ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 12 (463)

УДК 517.988.68 : 519.85

И.П. РЯЗАНЦЕВА

МЕТОД ИТЕРАТИВНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

Пусть $\Phi : H \to R^1$ — выпуклый ограниченный снизу дифференцируемый по Гато функционал, H — вещественное гильбертово пространство, Ω — выпуклое замкнутое множество в H, $\Omega \subset \operatorname{dom}\Phi = H$, множество $N = \{x \in \Omega \mid \Phi(x) = \min \Phi(y) \mid y \in \Omega\}$. Тогда существует единственный элемент x^* в N, имеющий минимальную норму (x^* — нормальная точка минимума функционала Φ на Ω). Ставится задача о нахождении элемента $x^* \in N$. Не теряя общности, считаем, что $\Phi(x) \geq 0$ при всех $x \in H$. Построим выпуклый дифференцируемый по Гато штрафной функционал $\varphi : H \to R^1$, $\varphi(x) = 0$ при $x \in \Omega$ и $\varphi(x) > 0$ при $x \notin \Omega$,

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \varphi(x) = +\infty, \quad x \notin \Omega. \tag{1}$$

Далее считаем, что операторы $Ax = \operatorname{grad}\Phi(x)$ и $Bx = \operatorname{grad}\varphi(x)$ ограничены.

Поскольку на функционал Φ не налагается дополнительных условий типа сильной или равномерной выпуклости, то поставленную задачу следует считать некорректной ([1], с. 148) и для ее решения использовать какой-либо метод регуляризации. В работах [2], [3] для решения задач условной минимизации применяется непрерывный метод регуляризации второго порядка, причем в [2] при построении этого метода используется оператор проектирования на выпуклое замкнутое множество Ω гильбертова пространства H, а метод, изученный в [3], имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + \gamma(t)\{Bx + \beta(t)[Ax + \alpha(t)x]\} = 0, \quad \mu > 0, \tag{2}$$
$$x(t_0) = x_0 \in H, \quad x'(t_0) = x_1 \in H,$$

т. е. в (2) использован градиент штрафного функционала φ. Всякая дискретизация непрерывного метода порождает некоторый итерационный процесс. В [4]–[7] построены и изучены порожденные непрерывными методами многошаговые итерационные методы, в конструкции которых используется оператор проектирования на множество Ω. Если в (2) применить способ аппроксимации первой и второй производной, принятый в [4]–[7], то для последовательности, генерируемой полученным при этом итерационным процессом, свойства траекторий уравнения (2), играющие существенную роль при доказательстве сходимости метода, не сохраняются. Это подтверждает результат из работы [8] о том, что свойства непрерывного и дискретного методов не всегда совпадают. Использовав отличную от [4]–[7] аппроксимацию производных $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$, построим регуляризованный итерационный процесс вида

$$\mu_k(x_k - x_{k-1}) + t_k\gamma_k[Bx_k + \beta_k(Ax_k + \alpha_k x_k)] = \sigma_k(x_{k-1} - x_{k-2}), \tag{3}$$

где $k \geq 2$, $\mu_k = 1 + \mu\tau_k$, $\mu > 0$, $t_k = \tau_k^2$, $\sigma_k = \tau_k/\tau_{k-1}$, $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$ — убывающие бесконечно малые последовательности положительных чисел, $\{\tau_k\}$, $\tau_k > 0$, — невозрастающая последовательность, начальные значения x_0 и x_1 — произвольные элементы из H, которые задаются.

Следуя [8], будем называть (3) итерационным процессом второго порядка. Пусть $\{x_k\}$ — ограниченная в H последовательность. Найдем условия, при которых $x_k \to x^*$ при $k \to \infty$.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 99-01-00807).

Приведем вспомогательные утверждения, позволяющие получить оценки сверху для числовых последовательностей, удовлетворяющих рекуррентным неравенствам.

Известна ([9]; [10], с. 83)

Лемма 1. *Если числовая последовательность* $\{\omega_k\}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\omega_k \le (1-a_k)\omega_{k-1} + b_k, \quad 0 \le a_k \le 1, \quad b_k \in R^1 \quad \forall k \ge k_0, \tag{4}$$

то

$$\omega_k \le \omega_{k_0-1} \prod_{i=k_0}^{k} (1-a_i) + \sum_{i=k_0}^{k-1} b_i \prod_{j=i+1}^{k} (1-a_j) + b_k, \quad k \ge k_0. \tag{5}$$

Считая, что $\prod\limits_{i=j}^{n} c_i = 1$ при $n < j$, неравенство (5) перепишем в более компактной форме

$$\omega_k \le \omega_{k_0-1} \prod_{i=k_0}^{k} (1-a_i) + \sum_{i=k_0}^{k} b_i \prod_{j=i+1}^{k} (1-a_j), \quad k \ge k_0. \tag{6}$$

Если учесть неравенство $1 - a_i \le \exp(-a_i)$, ввести обозначение $A_k = \sum\limits_{i=k_0}^{k} a_i$, считать, что $\omega_{k_0-1} > 0$, $b_k > 0$ при всех $k \ge k_0$, то из (6) получим

$$\omega_k \le \omega_{k_0-1} \exp(-A_k) + \sum_{i=k_0}^{k} b_i \exp(A_i - A_k), \quad k \ge k_0. \tag{7}$$

Пусть теперь вместо (4) последовательность $\{\omega_k\}$ неотрицательных чисел удовлетворяет рекуррентному неравенству

$$\frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau_k}(1 + p\tau_k) - \frac{\omega_{k-1} - \omega_{k-2}}{\tau_{k-1}} + q\omega_k\tau_k \le a_k\tau_k, \quad k \ge 2, \tag{8}$$

где p и q — некоторые действительные числа, $\{\tau_k\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, $a_k \ge 0$. Пусть k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения

$$s^2 + ps + q = 0, \tag{9}$$

причем считаем, что корни действительны и неположительны. Тогда (8) можно переписать в эквивалентной форме

$$\left[\frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau_k} - k_2\omega_k\right](1 - k_1\tau_k) \le \frac{\omega_{k-1} - \omega_{k-2}}{\tau_{k-1}} - k_2\omega_{k-1} + a_k\tau_k. \tag{10}$$

