ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 4 (479)

УДК 517.544

И.Т. ДЕНИСЮК

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ С НЕГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ

Задачи сопряжения аналитических функций в двумерных областях с кусочно-гладкими границами изучались в работах [1], [2]. В данной статье рассматривается задача построения гармонических функций в областях пространства R^3 при условии сопряжения их на поверхностях, содержащих негладкости типа особых линий (множеств угловых точек) и конических точек.

1. *Постановка задачи.* Пусть в R^3 содержатся односвязные конечные области V_i, $i=\overline{1,k_0}$, $V_i\cap V_l=\emptyset$, ограниченные замкнутыми поверхностями S_i, содержащими гладкие замкнутые непересекающиеся особые линии (множества угловых точек) L_{ij}, $j=\overline{1,p_i}$, и конические точки $O_{ik}\notin L_{ij}$, $k=\overline{1,q_i}$.

Построим функции $F_i(x,y,z)$, гармонические в соответствующих областях V_i, и функцию $F_0(x,y,z)$, гармоническую в $V_0=R^3\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k_0}V_i$, при таких условиях сопряжения на поверхностях S_i:

в точках гладкости $N_0\in S_i$, $N_0\notin L_{ij}$, $N_0\neq O_{ik}$,

$$F_i^+(N_0)-F_0^-(N_0)=0, \tag{1}$$

$$\lambda_i\partial F_i^+(N_0)/\partial n-\lambda_0\partial F_0^-(N_0)/\partial n=0; \tag{2}$$

в точках особых линий L_{ij} или в конических точках O_{ik}

$$\lim[F_i^+(N_0)-F_0^-(N_0)]=0,\quad \lim[\lambda_i\partial F_i^+(N_0)/\partial n-\lambda_0\partial F_0^-(N_0)/\partial n]=0, \tag{3}$$

где пределы берутся при $N_0\to M_0\in L_{ij}$ в плоскости, нормальной к особой линии, или при $N_0\to O_{ik}$, постоянные $\lambda_0,\lambda_i\in R$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S_i. Верхний индекс $\pm$ означает граничное значение гармонической функции при подходе к поверхности S_i со стороны области V_i (знак $+$) или V_0 (знак $-$). Считаем, что вблизи своей вершины коническая поверхность имеет прямолинейную образующую и криволинейную гладкую замкнутую направляющую.

К такой задаче приводятся некоторые проблемы механики сплошной неоднородной среды [3], [4]. Гармоничность функций $F_i(M)$ в точках особых линий L_{ij} или в конических точках O_{ik} понимается как выполнение равенства

$$\lim\iiint\limits_{V^*}\nabla^2F(M)dv=0,\quad M_0^*\in V^*, \tag{4}$$

где пределы берутся при $V^*\to M_0^*$, т. е. при стягивании области V^* в точку M_0^*, что физически обусловлено необходимостью выполнения законов сохранения энергии в особых точках среды [3]–[5], при этом $M=M(x,y,z)$, $M_0^*\in L_{ij}$ или $M_0^*=O_{ik}$.

2. *Асимптотика гармонических функций.* Для установления характера гармонических функций изучим их поведение в локальных областях особых точек.

Лемма 1. *Если в точках особой линии L величина*

$$m=\pi/(2\pi-\varpi), \tag{5}$$

где ϖ — угол раствора поверхностей в точках особой линии в плоскости, нормальной к ней, принадлежит интервалу $(0, 1)$, то гармоническая функция и ее нормальная производная имеют асимптотическое представление

$$
\begin{aligned}
F_i(x, y, z) &= \rho^m (C_{i1} \cos m\theta + C_{i2} \sin m\theta) + O(\rho^{m+1}), \\
\partial F_i(x, y, z)/\partial n &= \rho^{m-1} (C_{i2} m \cos m\theta - C_{i1} m \sin m\theta) + O(\rho^m), \quad i = 0, 1,
\end{aligned} \tag{6}
$$

где ρ, θ, s — локальные координаты, $C_{iq} = C_{iq}(s)$, $q = 1, 2$, — величины, зависящие от s.

