ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 8 (483)

УДК 517.443

Д.К. УГУЛАВА

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ПЭЛИ–ВИНЕРА

Пусть G — локально компактная абелева группа с мерой Хаара μ, $L^p(G)$ — пространство интегрируемых в p-й степени ($1 \le p < \infty$) на G по мере μ функций f с нормой $\|f\|_{L^p(G)} = \{\int_G |f|^p d\mu\}^{1/p}$, а $\widehat{G}$ — дуальная к G группа, состоящая из непрерывных комплексных характеров группы G. Предположим, что топология G хаусдорфова. В [1] изучены аппроксимативные свойства некоторых подпространств $W^p(K)$ в $L^p(G)$. При $1 \le p \le 2$ подпространство $W^p(K)$ состоит из функций, преобразование Фурье которых равно нулю почти всюду вне симметрического компактного множества K из $\widehat{G}$, которое является замыканием окрестности единицы. Интересно дать новые характеристики для функций из $W^p(K)$. Ниже для связных G приведем одну характеристику для случая $p = 2$, которую можно считать некоторым аналогом теоремы Пэли–Винера ([2], с. 129; [3], с. 109). Согласно этой теореме, если G есть n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}_n$, а K — симметричное тело из $\mathbb{R}_n$, то функция $f \in L^2(\mathbb{R}_n)$ принадлежит $W^2(K)$ тогда и только тогда, когда она почти всюду совпадает с сужением на $\mathbb{R}_n$ некоторой функции F экспоненциального типа K (т. е. F — аналитическая функция на всем n-мерном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}_n$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется число A_ε такое, что $|F(z)| \le A_\varepsilon \exp\{(1+\varepsilon)\sup_{y\in K}|z\cdot y|\}$, где $z \cdot y$ — скалярное произведение точек $z, y \in \mathbb{C}_n$) [1].

Докажем одно вспомогательное предложение. Напомним, что непрерывный гомоморфизм группы G в аддитивную группу $R = R_1$, т. е. функция из $\operatorname{Hom}(G, R)$, называется непрерывным вещественным характером группы G ([4], с. 495). Сумма вещественных характеров определяется поточечным образом, и относительно так определенной операции они образуют вещественную группу характеров.

Определение 1. Пусть K — симметричное компактное множество из G. Скажем, что K обладает B-свойством, если элемент g группы G, допускающий для некоторого натурального числа n представление $g^n = g_1^{n_1} g_2^{n_2} \dots g_k^{n_k}$, где $n_1, n_2, \dots, n_k$ — натуральные числа, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, а $g_1, g_2, \dots, g_k \in K$, принадлежит K.

Лемма. *Пусть G — локально компактная абелева группа, которая не содержит нетривиальных компактных подгрупп, а K — подмножество из G, обладающее B-свойством. Тогда для любой точки $g_o \in G$, не принадлежащей K, существует непрерывный вещественный характер $r \in \operatorname{Hom}(G, R)$ такой, что $\sup_{g\in K} r(g) \le 1$, $r(g_o) > 1$.*

Доказательство. Пусть $K_1 = K \bigcup \{g_o\}$. Известно ([4], с. 56), что существует открыто-замкнутая компактно порожденная подгруппа H в G, содержащая K_1. В индуцированной топологии H — локально компактная, компактно порожденная абелева группа, и по известной структурной теореме ([4], с. 121) она топологически изоморфна группе $\widetilde{H} = R_a \times Z_b \times F$, где a и b — некоторые неотрицательные целые числа, R_a — аддитивная группа вещественных чисел,

[1]В [2] F называется функцией экспоненциального типа K^*, где K^* — поляра множества K.