Полагая $w_k = (\omega_k - \omega_{k-1})/\tau_k - k_2\omega_k$, неравенство (10) перепишем в виде $w_k(1-k_1\tau_k) \le w_{k-1} + a_k\tau_k$. Поскольку в наших предположениях $k_1 \le 0$, $1 - k_1\tau_k \ge 1$, то последнее неравенство дает

$$w_k \le (1 - b_k^1)w_{k-1} + a_k\tau_k, \quad k \ge 2, \tag{11}$$

где $b_k^1 = -k_1\tau_k/(1 - k_1\tau_k)$, $0 \le b_k^1 \le 1$. Из (11) и леммы 1 имеем

$$w_k \le w_1 \prod_{i=2}^{k}(1 - b_i^1) + \sum_{i=2}^{k} a_i\tau_i \prod_{j=i+1}^{k} (1 - b_j^1), \quad k \ge 2. \tag{12}$$

Из определения величины w_k получим

$$\omega_k = (1 - b_k^2)\omega_{k-1} + w_k\tau_k h_k, \quad 0 < h_k \le 1, \tag{13}$$

здесь $b_k^2 = -k_2\tau_k/(1-k_2\tau_k)$, $0 \le b_k^2 \le 1$. Лемма 1 и неравенство (13) дают

$$\omega_k \le \omega_1 \prod_{i=2}^{k}(1-b_i^2) + \sum_{i=2}^{k} w_i\tau_i h_i \prod_{j=i+1}^{k}(1-b_j^2).$$

Приняв во внимание (12), на основании последнего неравенства имеем

$$\omega_k \le \omega_1 \prod_{i=2}^{k}(1-b_i^2) + \sum_{i=2}^{k} h_i\tau_i \Big\{ w_1 \prod_{j=2}^{i}(1-b_j^1) + \sum_{j=2}^{i} a_j\tau_j \prod_{l=j+1}^{i}(1-b_l^1)\Big\} \prod_{j=i+1}^{k}(1-b_j^2). \tag{14}$$

Свойство невозрастания последовательности $\{\tau_k\}$ и неположительность k_1 и k_2 дают $1/(1-k_n\tau_k) \ge 1/(1-k_n\tau_2) = \lambda_n$, $k \ge 2$, $n = 1,2$. Введем обозначения $\lambda = \min\{\lambda_1,\lambda_2\} > 0$, $T_k = \sum\limits_{i=2}^{k}\tau_i$, $k \ge 2$. Тогда $\sum\limits_{i=2}^{k} b_i^n = -k_n \sum\limits_{i=2}^{k}\tau_i/(1-k_n\tau_i) \ge -k_n\lambda T_k$, а значит, $\exp\Big(-\sum\limits_{i=2}^{k} b_i^n\Big) \le \exp(\lambda k_n T_k)$, $k \ge 2$, $n = 1,2$. Переходя от (14) к неравенству вида (7), получим

$$\omega_k \le \omega_1 \exp(k_2\lambda T_k) + |w_1| \sum_{i=2}^{k} \exp(\lambda k_1 T_i)\exp(\lambda k_2(T_k - T_i))\tau_i +$$
$$+ \sum_{i=2}^{k}\tau_i \sum_{j=2}^{i} a_j\tau_j \exp(\lambda k_1(T_i - T_j))\exp(\lambda k_2(T_k - T_i)) = \omega_1\exp(\lambda k_2 T_k) +$$
$$+ |w_1|\exp(\lambda k_2 T_k)\sum_{i=2}^{k}\exp(\lambda(k_1-k_2)T_i)\tau_i + \exp(\lambda k_2 T_k)\sum_{j=2}^{k}\tau_j a_j \exp(-\lambda k_1 T_j)\,\cdot$$
$$\cdot \sum_{i=j}^{k}\exp(\lambda(k_1-k_2)T_i)\tau_i \le \omega_1\exp(\lambda k_2 T_k) + |w_1|\exp(\lambda k_2 T_k)\int_0^{T_k}\exp(\lambda(k_1-k_2)t)dt +$$
$$+ \exp(\lambda k_2 T_k)\sum_{j=2}^{k}\tau_j a_j \exp(-\lambda k_1 T_j)\int_{T_{j-1}}^{T_k}\exp(\lambda(k_1-k_2)t)dt \le$$
$$\le \omega_1\exp(\lambda k_2 T_k) + \frac{|w_1|}{\lambda(k_2-k_1)}\exp(\lambda k_2 T_k) + \frac{c_1}{\lambda(k_2-k_1)}\sum_{j=2}^{k}\tau_j a_j \exp(\lambda k_2(T_k - T_j)), \quad c_1 > 0.$$

Здесь считали, что $k_1 - k_2 < 0$, произвели перестановку порядка суммирования и использовали оценку $\sum\limits_{i=m}^{k} f(T_i)\tau_i \le \int\limits_{T_{m-1}}^{T_k} f(t)dt$, справедливую для любой невозрастающей неотрицательной функции $f(t)$. Тем самым доказана

Лемма 2. *Пусть последовательность неотрицательных чисел $\{\omega_k\}$ удовлетворяет неравенству (8), $\{\tau_k\}$ — невозрастающая последовательность, $\tau_k > 0$ при всех $k \ge 2$, k_1 и k_2 — неположительные корни квадратного уравнения (9), $k_2 - k_1 > 0$, тогда верна оценка*

$$\omega_k \le \omega_1\exp(\lambda k_2 T_k) + \frac{|w_1|}{\lambda(k_2-k_1)}\exp(\lambda k_2 T_k) + \frac{c_1}{\lambda(k_2-k_1)}\sum_{i=2}^{k}\tau_i a_i \exp(\lambda k_2(T_k - T_i)), \tag{15}$$

где $\lambda = \min\{\lambda_1,\lambda_2\}$, $\lambda_i = 1/(1-k_i\tau_2)$, $i = 1,2$, $c_1 > 0$, $w_1 = (\omega_1-\omega_0)/\tau_1 - k_2\omega_2$.

