle \leq \alpha < \langle p, x\rangle \quad \forall x \in W, \tag{9}$$

для некоторого числа $\alpha$. Далее, $\mathbf{0} \in H$, поэтому $\alpha \geq 0$. Правое неравенство в (9) теперь приводит к

$$0 < \langle p, x\rangle \quad \forall x \in K \setminus \{\mathbf{0}\},$$

что по лемме 1 b) ($K = (K^\star)^\star$) дает $p \in \operatorname{int} K^\star$, но $K^\star = Q^\star$ в силу (7), поэтому $p \in \operatorname{int} Q^\star$. Кроме того, левое неравенство в (9) приводит к

$$\langle p, h\rangle \leq 0 \quad \forall h \in H.$$

Действительно, если $\langle p, h'\rangle = \beta' > 0$ для некоторого $h' \in H$, то $\lambda h' \in H$ и $\langle p, \lambda h'\rangle = \lambda\beta' > \alpha$ при достаточно большом $\lambda > 0$, противоречие. Поэтому имеем

$$\langle p, y - \overline{y}\rangle \leq 0 \quad \forall y \in Y,$$

т. е. выполняется (6) и утверждение a) справедливо. □

**Замечание 1.** Конус $H = \operatorname{cone}(Y - h)$ будет замкнутым для любого $h \in Y$, если, например, множество $Y$ компактное, либо многогранное.

Отметим, что часть b) обеих теорем не накладывает каких-либо ограничений на множество $Y$, которое представляет собой множество оценок. Можно пойти еще дальше и определить векторные задачи, в которых отношение предпочтения задается с помощью невыпуклого (и даже несвязного) множества $C \subset \mathbb{R}^m$. Тогда аналогом (3) будет задача: *найти*

$$\overline{y} \in Y, \ (Y - \overline{y}) \bigcap (\operatorname{int} C) = \varnothing. \tag{10}$$

Здесь требуется, чтобы $\operatorname{int} C \neq \varnothing$. Если теперь определить множество

$$Q = \overline{\operatorname{conv}}\{\mathbf{0}, C\}, \tag{11}$$

то $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$. Когда $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$, то можно найти решение задачи (3) по решению задачи (4) согласно теореме 1 b). Поскольку $C \subseteq Q$, то таким образом получаем и решение задачи (10).

Таким же обобщением (5) будет задача: *найти*

$$\overline{y} \in Y, \ (Y - \overline{y}) \bigcap (C \setminus \{\mathbf{0}\}) = \varnothing. \tag{12}$$

Вновь определим множество $Q$ согласно (11) и найдем решение задачи (5) по решению задачи (6) согласно теореме 2 b). Отсюда получаем и решение задачи (12). Здесь дополнительно требуется, чтобы $\mathbf{0} \in Q \setminus \operatorname{int} Q$, а конус $K = \operatorname{cone} Q$ должен иметь выпуклую и компактную базу.

**Замечание 2.** Для случаев, когда отношение предпочтения задается с помощью общего конуса $K \neq \mathbb{R}^m_+$ либо с помощью произвольного множества $C$, существуют более сложные (нелинейные) способы скаляризации (например, [11], [4]). Но при этом линейная скаляризация из-за своей простоты остается весьма популярной и, как показывают полученные свойства, вполне применимой для сложных отношений предпочтения.

Следует также заметить, что методом (линейной) скаляризации в действительности вместо (10) (или (3)) находится решение более сильной задачи

$$\overline{y} \in Y, \ (Y - \overline{y}) \bigcap (\operatorname{int}\ \operatorname{cone} Q) = \varnothing,$$

а вместо (12) (или (5)) — также решение более сильной задачи

$$\overline{y} \in Y, \ (Y - \overline{y}) \bigcap (\operatorname{cone} Q \setminus \{\mathbf{0}\}) = \varnothing.$$

Таким образом, при скаляризации исходное отношение фактически представляется конусом, имеющим тот же сопряженный конус, что и множество $Q$.