Доказательство. Пусть особая линия L является пересечением гладких поверхностей S_1 и S_2, $L = S_1 \cap S_2$. Натянем на L гладкую поверхность S_0, на которой введем ортогональные координаты u, v так, что при $v = \text{const}$ описывается особая линия L, и в результате параметризации полагаем $u = s$, где s — длина дуги L, отсчитываемая от некоторой начальной точки ([6], с. 58). Пусть $\mathbf{n}\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2$ — сопровождающий трехгранник поверхности S_0 в точке M_0 кривой, где $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ — орты, лежащие в плоскости, касательной к S_0 в точке M_0, $\mathbf{n}_1$ — касательный вектор к кривой L, $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_1$, $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_2$. Точки M плоскости векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}_2$ определяем полярными координатами (ρ, θ), θ — угол между векторами $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$ и $\mathbf{n}_2$.

Представление

$$
\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \rho(\cos\theta\, \mathbf{n}_2(s) + \sin\theta\, \mathbf{n}(s)), \tag{7}
$$

где $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}$ — радиус-векторы точек M_0, M, содержит криволинейные ортогональные координаты ρ, θ, s точки M локальной области пространственной кривой L с коэффициентами Ламе $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1 + \rho H_0$, $H_0 = -(p \cos\theta + r_1 \sin\theta)$, $p = -|\mathbf{r}_s|_v / |\mathbf{r}_v|$, $r_1 = (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{ss})/|\mathbf{r}_s|$.

Уравнение Лапласа $\Delta F(x, y, z) = 0$ допускает преобразование подобия

$$
F = A_1 F(B_1 x, B_1 y, B_1 z), \tag{8}
$$

где $A_1 = A_1(B_1)$, $A_1, B_1 \in R$. Дифференцируя соотношение (8) по B_1, получаем уравнение

$$
F(x, y, z) dA_1/dB_1 + A_1(\operatorname{grad} F(x, y, z), \mathbf{r}) = 0,
$$

в решение которого

$$
F(x, y, z) = F_0^*(x, y, z) \tag{9}
$$

входит однородная функция $F_0^*(x, y, z)$ m-го порядка переменных x, y, z. Переходя в (9) к криволинейным координатам (7), устанавливаем, что гармоническая функция принадлежит степенному классу относительно переменной ρ

$$
F_i = \rho^m A_i(\theta, s), \quad i = 0, 1. \tag{10}
$$

Подставляя представление (10) в уравнение (4), записанное в координатах ρ, θ, s, находим определяющее уравнение для функции $A_i(\theta, s)$

$$
\partial^2 A_i / \partial\theta^2 + m^2 A_i = 0, \quad m > 0,
$$

решение которого и дает асимптотическое представление (6). Удовлетворяя граничным условиям (3) с помощью (10), получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно величин C_{iq}. Она разрешима, если ее определитель равен нулю, что и дает соотношение (5). $\square$

Пусть точка O является вершиной конической поверхности с прямолинейными образующими и гладкой замкнутой направляющей L_0, очерченной ортом $\mathbf{r}_0(s_1)$ образующей с началом в точке O. Здесь s_1 — длина дуги направляющей, отсчитываемая от некоторой начальной точки. Введем локальные криволинейные координаты ρ_1, θ_1, s_1 согласно равенству

$$
\mathbf{r}_1 = \rho_1(\mathbf{r}_0(s_1) \sin\theta_1 + \mathbf{n}_3(s_1) \cos\theta_1), \tag{11}
$$

где $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор точки $M(x,y,z)$, $\mathbf{n}_3(s_1)=[\mathbf{r}_0(s_1), d\mathbf{r}_0(s_1)/ds_1]$ — нормаль к образующей $\mathbf{r}_0(s_1)$ конической поверхности в точке O, $\rho=|\mathbf{r}_1|$, θ_1 — угол, образованный вектором $\mathbf{r}_1$ с нормалью $\mathbf{n}_3(s_1)$. Такие криволинейные координаты ортогональны с коэффициентами Ламе $h_1=1$, $h_2=\rho_1$, $h_3=\rho_1 H_{01}$, $H_{01}=\sin\theta_1+d_1\cos\theta_1$, $d_1=|[\mathbf{r}_0(s_1), d^2\mathbf{r}_0(s_1)/ds_1^2]|$, а при $\theta_1=\pi/2$ уравнение (11) описывает коническую поверхность. Аналогично доказательству леммы 1 устанавливаем, что гармоническая функция в окрестности конической точки принадлежит степенному классу

$$F(x,y,z)=\rho_1^{m_0}D(\theta_1,s_1). \tag{12}$$

Удовлетворяя уравнению (4), записанному в координатах ρ_1, θ_1, s_1, с помощью (12) находим уравнение

$$Q_{m_0}[D(\theta_1,s_1)]=0, \tag{13}$$

где оператор имеет вид

$$Q_{m_0}[\cdot]=H_{01}^{-1}(\partial(H_{01}\partial/\partial\theta_1)/\partial\theta_1+\partial(H_{01}^{-1}\partial/\partial s_1)/\partial s_1)+m_0(m_0+1).$$