Z_b — целочисленная решетка в R_b, а F — компактная абелева группа. По условию в G нет нетривиальных компактных подгрупп. Поэтому $\widetilde{H} = R_a \times Z_b$. Пусть Θ — указанный изоморфизм, а $\widetilde{K} = \Theta(K)$ и $x = \Theta(g_o)$ — образы K и g_o в $\widetilde{H}$. Рассмотрим $\widetilde{K}$ как некоторое подмножество пространства R_{a+b}, и пусть $L\widetilde{K}$ — его выпуклая оболочка. Точки из $\widetilde{H}$ запишем в виде (y, z), где $y \in R_a$, $z \in Z_b$. При фиксированной точке $z_o \in Z_b$ множество $\Gamma = \widetilde{K} \bigcap (y, z_o)$, $y \in R_a$, является выпуклым множеством пространства R_{a+b}. Действительно, если $x_1, x_2 \in \Gamma$, то Z_b-координата точки $\frac{x_1+x_2}{2}$ снова есть z_o и $\frac{x_1+x_2}{2}$ лежит в $R_a \times z_o$. Это означает, что $\frac{x_1+x_2}{2} = \Theta(g)$ для некоторого $g \in H$. Тогда $g^2 = g_1 g_2$, где $g_i = \Theta^{-1}(x_i) \in K$, $i = 1, 2$, и $g \in K$ по определению 1. Значит, $\frac{x_1+x_2}{2} \in \Gamma$. Докажем, что $x = \Theta(g_o)$ лежит вне $L\widetilde{K}$. Допустим противное. Пусть $x \in L\widetilde{K}$. Множество $L\widetilde{K}$ совпадает с выпуклой оболочкой конечного числа множеств типа Γ. Поэтому для некоторого натурального числа k существуют числа $0 < \alpha_i < 1$, $1 \leq i \leq k-1$, $\alpha_1 + \cdots \alpha_{k-1} < 1$, такие, что

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k-1} x_{k-1} + (1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_{k-1}) x_k \,, \tag{1}$$

где x_i, $1 \leq i \leq k$, принадлежат $\widetilde{K} = \Theta(K)$ и их Z_b-координаты различны. Будем предполагать, что k — наименьшее число, для которого справедливо представление (1). В этом случае коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ определяются однозначно. Приравнивая друг к другу соответствующие Z_b-координаты векторов, стоящих в левой и правой частях, получим систему

$$z^{(i)} - z_k^{(i)} = \alpha_1 (z_1^{(i)} - z_k^{(i)}) + \cdots + \alpha_{k-1} (z_{k-1}^{(i)} - z_k^{(i)}), \quad 1 \leq i \leq b, \tag{2}$$

где $z = (z^{(1)}, \ldots, z^{(b)})$, $z_i = (z_i^{(1)}, \ldots, z_i^{(b)})$.

Мы заранее знаем, что система (2) имеет решение относительно $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$. Ввиду того, что коэффициенты этой системы являются целыми числами, в качестве решения можно взять рациональные числа. Если (2) имеет единственное решение, то α_i, $1 \leq i \leq k-1$, являются рациональными числами и в (1) x является выпуклой комбинацией векторов $x_1, \ldots, x_k$ с рациональными коэффициентами. Но тогда для некоторого $n = n_1 + \cdots + n_k$, $n_i \in N$, $g_o^n = g_1^{n_1} \cdots g_k^{n_k}$, где $x = \Theta(g_o)$, $x_i = \Theta(g_i)$, $1 \leq i \leq k$. Так как K обладает B-свойством, то $g_o \in K$, а это невозможно. Если же система (2) имеет не единственное решение, то ранг r этой системы меньше b и некоторые неизвестные, например, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ линейно и однозначно выражаются через остальные неизвестные $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{k-1}$.