## 4. Поиск весовых коэффициентов для отношения предпочтения

Хорошо известно, что отношение предпочтения по Парето дает слишком широкое множество решений, что приводит к необходимости дополнительных сложных процедур для принятия решения, например, оптимизации на множестве Парето. Заметим, что такая ситуация влияет и на эффективность метода (линейной) скаляризации. Действительно, если конус $\mathbb{R}^m_+$ недостаточно широк, то появляется много несравнимых элементов, но также и множество наборов весов оказывается довольно широким и совпадает с тем же конусом, поскольку $(\mathbb{R}^m_+)^\star = \mathbb{R}^m_+$. Отсюда можно сделать вывод, что расширение базового множества $Q$ приведет к сужению как множества решений, так и множества наборов весов $Q^\star$ (точнее $S(Q^\star)$, после нормировки).

**Замечание 3.** Отметим, что крайний случай, когда множество $Q$ представляет собой луч в $\mathbb{R}^m$, дает полусферу $S(Q^\star)$ наборов весов. Другой крайний случай, когда $Q$ есть полупространство в $\mathbb{R}^m$, соответствует полному отношению предпочтения и единственному набору весов, взятому из $S(Q^\star)$, т. е. с этой точки зрения векторная задача с полным предпочтением и скалярная задача неразличимы. Таким образом, при фиксации весов скаляризации исходное множество (конус) отношения предпочтения представляется содержащим его полупространством.

Один из подходов, представленный в [12], состоит в расширении аппроксимации отношения предпочтения (априорно неизвестного) за счет привлечения дополнительной информации. Следовательно, на этой основе можно получить и набор весовых коэффициентов, который позволит получить решение исходной векторной задачи по решению скаляризованной согласно теореме 1, если взять набор из сопряженного конуса.

Итак, пусть априорно неизвестное отношение предпочтения задается с помощью выпуклого замкнутого конуса (для упрощения изложения), который определен неявно в том смысле, что можно лишь проверить принадлежность элементов пространства $\mathbb{R}^m$ этому конусу. Сам конус в целом неизвестен. В этих условиях предлагается искать элемент сопряженного конуса с помощью алгоритма из [7], который описывается следующим образом.

**Алгоритм С.** Пусть $K$ — выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^m$. Вначале выбираем элемент $q^0 \in S(K)$ и число $\alpha \in [0, 1)$, полагаем $p^0 = q^0$.

На $k$-й итерации, $k = 0, 1, \dots$, имеется элемент $p^k \in P(K)$. Выбираем элемент $q^{k+1} \in S(K)$ такой, что $\langle p^k, q^{k+1} \rangle \leq \alpha \|p^k\|^2$, вычисляем

$$p^{k+1} = \operatorname{argmin} \{ \|p\| \,\big|\, p = \lambda p^k + (1-\lambda) q^{k+1},\ \lambda \in [0, 1] \}$$

и переходим к следующей итерации. Если такого элемента $q^{k+1}$ не существует, останов.

**Предложение 2** ([7], теорема 2)**.** *Если* $p(K) \neq \mathbf{0}$*, то алгоритм* С *находит элемент конуса* $K^\star$ *за число шагов*

$$l \leq (1-\alpha)^{-2} \|p(K)\|^{-2} + 1.$$

Таким образом, алгоритм С конечен и позволяет найти элемент из $K^\star$ (точнее, из $\operatorname{int} K^\star$ по лемме 1 b)), не находя всего конуса $K$, если конус $K$ заостренный. При его реализации на $k$-й итерации требуется находить элемент $q^{k+1} \in S(K)$ из множества

$$S_\alpha(K, p^k) = \{ q \in S(K) \mid \langle p^k, q \rangle \leq \alpha \|p^k\|^2 \},$$

при $\alpha = 0$, очевидно, можно взять множество

$$S_0(p^k) = \{ q \in S(K) \mid \langle p^k, q \rangle = 0 \}.$$

Поскольку конус $K$ априорно неизвестен, то каждый раз требуется выбирать пару различных элементов $u^{k+1}$ и $v^{k+1}$ таких, что $\widetilde{q}^{k+1} = u^{k+1} - v^{k+1} \in K$, а также $\langle p^k, \widetilde{q}^{k+1} \rangle \leq \alpha \|\widetilde{q}^{k+1}\| \, \|p^k\|^2$ при $k = 0, 1, \dots$ . Если таких элементов не существует, работа алгоритма заканчивается. Шаги алгоритма подразумевают возможность определения таких пробных пар оценок. Полученный элемент $p^l$ дает набор весовых коэффициентов из $\operatorname{int} K^\star$.