Величины H_{01}, H_{01}^{-1} являются дифференцируемыми, периодическими по s_{01} функциями (s_{01} — длина направляющей L_0) и в таком классе строим функцию ([7], с. 507)

$$D(\theta_1,s_1)=\sum_{n=0}^{K}(D_{n1}(\theta_1)\cos nls_1+D_{n2}(\theta_1)\sin nls_1)+O(1/K), \tag{14}$$

где $l=2\pi/s_{01}$.

Подставляя отрезки рядов Фурье для H_0, H_0^{-1}, $D(\theta_1,s_1)$ типа (14) в уравнение (13), группируя и приравнивая выражения при гармониках $n=\overline{0,K}$ нулю, получим систему $2K+1$ обыкновенных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $D_{nq}(\theta_1)$, $q=1,2$. Такая система совместима ([8], сс. 12, 135) и имеет решение

$$D_{nq}(\theta_1)=\sum_{k=1}^{2(2K+1)}C_{nqk}\Phi_k(\theta_1), \tag{15}$$

где $\Phi_k(\theta_1)$ — ограниченные и определенные при $\theta_1\in[-\pi,\pi)$ функции фундаментального множества решений системы, C_{nqk} — произвольные постоянные.

Из (12), (15) следует представление гармонической функции в локальной области

$$F(\rho_1,\theta_1,s_1)=\rho_1^{m_0}\Big(\sum_{n=0}^{K}(D_{n1}(\theta_1)\cos nls_1+D_{n2}(\theta_1)\sin nls_1)+O(1/K)\Big)+O(\rho_1^{m_0+1}). \tag{16}$$

Если $m_0\in(0,1)$, то нормальная производная принимает сингулярности степенного характера в конической точке

$$\partial F/\partial n=\rho_1^{m_0-1}\Big(\sum_{n=0}^{K}(dD_{n1}(\theta_1)/d\theta_1\cos nls_1+dD_{n2}(\theta_1)/d\theta_1\sin nls_1)+O(1/K)\Big)+O(\rho_1^{m_0}). \tag{17}$$

Пусть H_{01} в коэффициентах Ламе соотношения (11) не зависит от переменной s_1, что отвечает, например, круговому конусу, тогда $H_{01}=(1+d^2)^{1/2}\sin\theta_{11}$, $\theta_{11}=\theta_1+\beta$, $\operatorname{tg}\beta=d$. При этом функция $D(\theta_1)$ в представлении (12) является функцией одной переменной θ_1, а уравнение (13) переходит в уравнение Лежандра ([9], с. 125) и гармоническая функция представляется так

$$F(\theta_1)=C_0\rho_1^{m_0}P_{m_0}(\cos\theta_1)+O(\rho_1^{m_0+1}), \tag{18}$$

а ее нормальная производная при $m_0\in(0,1)$ принимает сингулярность в конической точке

$$\partial F/\partial n=\rho_1^{m_0-1}C_0dP_{m_0}(\cos\theta_1)/d\theta_1+O(\rho_1^{m_0}), \tag{19}$$

где $P_{m_0}(\cos\theta_1)$ — функции Лежандра, C_0 — постоянная.

Отметим, что в представления (18), (19) вошли только функции Лежандра первого рода как ограниченные при $\theta_1 \in [-\pi, \pi)$.

Подставляя выражения для гармонических функций и их производных типа (16), (17) в условия (3), записанные в локальных координатах ρ_1, θ_1, s_1, полагая $\theta_1 = \pi/2$ и приравнивая выражения при одинаковых степенях ρ_1 и гармониках нулю, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Приравнивая определитель такой системы нулю, получаем характеристическое уравнение для определения величины m_0

$$\Delta_0(m_0) = 0. \tag{20}$$

Аналогично поступая с представлениями (18), (19), находим характеристическое уравнение

$$P_{m_0}(\cos\theta_1) = 0. \tag{21}$$

Таким образом, доказана

Лемма 2. *Если характеристические уравнения* (20), (21) *имеют корни* $m_0 \in (0,1)$, *то гармонические функции и их нормальные производные имеют асимптотику* (16)–(19).