Пусть $\alpha_i = \varphi_i(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{k-1})$, $1 \leq i \leq r$, а $0 < \alpha_j^{(n)} < 1$, $r+1 \leq j \leq k-1$, — рациональные приближения чисел α_j, участвовавших в (1), такие, что $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_j^{(n)} = \alpha_j$. Тогда числа $\alpha_i^{(n)} := \varphi_i(\alpha_{r+1}^{(n)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(n)})$, $1 \leq i \leq r$, рациональны и $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_i^{(n)} = \alpha_i$, $1 \leq i \leq n$. Возьмем такие значения $n \geq n_o$, что $0 < \alpha_i^{(n)} < 1$, $1 \leq i \leq n$, и пусть $\widetilde{x}_n := \alpha_1^{(n)} x_1 + \cdots + \alpha_{k-1}^{(n)} x_{k-1} + (1 - \alpha_1^{(n)} - \cdots - \alpha_{k-1}^{(n)}) x_k$. Итак, $\widetilde{x_n}$ есть выпуклая комбинация с рациональными коэффициентами элементов $x_1, \ldots, x_k$ из $\widetilde{K}$ и $\widetilde{x}_n \in \widetilde{H}$. Поэтому в K существуют элементы $g^{(n)} \in K$ такие, что $\widetilde{x}_n = \Theta(g^{(n)})$. Но $\lim\limits_{n \to \infty} \widetilde{x}_n = x$, и, значит, $\lim\limits_{n \to \infty} g^{(n)} = g_o$. Так как K — замкнутое множество, то $g_o \in K$, что противоречит допущению. Итак, $x = \Theta(g_o)$ не принадлежит выпуклому множеству $L(\widetilde{K})$. Из симметричности множества K вытекает, что $\widetilde{K}$ — симметричное множество относительно начала в R_{a+b} и $O \in \widetilde{K}$. Поэтому $L(\widetilde{K})$ есть замкнутое уравновешенное выпуклое множество в R_{a+b}, и существует вещественный линейный непрерывный функционал f на R_{a+b} такой, что $\sup\limits_{\widetilde{g} \in \widetilde{K}} f(\widetilde{g}) \leq 1$, $f(\Theta(g_o)) > 1$ ([5], с. 73). Тогда функция $r_H(g) = f(\Theta(g))$ является вещественным характером группы H, который удовлетворяет условиям леммы. В силу теоремы о продолжении вещественного характера ([4], с. 496) существует непрерывный вещественный характер r на G, который совпадат на H с r_H. $\square$

Для функции $f \in L^p(G)$, $1 \le p \le 2$, через $\widehat{f}$ и $f^\vee$ соответственно обозначим прямое и обратное преобразования Фурье от f ([6], с. 268). Предполагаем, что меры Хаара на G и $\widehat{G}$ нормированы так, что имеет место формула обращения $f = (\widehat{f})^\vee$ для функций $f \in L^1(G)$, $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$.

Определение 2. Пусть K — симметричное компактное множество из $\widehat{G}$. Скажем, что функция $F(g, r)$, определенная и непрерывная на произведении $\widetilde{G} = G \times \mathrm{Hom}(\widehat{G}, R)$, принадлежит классу $A^2_K(G)$, если

1) существует определенная на $\widehat{G}$ функция φ такая, что $\varphi(\chi)e^{-r(\chi)} \in L^2(\widehat{G})$ для любого $r \in \mathrm{Hom}(\widehat{G}, R)$, а функция $F(g, r)$ представима в виде

$$F(g, r) = (\varphi(\chi)e^{-r(\chi)})^\vee(g) = \int_{\widehat{G}} \varphi(\chi)\chi(g)e^{-r(\chi)}d\chi; \tag{3}$$

2) для любого $r \in \mathrm{Hom}(\widehat{G}, R)$ справедлива оценка

$$\|F(g, r)\|_{L^2(G)} \le e^{\sup\limits_{\chi\in K} |r(\chi)|} \|\varphi\|_{L^2(\widehat{G})}. \tag{4}$$

Условие 1) означает, что функция $F(g, r)$ является преобразованием Лапласа от функции φ ([7], с. 49; [8]).

Заметим, что вопрос о представлении функции $F(g, r)$ в виде (3) тесно связан с понятием аналитичности, который ввел Г. Макки в [8] (см. также [7], с. 50 и [9]). В [8] без доказательства приведено предложение, согласно которому при определенных условиях классы функций, аналитических на $\widehat{G} \times K$ (K — некоторое выпуклое подмножество из $\mathrm{Hom}(G, R)$) и представимых в виде преобразования Лапласа, совпадают.

Теорема. *Пусть G — локально компактная связная абелева группа. Для того чтобы преобразование Фурье функции $f \in L^2(G)$ было равно нулю почти всюду вне множества K из $\widehat{G}$, обладающего B-свойством, необходимо и достаточно, чтобы f совпадала почти всюду с сужением на G некоторой функции из $A^2_K(G)$.*

Доказательство. Необходимость. Если преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции f равно нулю почти всюду (п. в.) вне K, то функция

$$F(g, r) = \int_K \widehat{f}(\chi)\chi(g)e^{-r(\chi)}d\chi$$

принадлежит классу $A^2_K(G)$. Действительно, она представима в виде (3) с $\varphi = \widehat{f}$ и для произвольного $r \in \mathrm{Hom}(\widehat{G}, R)$ является обратным преобразованием Фурье функции

$$\Phi(\chi) = \begin{cases} \widehat{f}(\chi)e^{-r(\chi)}, & \chi \in K; \\ 0, & \chi \notin K. \end{cases}$$