Алгоритм можно интерпретировать как последовательное выявление предпочтения в ходе процесса проб, которое позволяет найти веса в скалярной задаче, дающей решение исходной. Следовательно, алгоритм реализует неявный (косвенный) способ назначения весов, несмотря на разнородность критериев. При этом от неизвестного конуса $K$ требуется свойство заостренности, т. е. он может быть достаточно широк и близок к полупространству.

**Замечание 4.** В [12] основное внимание уделяется сужению множества решений с помощью пересчета коэффициентов важности пары критериев (или групп критериев), полученных на основе попарных сравнений векторов оценок и последующим применением оптимизации по Парето уже к новому набору критериев. По поводу оценки важности критериев см. также [13], [2]. В настоящей работе попарные сравнения используются для сужения неизвестного сопряженного конуса и в конечном итоге для поиска набора весовых коэффициентов в линейной свертке критериев.

Описанный алгоритм нетрудно модифицировать для случая, когда отношение предпочтения задается с помощью (невыпуклого) множества $C \subset \mathbb{R}^m$. Тогда, следуя (11), можно определить

$$K = \operatorname{cone} Q, \quad Q = \overline{\operatorname{conv}}\{\mathbf{0}, C\}.$$

## 5. Примеры приложений

В данном разделе обсудим примеры приложений полученных выше результатов. Начнем с самой известной *задачи векторной оптимизации* (например, [2], [3]).

Пусть $X$ — непустое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^m$ — однозначное отображение, $Q$ — выпуклое множество в пространстве $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{0} \in Q \setminus \operatorname{int} Q$. Тогда можно определить задачу: *найти точку* $\overline{x} \in X$ *такую, что*

$$\overline{\exists} x \in X, \quad f(x) - f(\overline{x}) \in \operatorname{int} Q, \tag{13}$$

*которая будет давать слабое решение и соответствует задаче* (3), *где*

$$Y = f(X), \quad \overline{y} = f(\overline{x}). \tag{14}$$

Согласно теореме 1 b), если найти некоторое решение $x^*$ задачи

$$\max_{x \in X} \to \langle p, f(x) \rangle \tag{15}$$

при $p \in Q^\star \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$, то оно будет и решением задачи (13). Аналогично, рассмотрим векторную задачу: *найти точку* $\overline{x} \in X$ *такую, что*

$$\overline{\exists} x \in X, \quad f(x) - f(\overline{x}) \in Q \setminus \{\mathbf{0}\}, \tag{16}$$

*которая будет соответствовать задаче* (5), (14). Согласно теореме 2 b), если найти некоторое решение $x^*$ задачи (15) при $p \in \operatorname{int} Q^\star$ и выполнении условий теоремы 2 b), то оно будет и решением задачи (16). Для уточнения весового вектора $p$ можно применить алгоритм C.

Теперь обратимся к *бескоалиционной игре $N$ лиц с векторными функциями выигрыша* (см. [14], [15], а также, например, [1], [16]).