Построим последовательность $\{z^k\}$, где z^k есть решение операторного уравнения

$$Bz^k + \beta_k(Az^k + \alpha_k z^k) = 0, \quad k \ge 2. \tag{16}$$

Отметим, что элемент z^k в наших предположениях однозначно определяется из уравнения (16) ([1], теоремы 9.9 и 9.1). Будем считать, что выполнены условия, при которых $z^k \to x^*$ при $k \to \infty$. Например, в работе [3] эта сходимость выводится из условия (1) и соотношений

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\beta_k}{\alpha_k} = 0, \tag{17}$$

$$\|z^k - \overline{z}^k\| \le c\|Bz^k\| \quad \forall k \ge 2, \tag{18}$$

где c — положительная постоянная, $\overline{z}^k$ — проекция элемента z^k на множество Ω. Другие достаточные условия этой сходимости можно найти, например, в [11].

Построим последовательность $\{y_k^m\}$:

$$\mu_k(y_k^m - y_{k-1}^m) + t_k\gamma_m[By_k^m + \beta_m(Ay_k^m + \alpha_m y_k^m)] =$$
$$= \sigma_k(y_{k-1}^m - y_{k-2}^m), \quad k \ge 2, \quad m \ge 2, \quad y_0^m = x_0, \quad y_1^m = x_1, \tag{19}$$

т. е. здесь применяем метод замороженных коэффициентов из ([11], с. 261), использованный ранее в [3] для непрерывного метода. Покажем, что $\|y_k^m\| \le C$ при всех $k \ge 2$, $m \ge 2$. Для этого определим величину

$$E(y_k^m) = R_k^m + \gamma_m\{\varphi(y_k^m) + \beta_m[\Phi(y_k^m) + \alpha_m\|y_k^m\|^2/2]\},$$

где $R_k^m = \|y_k^m - y_{k-1}^m\|^2/(2t_k)$. Используя неравенство

$$g(x) - g(y) \le (\operatorname{grad} g(x), x - y) \quad \forall x, y \in H, \tag{20}$$

справедливое для любого выпуклого дифференцируемого по Гато функционала $g : H \to R^1$, $D(g) = H$ ([1], теоремы 5.1, 8.9 и лемма 8.3), имеем

$$E(y_k^m) - E(y_{k-1}^m) \le \gamma_m(By_k^m + \beta_m(Ay_k^m + \alpha_m y_k^m),\, y_k^m - y_{k-1}^m) +$$
$$+ \left(\frac{y_k^m - y_{k-1}^m}{\tau_k},\, \frac{y_k^m - y_{k-1}^m}{\tau_k} - \frac{y_{k-1}^m - y_{k-2}^m}{\tau_{k-1}}\right).$$

Учитывая (19), из последнего неравенства получим

$$E(y_k^m) - E(y_{k-1}^m) \le -2\mu\tau_k R_k^m \le 0, \quad k \ge 2. \tag{21}$$

Значит, последовательность $\{E(y_k^m)\}$ не возрастает при $k \to \infty$, поэтому $E(y_k^m) \le E(y_1^m) = E(x_1) = \overline{C}$. Так как $E(y_k^m) \ge 0$ при всех $k \ge 2$, $m \ge 2$, то тем самым установлено существование $\lim\limits_{k\to\infty} E(y_k^m) = E^m \le \overline{C}$. Далее, из (21) имеем $E(y_k^m) \le \overline{C} - 2\mu \sum\limits_{i=2}^{k} R_i^m\tau_i$ или $2\mu \sum\limits_{i=2}^{k} R_i^m\tau_i \le \overline{C} - E(y_k^m)$. Отсюда при $k \to \infty$ получим

$$\sum_{i=2}^{\infty} R_i^m\tau_i \le \overline{C}/(2\mu). \tag{22}$$

Значит, ряд $\sum\limits_{i=2}^{\infty} R_i^m\tau_i$ сходится, причем его сумма $s^m \le \overline{C}/(2\mu)$ при всех $m \ge 2$. Введем величину $\rho_k^m = \|y_k^m - z^m\|^2/2$ и исследуем ее поведение при $k \to \infty$. Умножив (19) скалярно на $(y_k^m - z^m)/\tau_k$, имеем

$$\frac{\mu_k}{\tau_k}(y_k^m - y_{k-1}^m, y_k^m - z^m) + \tau_k\gamma_m(By_k^m + \beta_m(Ay_k^m + \alpha_m y_k^m), y_k^m - z^m) = \frac{\sigma_k}{\tau_k}(y_{k-1}^m - y_{k-2}^m, y_k^m - z^m).$$

Учитывая здесь равенство $Bz^m + \beta_m(Az^m + \alpha_m z^m) = 0$ и монотонность отображений A и B, придем к неравенству

$$\left(\frac{1}{\tau_k} + \mu\right)(y_k^m - y_{k-1}^m, y_k^m - z^m) + 2\tau_k\widetilde{\alpha}_m\rho_k^m \le \left(\frac{y_{k-1}^m - y_{k-2}^m}{\tau_{k-1}}, y_k^m - z^m\right), \tag{23}$$

где $\widetilde{\alpha}_m = \alpha_m\beta_m\gamma_m$, $m \geq 2$.