Отметим, что множество корней $m_0 \in (0,1)$ характеристических уравнений (20), (21) непустое ([10], с. 320).

3. *Разрешимость задачи.* Перейдем к общему случаю задачи сопряжения (1)–(3).

Теорема. *Если в каждой точке особой линии выполняется условие* $m = \pi/(2\pi - \varpi) < 1$, *а в каждой конической точке существуют корни* $m_0 \in (0,1)$ *характеристических уравнений* (20), (21), *то задача сопряжения* (1)–(3) *безусловно разрешима.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай одной конечной области V_1 с граничной поверхностью $S = \bigcup\limits_{j=1}^{n_1} S_j$, содержащей конические точки O_k, $k = \overline{1, m_1}$, и гладкие замкнутые непересекающиеся особые линии $L_j = S_j \cap S_{j+1}$, $j = \overline{1, n_1 - 1}$, $O_k \notin L_j$. Поверхности S_j определяются уравнениями $f_j(x,y,z) = 0$, а поверхности, натянутые на контуры L_j, описываются уравнениями $f_{0j}(x,y,z) = 0$.

Представим гармонические функции в виде

$$F_0(M) = F_{01}(M) + F_{02}(M), \quad M \in V_0, \tag{22}$$

$$F_1(M) = F_{11}(M) + F_{12}(M), \quad M \in V_1, \tag{23}$$

где первые слагаемые реализуют асимптотику (6), (16)–(19) в зависимости от типа негладкости, а вторые являются ограниченными непрерывными функциями в своих областях определения.

Множество точек гладкости поверхности S является кусочно-гладкой поверхностью. Представим первые слагаемые посредством потенциалов простого и двойного слоя, которые являются гармоническими исчезающими на бесконечности функциями ([11], с. 398),

$$F_{i1}(M) = \int\limits_S \Big(\prod_{j=1}^{n_1-1} \mu_{ij1}^{(1)}(N)\Big)\Big(\prod_{k=1}^{p_1} \mu_{ik1}^{(2)}(N)\Big) R^{-1} ds + {} \\ + \iint\limits_S \Big(\prod_{j=1}^{n_1-1} \mu_{ij1}^{(3)}(N)\Big)\Big(\prod_{k=1}^{p_1} \mu_{ik1}^{(4)}(N)\Big) \partial R^{-1}/\partial n \, ds, \tag{24}$$

где $N = N(\xi, \eta, \chi) \in S$, $R = ((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\chi)^2)^{1/2}$, $i = 0, 1$, производные берутся по направлению внешней нормали к S.

Для особых линий берем плотности в виде

$$\mu_{ij1}^{(3)}(N) = (-1)^{i+1}/(2\pi) R_j^{m_j}(N)(C_{i1j}\cos(m_j T_j(N)) + C_{i2j}\sin(m_j T_j(N))), \tag{25}$$

$$\mu_{ij1}^{(1)}(N) = (-1)^{i+1} m_j/(2\pi) R_j^{m_j-1}(N)(C_{i2j}\cos(m_j T_j(N)) - C_{i1j}\sin(m_j T_j(N))), \tag{26}$$

где

$$R_j(N) = ((f_{0j}(N)/|\operatorname{grad} f_{0j}(N)|)^2 + Q_j^2(N))^{1/2},$$
$$T_j(N) = \arcsin(f_{0j}(N)/(|\operatorname{grad} f_{0j}(N)|R_j(N))),$$
$$Q_j(N) = f_j(N)/|\operatorname{grad} f_j(N)| + (1 - (\mathbf{G}_{2j}(N), \mathbf{G}_{0j}(N))^2 f_{0j}(N)/|\operatorname{grad} f_{0j}(N)|)(\mathbf{G}_{0j}(N), \mathbf{G}_{2j}(N)),$$
$$\mathbf{G}_j(N) = \operatorname{grad} f_j(N)/|\operatorname{grad} f_j(N)|,$$
$$\mathbf{G}_{0j}(N) = \operatorname{grad} f_{0i}(N)/|\operatorname{grad} f_{0j}(N)|,$$
$$\mathbf{G}_{2j}(N) = [[\mathbf{G}_j(N), \mathbf{G}_{j+1}(N)]/|[\mathbf{G}_j(N), \mathbf{G}_{j+1}(N)]|, \mathbf{G}_{0j}(N)].$$