Пусть $X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ — множества стратегий, а $H_i : X \to \mathbb{R}^{m_i}$ — функции выигрыша игроков, $Q_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$, $i = 1, \dots, N$, — множества, определяющие отношения предпочтения игроков в игре $N$ лиц, где

$$X = X_1 \times \dots \times X_N$$

обозначает множество ситуаций, $n = \sum_{i=1}^{N} n_i$. Тогда в качестве решения игры можно принять точку слабого равновесия по Нэшу, т.е. точку $x^* = (x_1^*, \dots, x_N^*) \in X$, для которой выполняются соотношения

$$\overline{\exists} y_i \in X_i, \quad H_i(x_{-i}^*, y_i) - H_i(x^*) \in \operatorname{int} Q_i, \quad i = 1, \dots, N, \tag{17}$$

где $(x_{-i}, y_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$. Здесь предполагается также, что $\mathbf{0} \in Q_i \setminus \operatorname{int} Q_i$, $\operatorname{int} Q_i \neq \varnothing$ для любого $i = 1, \dots, N$. Таким образом, предпочтения и пространства оценок игроков различны, что затрудняет исследование свойств такого решения. Чтобы использовать скаляризацию, выберем элементы $p^i \in Q_i^* \setminus \{\mathbf{0}\}$ и определим функцию

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \langle p^i, H_i(x_{-i}, y_i) - H_i(x) \rangle.$$

Если $x^* \in X$ — решение скалярной (нормализованной) задачи равновесия [17]

$$\Phi(x^*, y) \leq 0 \quad \forall y \in X, \tag{18}$$

то

$$\Big\langle p^i, H_i(x^*_{-i}, y_i) - \sum_{i=1}^{N} H_i(x^*) \Big\rangle \leq 0, \quad y_i \in X_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

а значит, $x^*$ — решение задачи (17) согласно теореме 1 b). По поводу задач вида (18) см., например, [18] и указанные там ссылки. Аналогичным образом строится скаляризация в случае более сильного понятия решения вида (16), возможны и различные типы решения для разных игроков. Во всех случаях можно найти требуемое решение, а также применить алгоритм C для поиска весовых векторов $p^i$.

Рассмотрим приложение к *векторным вариационным неравенствам*, которые весьма интенсивно исследуются (например, [19], [18], [4]). Такие задачи, в частности, могут быть выведены из условий оптимальности для векторных задач оптимизации и равновесия, а также в виде самостоятельных моделей равновесного типа.

Пусть $X$ — непустое, выпуклое и замкнутое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $F : X \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ — некоторое отображение, $Q$ — выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$, определяющее отношение предпочтения, причем $\mathbf{0} \in Q \setminus \operatorname{int} Q$. Если предположить дополнительно, что $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$, то можно определить задачу: *найти точку $x^* \in X$ такую, что*

$$F(x^*)(x - x^*) \notin -\operatorname{int} Q \quad \forall x \in X. \tag{19}$$

Установим связь со скаляризованной задачей: *найти точку $x^* \in X$ такую, что*

$$\langle p, F(x^*)(x - x^*) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X \tag{20}$$

*для некоторого элемента $p \in Q^\star \setminus \{\mathbf{0}\}$*. Если определить отображение $f^{(p)}(x) = F(x)^\top p$ из $X$ в $\mathbb{R}^n$, то соотношение (20) можно представить в виде обычного вариационного неравенства

$$\langle f^{(p)}(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X. \tag{21}$$

**Теорема 3.** *При сделанных предположениях*

a) *любое решение задачи* (19) *является решением задачи* (20) *при некотором* $p \in Q^\star \setminus \{\mathbf{0}\}$;

b) *любое решение задачи* (20) *при* $p \in Q^\star \setminus \{\mathbf{0}\}$ *является решением задачи* (19).

*Доказательство.* Обозначим

$$\overline{y} = -F(x^*)x^*, \quad Y = \{y \mid y = -F(x^*)x, \ x \in X\}. \tag{22}$$

Тогда утверждение b) следует из п. b) теоремы 1. Поскольку множество $Y$ выпукло, то утверждение a) также следует из п. a) теоремы 1. □

Пусть $Q$ — выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{0} \in Q \setminus \operatorname{int} Q$, при этом конус $K = \operatorname{cone} Q$ имеет выпуклую и компактную базу. Определим задачу: *найти точку $x^* \in X$ такую, что*

$$F(x^*)(x - x^*) \notin -Q \setminus \{\mathbf{0}\}, \tag{23}$$

*и установить ее связь со скаляризованной задачей* (20).