Следовательно, в силу теоремы Планшереля ([6], с. 268)

$$\|F(g, r)\|_{L^2(G)} = \|\Phi\|_{L^2(\widehat{G})} = \left\{ \int_K |\widehat{f}(\chi)|^2 e^{-2r(\chi)}d\chi \right\}^{\frac{1}{2}} \le e^{\sup\limits_{\chi\in K} |r(\chi)|} \|\widehat{f}\|_{L^2(\widehat{G})},$$

т. е. имеет место (4). Значит, $F \in A^2_K(G)$ и $\widehat{F(g, 0)} = \widehat{f}$. Поэтому ([6], с. 274) $H(g) = F(g, 0)$ п. в. в G. Необходимость доказана, притом без использования связности группы G.

Достаточность. Пусть функция $f \in L^2(G)$ п. в. совпадает с сужением на G некоторой функции F из $A^2_K(G)$, представимой в виде (3). $F(g, r)$ является обратным преобразованием Фурье функции $\varphi(\chi)e^{-r(\chi)}$ и по теореме Планшереля имеем

$$\int_G |F(g, r)|^2 dg = \int_{\widehat{G}} |\varphi(\chi)|^2 e^{-2r(\chi)}d\chi \quad \text{для всех} \quad r \in \mathrm{Hom}(\widehat{G}, R).$$

Согласно (4) получаем

$$\int_{\widehat{G}} |\varphi(\chi)|^2 e^{-2r(\chi)} d\chi \le e^{2\sup\limits_{\chi\in K}|r(\chi)|} \|\varphi\|^2_{L^2(\widehat{G})}. \tag{5}$$

Докажем, что это неравенство выполняется только в том случае, когда $\varphi = 0$ п.в. вне K. Возьмем $\chi_0 \notin K$ и через K^* обозначим множество тех r из $\mathrm{Hom}(\widehat{G}, R)$, для которых $r(\chi) \le 1$ для всех $\chi \in K$. Если $r \in K^*$, то $r^{-1} \in K^*$. Действительно, т.к. K — симметричное множество, то для $\chi \in K$ имеем $r^{-1}(\chi) = -r(\chi) = r(\chi^{-1}) \le 1$. G — связная группа и, следовательно, в $\widehat{G}$ нет нетривиальных компактных подгрупп ([4], с. 487). Для $\chi_0 \notin K$ в силу леммы существует $r_0 \in K^*$, для которого $r_0(\chi_0) > 1$. Тогда $-r_0(\chi_0) < -1$, $r_0^{-1}(\chi_0) < -1$. Обозначим $r_0^{-1} = \mu$. Тогда $\mu(\chi_0) < -1$. Для натурального числа n рассмотрим вещественный характер μ^n. Ясно, что $\mu^n(\chi) = n\mu(\chi)$. Так как μ — непрерывная функция, то существует $\delta > 0$ и окрестность $N = N(\chi_0)$ точки χ_0 такая, что $\mu(\chi) < -(1+\delta)$ для всех $\chi \in N$. Согласно (5) имеем

$$\int_N |\varphi(\chi)|^2 e^{2n(1+\delta)} d\chi \le \int_N |\varphi(\chi)|^2 e^{-2n\mu(\chi)} d\chi \le \|\varphi\|^2_{L^2(\widehat{G})} e^{2n\sup\limits_{\chi\in K}|\mu(\chi)|}.$$

Так как $\mu \in K^*$, то $|\mu(\chi)| \le 1$. Действительно, если $\mu(\chi_1) < -1$, то $\mu(\chi_1^{-1}) = -\mu(\chi_1) > 1$, что противоречит определению K^*. Значит,

$$\int_N |\varphi(\chi)|^2 e^{2n(1+\delta)} d\chi \le \|\varphi\|^2_{L^2(\widehat{G})} e^{2n}.$$

Допустим, что $\int\limits_N |\varphi(\chi)|^2 d\chi > 0$. Тогда

$$e^{2n\delta} \le \left(\int_N |\varphi(\chi)|^2 d\chi \right)^{-1} \|\varphi\|^2_{L^2(\widehat{G})},$$

что несправедливо для больших n. Итак, $\varphi(\chi) = 0$ для почти всех $\chi \in N$. Так как $\widehat{F(g,0)} = \varphi$, а $f = F(g,0)$ п.в. в G, то достаточность доказана.