Применив (20) к функционалу $\|x\|^2/2$, запишем неравенства

$$\rho_k^m - \rho_{k-1}^m \leq (y_k^m - y_{k-1}^m, y_k^m - z^m), \quad \rho_{k-2}^m - \rho_{k-1}^m \leq (y_{k-2}^m - y_{k-1}^m, y_{k-2}^m - z^m).$$

Теперь от (23), воспользовавшись неравенством $ab \leq a^2/2 + b^2/2$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, приходим к неравенству

$$\left(\frac{1}{\tau_k} + \mu\right)(\rho_k^m - \rho_{k-1}^m) + 2\tau_k\widetilde{\alpha}_m\rho_k^m + \frac{1}{\tau_{k-1}}(\rho_{k-2}^m - \rho_{k-1}^m) \leq (y_{k-1}^m - y_{k-2}^m, y_k^m - y_{k-2}^m)/\tau_{k-1} \leq$$
$$\leq \|y_{k-1}^m - y_{k-2}^m\|(\|y_k^m - y_{k-1}^m\| + \|y_{k-1}^m - y_{k-2}^m\|)/\tau_{k-1} \leq 2\tau_{k-1}R_{k-1}^m + \tau_k\sigma_k R_k^m + \tau_{k-1}R_{k-1}^m.$$

Так как последовательность $\{\tau_k\}$ не возрастает, то последнее неравенство дает

$$\frac{\rho_k^m - \rho_{k-1}^m}{\tau_k}(1 + \mu\tau_k) - \frac{\rho_{k-1}^m - \rho_{k-2}^m}{\tau_{k-1}} + 2\tau_k\widetilde{\alpha}_m\rho_k^m \leq c_2(R_k^m\tau_k + R_{k-1}^m\tau_{k-1}), \quad c_2 > 0. \tag{24}$$

Квадратное уравнение

$$s^2 + \mu s + 2\widetilde{\alpha}_m = 0 \tag{25}$$

имеет корни

$$k_1^m = -\mu/2 - \sqrt{\mu^2 - 8\widetilde{\alpha}_m}/2 = -\mu + 2\widetilde{\alpha}_m/\mu + o(\widetilde{\alpha}_m),$$
$$k_2^m = -\mu/2 + \sqrt{\mu^2 - 8\widetilde{\alpha}_m}/2 = -2\widetilde{\alpha}_m/\mu + o(\widetilde{\alpha}_m).$$

В силу малости $\widetilde{\alpha}_m$ считаем, что $\mu^2 - 8\widetilde{\alpha}_m > 0$ при $m \geq 2$. Таким образом, уравнение (25) при каждом $m \geq 2$ имеет два действительных отрицательных корня. Поэтому из неравенства (24) по лемме 2 выводим оценку (см.(15))

$$\rho_k^m \leq \rho_1^m \exp(\lambda^m k_2^m T_k) + \frac{|w^m|}{\lambda^m(k_2^m - k_1^m)}\exp(\lambda^m k_2^m T_k) +$$
$$+ \frac{\widetilde{c}_1}{\lambda^m(k_2^m - k_1^m)}\sum_{j=2}^{k}(R_j^m\tau_j + R_{j-1}^m\tau_{j-1})\exp(\lambda^m k_2^m(T_k - T_j)), \tag{26}$$

где $\lambda^m = \min\{\lambda_1^m, \lambda_2^m\}$, $\lambda_i^m = 1/(1 - k_i^m\tau_2)$, $i = 1, 2$, $\widetilde{c}_1 > 0$, $w^m = (\rho_1^m - \rho_0^m)/\tau_1 - k_2^m\rho_1^m$. Поскольку $k_2^m < 0$, $t_2 \geq \lambda^m \geq t_1 > 0$, $k_2^m - k_1^m \geq t_3 > 0$, установлено (22), и величины $\rho_0^m = \|y_0^m - z^m\|^2/2 = \|x_0 - z^m\|^2/2$, $\rho_1^m = \|y_1^m - z^m\|^2/2 = \|x_1 - z^m\|^2/2$ ограничены сверху постоянными, не зависящими от m ($m \geq 2$), то из (26) вытекает ограниченность последовательности $\{\rho_k^m\}$, $k \geq 2$, $m \geq 2$. В силу ограниченности $\{z^m\}$ делаем вывод об ограниченности последовательности $\{y_k^m\}$, $k \geq 2$, $m \geq 2$. Найдем оценку сверху для правой части неравенства (24). Для этого (19) умножим скалярно на $(y_k^m - y_{k-1}^m)/\tau_k$:

$$\frac{\|y_k^m - y_{k-1}^m\|^2}{\tau_k}(1 + \mu\tau_k) + \tau_k\gamma_m(By_k^m + \beta_m(Ay_k^m + \alpha_m y_k^m), y_k^m - y_{k-1}^m) =$$
$$= \sigma_k(y_{k-1}^m - y_{k-2}^m, y_k^m - y_{k-1}^m)/\tau_k.$$

Приняв во внимание доказанную ограниченность последовательности $\{y_k^m\}$ и ограниченность операторов A и B, из последнего равенства получим

$$\frac{\|y_k^m - y_{k-1}^m\|}{\tau_k}(1 + \mu\tau_k) \leq \frac{\|y_{k-1}^m - y_{k-2}^m\|}{\tau_{k-1}} + \tau_k\gamma_m L, \quad L > 0.$$

Отсюда легко придем к соотношению

$$v_k^m \leq \left(1 - \frac{\mu\tau_k}{1 + \mu\tau_k}\right)v_{k-1}^m + L\gamma_m\tau_k, \quad k \geq 2, \quad m \geq 2, \tag{27}$$

где $v_k^m = \|y_k^m - y_{k-1}^m\|/\tau_k$, т. е. $(v_k^m)^2 = 2R_k^m$. Пусть $e_k = \mu\tau_k/(1+\mu\tau_k)$, $\overline{\mu} = \mu/(1+\mu\tau_2)$, $v = v_1^m = \|x_1 - x_0\|/\tau_1$ при $m \geq 2$, тогда по лемме 1 имеем (см. (7))

$$v_k^m \leq v \exp\Big(-\sum_{i=2}^k e_i\Big) + L\gamma_m \sum_{i=2}^k \tau_i \exp\Big(-\sum_{j=i+1}^k e_i\Big) \leq v\exp(-\overline{\mu}T_k) +$$

$$+ L\gamma_m \sum_{i=2}^k \exp(-\overline{\mu}(T_k - T_i))\tau_i \leq v\exp(-\overline{\mu}T_k) +$$

$$+ L\gamma_m c_3 \int_0^{T_k} \exp(-\overline{\mu}(T_k - t))dt \leq v\exp(-\overline{\mu}T_k) + c_3 L\gamma_m/\overline{\mu}, \quad c_3 > 0.$$