**Теорема 4.** *При сделанных предположениях*

a) *любое решение задачи* (23) *является решением задачи* (20) *при некотором* $p \in \operatorname{int} Q^{\star}$, *если конус* $\operatorname{cone}(Y - \overline{y})$ *замкнут, где множество* $Y$ *и элемент* $\overline{y}$ *определены в* (22);

b) *любое решение задачи* (20) *при* $p \in \operatorname{int} Q^{\star}$ *является решением задачи* (23).

*Доказательство.* Утверждение b) при выполнении (22) следует из п. b) теоремы 2. Далее, поскольку множество $Y$ в (22) будет выпуклым, то утверждение a) также следует из п. a) теоремы 2. □

Таким образом, решения векторных вариационных неравенств (19) и (23) можно найти из скаляризованной задачи (20) (или (21)) при надлежащем выборе вектора $p$.

## Литература


[1] *Современное состояние теории исследования операций*, Под ред. Н.Н. Моисеева (Наука, М., 1979).

[2] Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач* (Наука, М., 1982).

[3] Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T. *Theory of multiobjective optimization* (Academic Press, New York, 1985).

[4] Chen G.Y., Huang X.X., Yang X.Q. *Vector optimization* (Springer, Berlin, 2005).

[5] Пшеничный Б.Н. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи* (Наука, М., 1980).

[6] Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. *Недифференцируемая оптимизация* (Наука, М., 1981).

[7] Коннов И.В., Хабибуллин Р.Ф. *Алгоритм отыскания элемента из сопряженного конуса*, Исслед. по прикл. матем. (Казань, 1984) **11** (1), 32–40.

[8] Barvinok A. *A course in convexity* (AMS, Providence, 2002).

[9] Isac G., Bulavsky V.A., Kalashnikov V.V. *Complementarity, equilibrium, efficiency and economics* (Kluwer, Dordrecht, 2002).

[10] Гурвиц Л. *Программирование в линейных пространствах*, в кн.: Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию (Ин. лит., М., 1962), с. 65–155.

[11] Luc D.T. *Theory of vector optimization* (Springer, Berlin, 1989).

[12] Ногин В.Д. *Принятие решений в многокритериальной среде* (Физматлит, М., 2002).

[13] Подиновский В.В. *Аксиоматическое решение проблемы важности критериев в многокритериальных задачах* / В кн. *Современное состояние теории исследования операций* (Наука, М., 1979), с. 117–149.

[14] Farquharson R. *Sur une généralisation de la notion d' équilibrium*, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris **240**, 46–48 (1955).

[15] Blackwell D. *An analogue of the minimax theorem for vector payoffs*, Pacific J. Math. **6** (1), 1–8 (1956).

[16] Коннов И.В. *Комбинированный релаксационный метод для поиска векторного равновесия*, Изв. вузов. Матем., № 12, 54–62 (1995).

[17] Nikaidô H., Isoda K. *Note on noncooperative convex games*, Pacific J. Math. **5** (Suppl. 1), 807–815 (1955).

[18] Konnov I.V. *Generalized monotone equilibrium problems and variational inequalities*, Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, Ed. by N. Hadjisavvas, S. Komlósi, and S. Schaible (Springer, New York, 2005), chap. 13, pp. 559–618.

[19] *Vector variational inequalities and vector equilibria. Mathematical theories*, Ed. by F. Giannessi (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 2000).



*И.В. Коннов*

*профессор, кафедра системного анализа и информационных технологий,*
*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*
*ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

`e-mail:` konn-igor@yandex.ru

*I.V. Konnov*

**On scalarization of vector optimization type problems**

*Abstract.* We consider scalarization issues for vector problems in the case when the preference relation is represented by a rather arbitrary set. We propose an algorithm for weights choice for a priori unknown preference relations. We give some examples of applications to vector optimization problems, game equilibrium ones, and to variational inequalities.

*Keywords*: vector problems, scalarization, algorithm for weights choice.

*I.V. Konnov*

*Professor, Chair of System Analysis and Information Technologies,*
*Kazan (Volga Region) Federal University,*
*18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

`e-mail:` konn-igor@yandex.ru