Замечание 1. Предположение о связности G, т.е. о несуществовании в $\widehat{G}$ нетривиальных компактных подгрупп, в части достаточности теоремы является существенным. Действительно, пусть G несвязна и D — нетривиальная замкнутая подгруппа компактных элементов группы $\widehat{G}$ ([4], с. 123). На множестве KD^{-1}, $K \in U_{\widehat{G}}$, произвольный элемент r из $\mathrm{Hom}(\widehat{G}, R)$ может принять значения только из множества $r(K) \subset R$. Это следует из того, что группа R имеет только одну компактную группу (именно тривиальную), а $r(D) = 0$ для любого непрерывного вещественного характера. В качестве функции f возьмем обратное преобразование Фурье произвольной ненулевой функции $\varphi \in L^2(\widehat{G})$, носитель которой есть KD^{-1}. Тогда функция

$$F(g,r) = \int_{KD^{-1}} \varphi(\chi)\chi(g) e^{-r(\chi)} d\chi$$

удовлетворяет условиям теоремы, но носитель преобразования Фурье функции $f(g) = F(g,0)$ не принадлежит K.

Замечание 2. Попытка ослабить требование (4) в определении класса $A^2_K(G)$ путем введения в правой части в качестве множителя некоторой не зависящей от характера r положительной постоянной A не приводит к расширению класса. Действительно, повторяя доказательство достаточности теоремы, снова получим, что носитель преобразования Фурье функции $F(g,0)$ опять будет лежать в K. Но тогда из части необходимости теоремы следует, что для функции $F(g,r)$ справедлива оценка (4) для всех $r \in \mathrm{Hom}(\widehat{G}, R)$.

Естественно возникает следующий вопрос. Можно ли в доказанной теореме класс $A_K^2(G)$ заменить классом функций $\widetilde{A}_K^2(G)$, который отличается от $A_K^2(G)$ тем, что в (3) $\varphi(\chi)e^{-r(\chi)} \in L^1(\widehat{G})$ для любого r, $\varphi(\chi) \in L^2(\widehat{G})$, а условие (4) заменено следующим: для любого $\varepsilon > 0$ существует число $A_\varepsilon > 0$ такое, что для любого $g \in G$ и $r \in \mathrm{Hom}(\widehat{G}, R)$ справедливо неравенство

$$|F(g,r)| \leq A_\varepsilon e^{(1+\varepsilon)\sup\limits_{\chi\in K}|r(\chi)|}. \tag{6}$$

Ответ на поставленный вопрос в случае, когда G — группа Ли, дает

Предложение. *Если G — локально компактная связная абелева группа Ли, то для любого компакта K, обладающего B-свойством, классы $A_K^2(G)$ и $\widetilde{A}_K(G)$ совпадают.*

Доказательство. Если G — компактная группа, то предложение тривиально, и будем предполагать, что G некомпактна.

Если $F(g,r) \in A_K^2(G)$, то согласно теореме для всех $g \in G$ и $\mathrm{Hom}(\widehat{G}, R)$ справедливо представление

$$F(g,r) = \int_K \varphi(\chi)\chi(g)e^{-r(\chi)}d\chi, \quad \varphi = \widehat{F(g,0)}(\chi).$$

Отсюда следует оценка (6), т. е. $F \in \widetilde{A}_k^2(G)$.