Для конических точек имеем

$$\mu_{ik1}^{(4)}(N) = (-1)^{i+1}/(2\pi) R_k^{m_k}(N) \sum_{n=0}^{K} (D_{ikn1}(T_k(N)) \cos(n\pi S_k(N)/s_{k0}) + \\ + D_{ikn2}(T_k(N)) \sin(n\pi S_k(N)/s_{k0})), \tag{27}$$

$$\mu_{ik1}^{(2)}(N) = (-1)^{i+1}/(2\pi) R_k^{m_k-1}(N) \sum_{n=0}^{K} (dD_{ikn1}(T_k(N))/dT_k(N) \cos(n\pi S_k(N)/s_{k0}) + \\ + dD_{ikn2}(T_k(N))/dT_k(N) \sin(n\pi S_k(N)/s_{k0})), \tag{28}$$

где

$$R_k(N) = ((\xi - x_k)^2 + (\eta - y_k)^2 + (\chi - z_k)^2)^{1/2},$$
$$T_k(N) = \arcsin(l_{0k}(N)(\xi - x_k) + m_{0k}(N)(\eta - y_k) + n_{0k}(N)(\chi - z_k)),$$
$$S_k(N) = \int_0^{\varphi_k} ((dl_{0k}(N)/d\varphi_k)^2 + (dm_{0k}(N)/d\varphi_k)^2 + (dn_{0k}(N)/d\varphi_k)^2)^{1/2} d\varphi_k,$$

$\varphi_k = \varphi_k(\xi, \eta)$, $O_k = O_k(x_k, y_k, x_k)$, $l_{0k}(N)$, $m_{0k}(N)$, $n_{0k}(N)$ — координаты орта образующей $\mathbf{r}_{0k}(N)$, D_{iknq} — известные функции в представлении (15).

Аналогичные формулы в частном случае асимптотики (18),(19)

$$\mu_{ik1}^{(4)}(N) = (-1)^{i+1}/(2\pi) R_k^{m_k}(N) C_{0k} P_{m_k}(\cos T_{1k}(N)),$$
$$\mu_{ik1}^{(2)}(N) = (-1)^{i+1}/(2\pi) R_k^{m_k-1}(N) C_{0k} dP_{m_k}(\cos T_{1k}(N))/dT_{1k}(N),$$

где $T_{1k}(N) = T_k(N) + \beta$, P_{m_k} — функции Лежандра.

Подставляя гармонические функции (22), (23) с учетом (24)–(28) в граничные условия (3), убеждаемся, что они удовлетворяются, а функции и их производные имеют асимптотику (6), (16)–(19). При этом учитываем, что согласно леммам 1, 2 $m_j, m_k \in (0, 1)$ и граничные значения потенциалов простого и двойного слоя в точках гладкости поверхности сопряжения определяются известными значениями [11], и переходим в них к локальным координатам согласно (7), (11).

Вторые слагаемые гармонических функций (22), (23) записываем потенциалами простого и двойного слоя с неизвестными плотностями $\mu_{i2q}(N)$, $q = 1, 2$,

$$F_{02}(M) = F_{00}(M) + \iint_S \mu_{021}(N) R^{-1} ds + \iint_S \mu_{022}(N) \partial R^{-1}/\partial n\, ds, \tag{29}$$

$$F_{12}(M) = F_{11}^*(M) + \iint_S \mu_{121}(N) R^{-1} ds + \iint_S \mu_{122}(N) \partial R^{-1}/\partial n\, ds, \tag{30}$$

где $F_{00}(M)$, $F_{11}^*(M)$ — заданные гармонические слагаемые, обусловленные физической сущностью задачи [3].