Предположив, что $\tau_{k-1}/\tau_k \leq \widetilde{c}$, $\widetilde{c} > 0$, при всех $k \geq 2$, введем постоянную $\overline{L} = c_3 L/\overline{\mu}$. Теперь можем записать соотношение

$$c_2[R_k^m \tau_k + R_{k-1}^m \tau_{k-1}] \leq \widetilde{c}_2[v^2\exp(-2\overline{\mu}T_k) + 2v\overline{L}\gamma_m \exp(-\overline{\mu}T_k) + \overline{L}^2\gamma_m^2]\tau_k.$$

Учитывая последнюю оценку в неравенстве (26) и полагая в нем $k = m$, имеем

$$\rho_m^m \leq \rho_1^m \exp(\lambda^m k_2^m T_m) + \frac{|w^m|\exp(\lambda^m k_2^m T_m)}{\lambda^m(k_2^m - k_1^m)} + \frac{\widetilde{c}_3}{\lambda^m(k_2^m - k_1^m)} \sum_{j=2}^m \Big[v^2\exp(-2\overline{\mu}T_j) +$$

$$+ 2v\overline{L}\gamma_m\exp(-\overline{\mu}T_j) + \overline{L}^2\gamma_m^2\Big]\tau_j \exp(\lambda^m k_2^m (T_m - T_j)), \quad \widetilde{c}_3 > 0. \quad (28)$$

Сделаем следующие предположения:

$$\text{а)} \quad \lim_{m\to\infty} k_2^m T_m = -\infty; \qquad \text{б)} \quad \lim_{m\to\infty} \frac{\gamma_m}{\alpha_m\beta_m} = 0. \quad (29)$$

Так как $k_2^m \sim -2\widetilde{\alpha}_m/\mu$ при $m \to \infty$, то из условия а) следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \tau_k$, т. е. $T_m \to +\infty$ при $m \to \infty$. Кроме того, отсюда же делаем вывод о том, что α_m, β_m, γ_m не могут быть величинами порядка $\exp(-aT_m)$, $a > 0$.

Усилим неравенство (28), заменив сумму в правой части интегралом, затем, проведя интегрирование, придем к оценке

$$\rho_m^m \leq \Big[\rho_1^m + \frac{|w^m|}{\lambda^m(k_2^m - k_1^m)}\Big]\exp(\lambda^m k_2^m T_m) +$$

$$+ \frac{\overline{c}_2}{\lambda^m(k_2^m - k_1^m)}\Big(\Big[\frac{v^2}{2\overline{\mu} + \lambda^m k_2^m} + \frac{2v\overline{L}\gamma_m}{\overline{\mu} + \lambda^m k_2^m}\Big]\exp(\lambda^m k_2^m T_m) - \frac{\overline{L}^2\gamma_m^2}{\lambda^m k_2^m}\Big), \quad \overline{c}_2 > 0. \quad (30)$$

Теперь неравенство (30) и свойства (29) последовательностей $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$, $\{\tau_k\}$ гарантируют сходимость $\rho_m^m \to 0$ при $m \to \infty$, т. е. $\|y_m^m - z^m\| \to 0$ при $m \to \infty$.

Введем обозначения $g_k^m = x_k - y_k^m$, $r_k^m = \|g_k^m\|^2/2$. Далее проведем следующие преобразования: из (3) вычтем (19), результат скалярно умножим на g_k^m и получим равенство

$$\mu_k(g_k^m - g_{k-1}^m, g_k^m) + t_k\gamma_k(Bx_k + \beta_k(Ax_k + \alpha_k x_k), g_k^m) -$$

$$- t_k\gamma_m(By_k^m + \beta_m(Ay_k^m + \alpha_m y_k^m), g_k^m) = \sigma_k(g_{k-1}^m - g_{k-2}^m, g_k^m).$$

Если здесь учтем ограниченность последовательностей $\{x_k\}$, $\{y_k^m\}$, ограниченность и монотонность отображений A и B, то придем к неравенству

$$\mu_k(g_k^m - g_{k-1}^m, g_k^m) + 2\widetilde{\alpha}_m t_k r_k^m + \sigma_k(g_{k-2}^m - g_{k-1}^m, g_{k-2}^m) \leq L_1 u_k^m t_k + \sigma_k(g_{k-1}^m - g_{k-2}^m, g_k^m - g_{k-2}^m), \quad (31)$$

где $L_1 > 0$, $u_k^m = |\gamma_m - \gamma_k| + |\gamma_m\beta_m - \gamma_k\beta_k| + |\widetilde{\alpha}_m - \widetilde{\alpha}_k|$. Применив к (31) те же преобразования, что и при выводе неравенства (24), получим

$$\frac{r_k^m - r_{k-1}^m}{\tau_k}(1+\mu\tau_k) - \frac{r_{k-1}^m - r_{k-2}^m}{\tau_{k-1}} + 2\tau_k\widetilde{\alpha}_m r_k^m \le$$
$$\le L_1 u_k^m \tau_k + c_4(\|g_k^m - g_{k-1}^m\|^2 + \|g_{k-1}^m - g_{k-2}^m\|^2)/\tau_{k-1}), \ c_4 > 0. \quad (32)$$

Оценим сверху величину $\xi_k^m = (\|g_k^m - g_{k-1}^m\|^2 + \|g_{k-1}^m - g_{k-2}^m\|^2)/\tau_{k-1}$. Для этого опять из (3) вычтем (19), результат умножим скалярно на $(g_k^m - g_{k-1}^m)/\tau_k$ и простыми преобразованиями, уже проводимыми выше при выводе оценки (27), придем к неравенству

$$\eta_k^m \le \left(1 - \frac{\mu\tau_k}{1+\mu\tau_k}\right)\eta_{k-1}^m + L_1 u_k^m \tau_k,$$

где $\eta_k^m = \|g_k^m - g_{k-1}^m\|/\tau_k$, $\eta_1^m = 0$ при всех $m \ge 2$. Теперь по лемме 1 имеем

$$\eta_k^m \le L_1 \sum_{i=2}^{k} u_i^m \tau_i \exp(-\overline{\mu}(T_k - T_i)) = L_1\theta_k^m.$$