Пусть теперь $F \in \widetilde{A}_K^2(G)$. Так как G — локально компактная связная абелева группа Ли, то она изоморфна произведению $\mathbb{R}_n \times T_k$, где T_k — k-мерный тор ([10], с. 17). Тогда $\widehat{G} \cong \widehat{\mathbb{R}_n \times T_k} \cong \widehat{\mathbb{R}_n} \times \widehat{T_k} \cong \mathbb{R}_n \times Z_k$, где Z_k — k-мерная целочисленная решетка в $\mathbb{R}_k$. Поэтому, если $\chi \in \mathrm{Hom}(G, T_1)$, $g \in G$, $g = \alpha(x, t^*)$, $x \in \mathbb{R}_n$, $t^* = (e^{it_1}, \ldots, e^{it_k}) \in T_k$, $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}_n \times T_k, G)$, то $\chi(g) = e^{i\chi_1\cdot x}e^{im\cdot t}$, $\chi_1 \in \mathbb{R}_n$, $m \in Z_k$, $t = (t_1, \ldots, t_k)$. В свою очередь $\mathrm{Hom}(\widehat{G}, R) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{R}_n \times Z_k, R) \cong \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_k$ и, значит, если $\chi \in \mathrm{Hom}(G, T_1)$, а $r \in \mathrm{Hom}(\widehat{G}, R)$, то $r(\chi) = r_1 \cdot \chi_1 + r_2 \cdot m$ с некоторыми $r_1 \in \mathbb{R}_n$, $r_2 \in \mathbb{R}_k$. Теперь ясно, что

$$F(g,r) = \widetilde{F}(x,t;r_1,r_2) = \int_{R_n\times Z_k} \Psi(\chi_1, m)e^{i\chi_1\cdot x}e^{im\cdot t}e^{-r_1\cdot\chi_1}e^{-r_2\cdot m}d\mu,$$

где μ — некоторая мера Хаара на $\mathbb{R}_n \times Z_k$, а $\Psi(\chi_1, m) = \varphi(\chi)$. Значит, для некоторой постоянной C имеем

$$F(g,r) = C\sum_{m\in Z_k} e^{i(t+ir_2)\cdot m}\int_{\mathbb{R}_n} \Psi(\chi_1, m)e^{i(x+ir_1)\cdot\chi_1}d\chi_1.$$

Если $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $r_1 = (r_1^{(1)}, \ldots, r_1^{(n)})$, $t = (t_1, \ldots, t_k)$, $r_2 = (r_2^{(1)}, \ldots, r_2^{(k)})$, то $z = (x_1 + ir_1^{(1)}, \ldots, x_n + ir_1^{(n)}, t_1 + ir_2^{(1)}, \ldots, t_k + ir_2^{(k)})$ есть точка $(n+k)$-мерного комплексного евклидова пространства $\mathbb{C}_{n+k}$ и функция $\widetilde{F}$ есть целая функция относительно z. В пространстве $\mathbb{R}_{n+k}$ возьмем новый ортонормальный базис $e_1, e_2, \ldots, e_{n+k}$, где e_1 — единичный вектор, направленный по $\widetilde{r}(r_1, r_2)$. Пусть в новой системе координаты точки (x,t) суть $(u_1, \ldots, u_{n+k})$, причем u_1 меняется от $-\infty$ до ∞. Пусть $n+k-1$ вещественных чисел $u_2, \ldots, u_{n+k}$ фиксированы и положим $\alpha = \sum\limits_{j=2}^{n+k} u_je_j$. Если $\vec{r}(r_1, r_2) = v_1e_1$, $v_1 \in R$, $w_1 = u_1 + iv_1$, и $\varphi(w_1) = \widetilde{F}(w_1e_1 + \alpha)$, то φ — целая функция одного комплексного переменного w_1. Тип функции φ есть $\|e_1^*\| = \sup\limits_{x\in K}|e_1 \cdot (\chi_1, m)|$. Действительно, если $\varepsilon > 0$, то

$$|\varphi(w_1)| = |\widetilde{F}(w_1e_1 + \alpha)| = |F(g,r)| \leq A_\varepsilon e^{(1+\varepsilon)\sup\limits_{\chi\in K}|r(\chi)|} =$$

$$= A_\varepsilon e^{(1+\varepsilon)\sup\limits_{\chi\in K}|(w_1e_1+\alpha)\cdot(\chi_1,m)|} \leq A'_\varepsilon e^{(1+\varepsilon)\|e_1^*\|\,|w_1|}.$$

Применяя для целой функции одной переменной w_1 типа $\|e_1^*\|$ известное предложение ([2], лемма 4.4, с. 126), можем написать

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u_1+iv_1)|^2 du_1 \le e^{2\|e_1^*\|\,|v_1|} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u_1)|^2 du_1$$