Для нахождения плотностей подставляем (22), (23), (29), (30) в граничные условия (1), (2) и полагаем ввиду произвольности плотностей

$$\mu_{121}(N) = \mu_{021}(N), \quad \mu_{122}(N) = \mu_{022}(N).$$

В результате находим

$$\mu_{022}(N) = h_0(N),$$

а для плотности $\mu_{021}(N)$ получаем интегральное уравнение

$$\mu_{021}(N_0) - (\sigma/(2\pi))\partial\Big(\iint\limits_S \mu_{021}(N)R^{-1}\,ds\Big)/\partial n = g_0(N_0), \tag{31}$$

где $N_0 \in S$,

$$h_0(N) = (F_{01}^-(N) + F_{00}^+(N) - (F_{11}^+(N) + F_{11}^{*+}(N)))/(4\pi),$$
$$g_0(N_0) = (\gamma(\partial F_{01}^-/\partial n + \partial F_{00}^-/\partial n) - (\partial F_{11}^+/\partial n + \partial F_{11}^{*+}/\partial n))/(2\pi(1+\gamma)) -$$
$$-(\sigma/(2\pi))\partial\Big(\iint\limits_S h_0(N)\partial R^{-1}/\partial n\,ds\Big)/\partial n,$$
$$F_{i1} = F_{i1}(N_0), \quad F_{00} = F_{00}(N_0), \quad F_{11}^* = F_{11}^*(N_0), \quad \sigma = (1-\gamma)/(1+\gamma), \quad \gamma = \lambda_0/\lambda_1.$$

Правая часть уравнения (31) ввиду выполнения условий (3) является непрерывной ограниченной функцией на S, поэтому это уравнение с полярным ядром ([11], с. 279).

Однородное союзное уравнение

$$\mu_{021}^*(N_0) - (\sigma/(2\pi))\iint\limits_S \mu_{021}^*(N)\partial R^{-1}/\partial n\,ds = 0$$

можно трактовать как выполнение условия (1) для функции

$$F^*(M) = \Gamma\iint\limits_S \mu_{021}^*(N)\partial R^{-1}/\partial n\,ds,$$

причем $\Gamma = \gamma$, если $M \in V_0$, и $\Gamma = 1$, если $M \in V_1$. Она является ввиду (1) непрерывной гармонической функцией во всем пространстве, принимающей постоянное значение ввиду (2) на S и обращающейся в нуль на бесконечности. Следовательно, эта функция тождественно равна нулю ([11], с. 374).

В случае нескольких непересекающихся конечных односвязных областей V_i, $i = \overline{1, k_0}$, гармонические функции $F_i(M)$, $M \in V_i$, строим аналогично (23), (24) для каждой области. Гармоническую функцию $F_0(M)$, $M \in V_0$, берем в виде (24), где

$$F_{01}(M) = \sum_{i=1}^{k_0} F_{0i1}(M), \quad F_{02}(M) = \sum_{i=1}^{k_0} F_{0i2}(M);$$

здесь слагаемые $F_{0i1}(M)$ строятся с учетом негладкостей соответствующих поверхностей S_i аналогично (24)–(28), а слагаемые $F_{0i2}(M)$ представляются в виде (29). $\square$

Для конкретных физических задач рассмотренная задача дополняется условиями аналогично двумерному случаю [12], [13].

Литература

1. Денисюк И.Т. *Решение одной задачи сопряжения для составной области с угловыми точками на линиях раздела* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 6. – С. 17–24.
2. Денисюк И.Т. *Одна задача сопряжения аналитических функций в аффинно преобразованных областях с кусочно-гладкими границами* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 6. – С. 70–74.
3. Седов Л.И. *Механика сплошной среды.* Т. 1. – М.: Наука, 1973. – 536 с.
4. Седов Л.И. *Механика сплошной среды.* Т. 2. – М.: Наука, 1973. – 568 с.
5. Денисюк И.Т. *Напряженное состояние вблизи особой линии поверхности раздела сред* // Изв. РАН. Механ. тверд. тела. – 1995. – № 5. – С. 64–70.
6. Норден А.П. *Краткий курс дифференциальной геометрии.* – М.: ГИФМЛ, 1958, – 244 с.
7. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Учеб. пособие. Т. 3. – М.: Наука, 1969. – 656 с.
8. Петровский И.Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1979. – 280 с.
9. Бейтмен Г., Эрдейи Г. *Высшие трансцендентные функции.* Ч. 1. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
10. Партон В.З., Перлин П.И. *Методы математической теории упругости.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
11. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1971. – 512 с.
12. Денисюк И.Т. *Термоупругость изотропной пластинки с угловыми включениями* // Изв. РАН. Механ. тверд. тела. – 1999. – № 2. – С. 148–155.
13. Денисюк И.Т. *Одна модель тонких упругих включений в изотропной пластинке* // Изв. РАН. Механ. тверд. тела. – 2000. – № 4. – С. 140–148.

Луцкий государственный
технический университет (*Украина*)

Поступила
28.11.2000