Значит, (32) дает неравенство

$$\frac{r_k^m - r_{k-1}^m}{\tau_k}(1+\mu\tau_k) - \frac{r_{k-1}^m - r_{k-2}^m}{\tau_{k-1}} + 2\tau_k\widetilde{\alpha}_m r_k^m \le$$
$$\le L_1 u_k^m \tau_k + \widetilde{c}_4[(\theta_k^m)^2\tau_k + (\theta_{k-1}^m)^2\tau_{k-1}] = \psi_k^m, \quad \widetilde{c}_4 > 0.$$

Учитывая, что $r_1^m = r_0^m = 0$ при всех $m \ge 2$, по лемме 2 имеем

$$r_k^m \le \frac{\widetilde{c}_5}{k_2^m - k_1^m} \sum_{i=2}^{k} \psi_i^m \exp(\lambda^m k_2^m (T_k - T_i)). \quad (33)$$

Приняв во внимание свойства последовательностей $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$, можем считать, что $u_k^m \le M\gamma_k$ при $k \le m$, $M > 0$, тогда

$$\theta_k^m \le L_1 \exp(-\overline{\mu}T_k) \sum_{i=2}^{k} \gamma_i \exp(\overline{\mu}T_i)\tau_i. \quad (34)$$

Как уже было отмечено, в наших условиях последовательность $\{\gamma_k\}$ не может иметь экспоненциальный порядок убывания, поэтому $\gamma_k \exp(\overline{\mu}T_k) \not\to 0$ при $k \to \infty$, и ряд $\sum\limits_{i=2}^{k} \gamma_i \exp(\overline{\mu}T_i)\tau_i$ расходится. С помощью теоремы Штольца (см. применение этой теоремы, напр., в [9]) теперь нетрудно убедиться в существовании постоянной $M_1 > 0$ такой, что

$$\sum_{i=2}^{k} \gamma_i \exp(\overline{\mu}T_i)\tau_i / \exp(\overline{\mu}T_k) \le M_1\gamma_k, \quad k \ge 2.$$

Теперь из (34) следует неравенство $\theta_k^m \le \widetilde{M}_1\gamma_k$, $\widetilde{M}_1 > 0$, $k \ge 2$. Предполагая, что $\gamma_{k-1}/\gamma_k \le \widetilde{c}$, $\widetilde{c} > 0$, $k \ge 2$, из (33) при $k = m$ имеем

$$r_m^m \le \frac{1}{k_2^m - k_1^m} \sum_{i=2}^{m} (L_2 u_i^m + L_3\gamma_i^2) \exp(-\lambda^m k_2^m T_i)\tau_i / \exp(-\lambda^m k_2^m T_m), \quad (35)$$

где $L_2 > 0$, $L_3 > 0$.

Поведение правой части в (35) определяется поведением последовательностей $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$, $\{\tau_k\}$, предположим, что

$$\lim_{m\to\infty} \left[\sum_{i=2}^{m} (u_i^m + \gamma_i^2) \exp(-\lambda^m k_2^m T_i)\tau_i\right] / \exp(-\lambda^m k_2^m T_m) = 0. \quad (36)$$

Тогда из (35) имеем сходимость $r_m^m \to 0$ при $m \to \infty$. Теперь из неравенства

$$\|x_m - x^*\| \le \|x_m - y_m^m\| + \|y_m^m - z^m\| + \|z^m - x^*\|$$

и доказанных утверждений делаем вывод о сходимости последовательности $\{x_k\}$, генерируемой соотношением (19), к нормальной точке минимума функционала Φ на Ω.

Таким образом, в наших предположениях относительно функционалов Φ и φ и их градиентов — операторов A и B соответственно, справедлива

Теорема. *Пусть последовательность z^k, определяемая из* (16), *такова, что $z^k \to x^* \in N$ при $k \to \infty$, последовательность $\{x_k\}$, где x_k — решение уравнения* (3), *ограничена в H, положительные убывающие бесконечно малые последовательности $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$ и невозрастающая последовательность положительных чисел $\{\tau_k\}$ удовлетворяют условиям* (29), (36) *и*

$$\frac{\tau_{k-1}}{\tau_k} \le \widetilde{c}, \quad \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_k} \le \widetilde{c} \quad \forall k \ge 2.$$

Тогда при любых начальных элементах x_0 и x_1 из H последовательность $x_k \to x^* \in N$ при $k \to \infty$.

Замечание 1. В силу теоремы Штольца и возможности оценить снизу интегралы от неотрицательных монотонных функций некоторыми их интегральными суммами из замечания 1 работы [3] делаем вывод о том, что условиям теоремы удовлетворяют последовательности

а) $\alpha_k = 1/k^\alpha$, $\beta_k = 1/k^\beta$, $\gamma_k = 1/k^\gamma$, $\tau_k = 1$, $\alpha + \beta + \gamma < 1$, $\alpha + \beta < \gamma$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$;

б) $\alpha_k = 1/\ln k$, $\beta_k = 1/k^\beta$, $\gamma_k = 1/k^\gamma$, $\tau_k = 1$, $\beta + \gamma < 1$, $\beta < \gamma$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$,

где $k \ge 2$.

Замечание 2. Случай возмущенных данных(возмущенных функционалов Φ и φ) исследуется по той же схеме, что и в [3].