для всех $v_1 \in R$. Выберем v_1 так, чтобы $(r_1, r_2) = v_1 e_1$. Тогда последнее неравенство примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widetilde{F}\left(i\mathbf{r} + \sum_{j=1}^{n+k} u_j e_j\right)\right|^2 du_1 \le e^{2\sup\limits_{\chi\in K}|\mathbf{r}\cdot(\chi_1\cdot m)|} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widetilde{F}\left(\sum_{j=1}^{n+k} u_j e_j\right)\right|^2 du_1.$$

Но $\sup\limits_{\chi\in K} |\mathbf{r}\cdot(\chi_1, m)| = \sup\limits_{\chi\in K} |r(\chi)|$. Интегрируя обе части по $u_2, \ldots, u_{n+k}$, убеждаемся, что для F выполнено (4). $\square$

Пусть $G = \mathbb{R}_n$, а K — симметричное тело из $\mathbb{R}_n$. В таком случае $\widehat{G} \cong \mathbb{R}_n$, $r(y) = r \cdot y$, $r, y \in \mathbb{R}_n$, и класс $\widetilde{A}^2_K(G)$ совпадает с классом $\mathcal{E}(K)$ целых функций экспоненциального типа K, сужения которых на $\mathbb{R}_n$ принадлежат $L^2(\mathbb{R}_n)$ ([2], с. 108). Тогда из доказанных выше теоремы и предложения следует, что для симметричных тел K и $\mathbb{R}_n$ обращение в нуль почти всюду вне K преобразования Фурье функции $f \in L^2(\mathbb{R}_n)$ эквивалентно совпадению f почти всюду с сужением на $\mathbb{R}_n$ некоторой функции из $\mathcal{E}(K)$. Этот результат, как было отмечено выше, хорошо известен.

Если $G = T_n$ (T_n — n-мерный тор), то класс $\widetilde{A}^2_K(G)$ совпадает с классом $\widetilde{\mathcal{E}}(K)$ целых функций экспоненциального типа K и периодических с периодом 2π относительно всех аргументов. В таком случае из теоремы и предложения вытекает следующий результат. Если K — симметричное тело из пространства $\mathbb{R}_n$, $Q_n = \{x(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n,\ -\pi \le x_i \le \pi,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, а Z_n — целочисленная решетка пространства $\mathbb{R}_n$, то все коэффициенты Фурье функции $f \in \widetilde{\mathcal{E}}(K)$, т. е. числа

$$a_m = \pi^{-n} \int_{Q_n} f(x) e^{-im\cdot x} dx, \quad m \in Z_n,$$

равны нулю, если $m \notin K$. Этот результат для $n = 1$ получен в ([11], с. 374), а для $n > 1$ получен в [12].

Литература

1. Ugulava D. *On the approximation of functions on locally compact Abelian groups* // Georgian Math. J. – 1999. – V. 6. – № 4. – P. 379–394.
2. Стейн И., Вейс Г. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* – М.: Мир, 1974. – 336 с.
3. Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1977. – 455 с.
4. Хьюитт Э., Росс К. *Абстрактный гармонический анализ. Структура топологических групп. Теория интегрирования. Представления групп.* – М.: Наука, 1975. – 654 с.
5. Рудин У. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1975. – 448 с.
6. Хьюитт Э., Росс К. *Абстрактный гармонический анализ. Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах.* – М.: Мир, 1975. – 904 с.
7. Гурарий В.П. *Групповые методы коммутативного гармонического анализа* // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. – М.: ВИНИТИ. – 1988. – Т. 25. – С. 1–311.
8. Mackey G. *Laplace transform for locally compact Abelian groups* // Proc. Nat. Acad. Sci. – USA. – 1948. – V. 34. – P. 156–162.
9. Mackey G. *Functions on locally compact groups* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1950. – V. 56. – P. 385–412.

10. Адамс Дж. *Лекции по группам Ли.* – М.: Наука, 1979. – 144 с.
11. Бернштейн С.Н. *Собрание сочинений.* Т. 2. *Конструктивная теория функций* (1931–1953). – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – 628 с.
12. Угулава Д.К. *О приближении целыми функциями экспоненциального типа* // Тр. ин-та вычисл. матем. АН Грузии. – 1988. – Т. 28. – № 1. – С. 192–202.

Институт вычислительной математики
им. Н.И. Мусхелишвили
Академии наук Грузии

Поступила
16.05.2001