Замечание 3. Пусть существует число $r > 0$ такое, что

$$(Bx, x) \ge 0, \quad (Ax, x) \ge 0 \text{ при } \|x\| \ge r, \quad x \in H. \tag{37}$$

Покажем, что при этих условиях последовательность $\{x_k\}$ ограничена. Для этого построим последовательность $\{E_k\}$, $E_k = \|x_k - x_{k-1}\|^2/(2t_k) + \gamma_k[\varphi(x_k) + \beta_k(\Phi(x_k) + \alpha_k\|x_k\|^2/2)]$. Применив неравенство (20) к функционалу $\|x\|^2/2$ и учитывая (3), имеем

$$E_k - E_{k-1} \le -\mu\|x_k - x_{k-1}\|^2/\tau_k. \tag{38}$$

Отсюда делаем вывод о невозрастании последовательности неотрицательных чисел $\{E_k\}$ и о существовании $\lim\limits_{k\to\infty} E_k = \overline{E}$. Теперь из (38) легко установить сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k - x_{k-1}\|^2/\tau_k$, сумму которого обозначим через s. Из ограниченности последовательности $\{E_k\}$ следует ограниченность $\|x_k - x_{k-1}\|/\tau_k$ при всех $k \ge 2$. Пусть $\|x_k - x_{k-1}\|/\tau_k \le r_1$. Предположим, что, начиная с некоторого номера $k = n+1$, элементы x_k таковы, что $\|x_k\| > r$, а $\|x_n\| \le r$, $\|x_{n-1}\| \le r$. Умножим (3) скалярно на x_k при $k > n$, в полученном равенстве примем во внимание (37) и, введя обозначение $\chi_k = \|x_k\|^2/2$, известным способом придем к неравенству

$$\frac{\chi_k - \chi_{k-1}}{\tau_k}(1 + \mu\tau_k) - \frac{\chi_{k-1} - \chi_{k-2}}{\tau_{k-1}} \le \frac{\|x_k - x_{k-1}\|^2}{2\tau_k} + \frac{3\|x_{k-1} - x_{k-2}\|^2}{2\tau_{k-1}}, \quad k > n.$$

Нетрудно проверить, что $|\nu_n| = |\chi_n - \chi_{n-1}|/\tau_n \le rr_1$. Поэтому по лемме 2 при $k_1 = -\mu$, $k_2 = 0$, $w^1 = \nu_n$, $\lambda = 1/(1+\mu\tau_n)$ и начальных значениях χ_n и χ_{n-1} имеем оценку $\chi_k \le r^2/2 + rr_1/\overline{\mu} + 2c_1 s/\overline{\mu}$, что и доказывает ограниченность последовательности $\{x_k\}$ при $k \ge 2$. Отметим, что если $0 \in \Omega$, то первое из неравенств (37) вытекает из монотонности отображения B.

Замечание 4. Учет ограничений в (3) с помощью штрафного функционала (если такой сможем построить) в отличие от работ [4], [5] освобождает от необходимости проводить трудоемкую операцию проектирования на выпуклое замкнутое множество гильбертова пространства. В то же время неявный характер нелинейного регуляризованного процесса (3) создает известные трудности при его численной реализации. Отметим еще раз, что свойства приближений к решению задачи условной минимизации, получаемых методом из [5] и с помощью процесса (3), различны, поэтому оба метода итеративной регуляризации представляют интерес при решении некорректных задач условной минимизации, т. к. позволяют получить приближения к решению задачи, удовлетворяющие в общем случае различной априорной информации об искомом решении. Последнее весьма важно при отборе приближения к решению некорректной задачи.

Пример. Ставится задача об отыскании состояния равновесия мембраны, прогиб которой ограничивается жестким неподвижным препятствием вида $z = \chi(x,y)$, $(x,y) \in G$, G — ограниченная область в плоскости XOY, Γ — граница области G. Пусть мембрана закреплена по контуру Γ, нагружается давлением p, перпендикулярным срединной плоскости, прогиб происходит в направлении оси OZ. Пусть функция $w(x,y)$ определяет прогиб мембраны, а $q(x,y)$ — реакция препятствия. Считая данную задачу нелинейной, придем к уравнению в частных производных ([12], с. 135)

$$-\frac{\partial}{\partial x}a_1(x,y,w'_x) - \frac{\partial}{\partial y}a_2(x,y,w'_y) = -p(x,y,w) - q(x,y) \tag{39}$$

с краевым условием

$$w(x,y)|_\Gamma = 0. \tag{40}$$

Кроме того, имеем неравенства

$$w(x,y) \le \chi(x,y), \quad q(x,y) \ge 0, \tag{41}$$

которые соответственно характеризуют непроникновение точек мембраны в препятствие и определяют направление реакции препятствия, и уравнение

$$q(x,y)[w(x,y) - \chi(x,y)] = 0, \quad (x,y) \in G, \tag{42}$$

означающее, что одно из условий (41) в любой точке $(x,y) \in G$ обращается в строгое равенство.

Сделаем следующие предположения:

1) функции $a_i(x,y,\xi)$, $i = 1,2$, $p(x,y,\xi)$ измеримы по $(x,y) \in G$ при всех $\xi \in R^1$, непрерывны и не убывают по ξ при почти всех $(x,y) \in G$;
2) $|a_i(x,y,\xi)| \le c_i[b_i(x,y) + |\xi|]$, $i = 1,2$, $|p(x,y,\xi)| \le c_3[b_3(x,y) + |\xi|]$, $c_i > 0$, $b_i(x,y) \in L^2(G)$, $i = 1,2,3$.

Введем гильбертово пространство $H = \{w \mid w = w(x,y) \in W_1^2(G),\ (x,y) \in G,\ w(x,y)|_\Gamma = 0\}$ с нормой

$$\|w\| = \Big(\iint\limits_G |\nabla w|^2 dx\, dy\Big)^{1/2} \tag{43}$$

и определим оператор A

$$(Aw,v) = \iint\limits_G [a_1(x,y,w'_x)v'_x + a_2(x,y,w'_y)v'_y + p(x,y,w)v]dx\, dy \quad \forall w,v \in H. \tag{44}$$

Из условий 2) следует, что A действует из H в H (напр., [13], теорема 19.2; [1], пример 5.2; [14], с. 194), неубывание функций $a_1(x,y,\xi)$, $a_2(x,y,\xi)$, $p(x,y,\xi)$ по ξ позволяет сделать вывод о монотонности оператора A ([1], с. 64; [15], с. 89; [16]). Кроме того, можно установить ограниченность и потенциальность отображения A ([1], пример 5.1; [15], с. 116; [16]). Пусть

$A = \operatorname{grad}\Phi$. Задача (39)–(42) предполагается разрешимой, причем решение уравнения (39) понимается в обобщенном смысле (напр., [12], сс. 17, 131; [16]) или в смысле слабого решения ([1], с. 370). Поставленная задача при дополнительных условиях гладкости $w(x, y)$ эквивалентна задаче минимизации выпуклого функционала Φ ([12], § 3.2) на выпуклом замкнутом множестве $\Omega = \{w \mid w = w(x, y) \in H,\ w(x, y) \le \chi(x, y),\ (x, y) \in G\}$ ([12], с. 135). Значит, в наших условиях множество $N \ne \emptyset$, Φ ограничен снизу, $\operatorname{dom}\Phi = H$. Из определения (43) нормы следует правило вычисления скалярного произведения в H

$$(w, v) = \iint\limits_G [w'_x v'_x + w'_y v'_y] dx\, dy = (\nabla w, \nabla v)_2. \tag{45}$$

Тогда единичный оператор $E : H \to H$ будет определяться соотношением $(Ew, v) = (\nabla w, \nabla v)_2$ при любых $v, w \in H$. Далее, считая, что $\chi \in H$, определим на H штрафной функционал (ср. [11], с. 222)

$$\varphi(w) = \begin{cases} 0, & w \in \Omega; \\ \|w - \chi\|^2/2, & w \notin \Omega. \end{cases} \tag{46}$$

Отметим очевидность свойства (1) для φ. В то же время неравенство вида (18) установить не удается. Кроме того, в нашей постановке задачи не удается доказать ни выпуклость φ, ни монотонность оператора $B = \operatorname{grad}\varphi$ на H. Несколько изменив постановку задачи, все перечисленные проблемы можно снять. Действительно, будем искать минимум Φ не на множестве Ω, а на более узком множестве $\Omega' = \{w \mid w = w(x, y) \in \Omega,\ w'_x(x, y) \le \chi'_x(x, y),\ w'_y(x, y) \le \chi'_y(x, y),\ (x, y) \in G\}$, предполагая разрешимость этой задачи. Теперь, заменив множество Ω на Ω' в определении (46) функционала φ, легко установим монотонность оператора B, причем $Bw = 0$ при $w \in \Omega'$, а при $w \notin \Omega'$ отображение B определяется соотношением

$$(Bw, v) = (\nabla(w - \chi), \nabla v)_2 = -\iint\limits_G (w''_x - \chi''_x + w''_y - \chi''_y) v\, dx\, dy. \tag{47}$$

Последнее равенство устанавливается с помощью формулы Грина при учете граничного условия (40). Нужные при этом свойства гладкости считаем выполненными. Справедливость (18) следует из определения проекции элемента на множество, из (47) и включения $\chi \in \Omega'$. Выполнить условие (17) можно без труда. Ограниченность оператора B очевидна. Отметим, что переход от множества Ω к ограниченному в H множеству Ω' можно рассматривать как построение некоторого множества (класса) возможных решений исходной задачи ([17], с. 41; [18], с. 38). Кроме того, следует подчеркнуть, что задача минимизации Φ на Ω' сводится к решению некоторого вариационного неравенства на этом множестве, а переход от вариационного неравенства к уравнению (39) основан на условиях (41), (42) ([12], § 3.2).

В силу вышеизложенного методы (2) и (3) в форме вариационных уравнений для рассматриваемой задачи примут соответственно вид

$$\left(\frac{d^2\nabla w}{dt^2}, \nabla v\right)_2 + \mu\left(\frac{d\nabla w}{dt}, \nabla v\right)_2 + \gamma(t)\{(Bw, v) + \beta(t)[(Aw, v) + \alpha(t)(\nabla w, \nabla v)_2]\} = 0,$$
$$\mu_k(\nabla w_k - \nabla w_{k-1}, \nabla v)_2 + t_k\gamma_k\{(Bw_k, v) + \beta_k[(Aw_k, v) + \alpha_k(\nabla w_k, \nabla v)_2]\} =$$
$$= \sigma_k(\nabla w_{k-1} - \nabla w_{k-2}, \nabla v)_2$$

при всех $v \in H$. Величины (Aw, v), (Bw, v), $(\nabla w, \nabla v)_2$ определены в соотношениях (44), (47) и (45).

Литература

1. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1972. – 416 с.
2. Васильев Ф.П., Недич А. *Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента второго порядка* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. – 1994. – № 2. – С. 3–10.
3. Рязанцева И.П. *Непрерывный метод решения задач условной минимизации* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39. – № 5. – С. 734–742.
4. Амочкина Т.В., Недич А. *Об одном варианте непрерывного метода проекции градиента второго порядка и его дискретном аналоге* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. – 1995. – № 2. – С. 5–11.
5. Васильев Ф.П., Амочкина Т.В., Недич А. *Об одном регуляризованном варианте двухшагового метода проекции градиента* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. – 1996. – № 1. – С. 35–42.
6. Недич А. *Трехшаговый метод проекции градиента для задач минимизации* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 10. – С. 32–37.
7. Васильев Ф.П., Недич А., Ячимович М. *Трехшаговый регуляризованный метод линеаризации для решения задач минимизации*// Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 12. – С. 25–32.
8. Антипин А.С. *Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования* // Вопр. кибернетики. Вычисл. вопросы анализа больших систем. – М.: Научный совет по комплексной проблеме “Кибернетика” АН СССР, 1989. – С. 5–43.
9. Апарцин А.С. *К построению сходящихся итерационных процессов в гильбертовом пространстве* // Тр. по прикл. матем. и кибернетике. – Иркутск, 1972. – С. 7–14.
10. Васин В.В., Агеев А.Л. *Некорректные задачи с априорной информацией.* – Екатеринбург: Уральская издательская фирма “Наука”, 1993. – 262 с.
11. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
12. Кравчук А.С. *Вариационные и квазивариационные неравенства в механике.* – М.: Изд-во МГАПИ, 1997. – 340 с.
13. Вайнберг М.М. *Вариационные методы исследования нелинейных операторов.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 344 с.
14. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
15. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.
16. Ляшко А.Д., Карчевский М.М. *Разностные методы решения нелинейных задач фильтрации* // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 7. – С. 28–45.
17. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* – М.: Наука, 1978. – 206 с.
18. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1979. – 285с.

Нижегородский государственный технический университет

Поступила 01.02.2000