ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 9 (508)

УДК 512.541

С.Я. ГРИНШПОН

ВПОЛНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

В [1] известное понятие *вполне разложимой* группы распространено с абелевых групп без кручения на произвольные абелевы группы. Абелева группа называется *вполне разложимой*, если она является прямой суммой групп ранга 1, т. е. групп, каждая из которых изоморфна либо ненулевой подгруппе квазициклической группы $Z(p^\infty)$ для некоторого простого числа p, либо ненулевой подгруппе группы Q всех рациональных чисел.

В данной статье получено полное описание вполне характеристических подгрупп и их решетки для вполне разложимых групп. В качестве следствий получены результаты о пересечениях вполне характеристических подгрупп с некоторыми подгруппами исследуемых групп.

Известно, что для вполне разложимых групп без кручения любые два разложения в прямую сумму групп ранга 1 изоморфны ([2], предложение 86.1, с. 134) и прямые слагаемые таких групп вполне разложимы ([2], теорема 86.7, с. 137). Покажем, что аналогичные результаты имеют место для вполне разложимых смешанных групп.

Лемма 1. *Любые два разложения вполне разложимой смешанной группы в прямую сумму групп ранга* 1 *изоморфны.*

Доказательство. Пусть G — вполне разложимая смешанная группа. Так как делимая часть периодической части любой абелевой группы однозначно определяется этой группой, то, не умаляя общности, можно считать, что периодическая часть $T(G)$ группы G редуцирована. В любом разложении такой вполне разложимой смешанной группы G в прямую сумму групп ранга 1 сумма всех примарных циклических слагаемых совпадает с периодической частью группы G. Тогда ([3], теорема 17.4, с. 108) мощность $\mathfrak{M}_{p^n}$ множества прямых слагаемых порядка p^n, $n \in \mathbb{N}$ (p — простое число), в любом разложении группы $T(G)$ (значит, и группы G) в прямую сумму групп ранга 1 одинакова, и G — расщепляющаяся группа. Если $G = T(G) \oplus A_1$ и $G = T(G) \oplus A_2$ — разложения группы G в прямую сумму периодической части этой группы и группы без кручения, то $A_1 \cong A_2$, A_1 и A_2 — вполне разложимые группы без кручения. Применение к группам A_1 и A_2 предложения 86.1 из [2] завершает доказательство леммы. □

Лемма 2. *Прямые слагаемые вполне разложимых смешанных групп вполне разложимы.*

Доказательство. Пусть G — вполне разложимая смешанная группа и A — прямое слагаемое группы G, т. е. $G = A \oplus B$. Имеем $T(G) = T(A) \oplus T(B)$. Группу G можно представить в виде $G = T(G) \oplus G'$, т. е. G — расщепляющаяся группа. Так как прямые слагаемые расщепляющихся групп расщепляются, то $A = T(A) \oplus A'$ и $B = T(B) \oplus B'$. Тогда получаем $G = A \oplus B = (T(A) \oplus T(B)) \oplus (A' \oplus B') = T(G) \oplus (A' \oplus B')$. Отсюда $A' \oplus B' \cong G'$, и т. к. G' — вполне разложимая группа без кручения, то и A' — вполне разложимая группа без кручения ([2], теорема 86.7, с. 137). Запишем $T(G) = D \oplus R$, $T(A) = D_1 \oplus R_1$, $T(B) = D_2 \oplus R_2$, где D, D_1, D_2 — делимые части групп $T(G)$, $T(A)$ и $T(B)$ соответственно, R, R_1, R_2 — редуцированные группы. Имеем $D \oplus R = T(G) = T(A) \oplus T(B) = (D_1 \oplus D_2) \oplus (R_1 \oplus R_2)$. Так как $D = D_1 \oplus D_2$, то $R_1 \oplus R_2 \cong R$ и группа R_1, как подгруппа прямой суммы циклических групп, является прямой суммой циклических групп. Значит, $T(A)$ — периодическая вполне разложимая группа. Так как $A = T(A) \oplus A'$ и A' — вполне разложимая группа без кручения, то A — вполне разложимая группа. $\square$

Используя леммы 1 и 2 с учетом того, что любые два разложения вполне разложимой периодической группы в прямую сумму коциклических групп изоморфны и всякое прямое слагаемое такой периодической группы вполне разложимо, получаем

Предложение 1. *Пусть G — вполне разложимая группа. Тогда*

1) *любые два разложения группы G в прямую сумму групп ранга 1 изоморфны;*
2) *всякое прямое слагаемое группы G — вполне разложимая группа.*

Перейдем теперь к изучению вполне характеристических подгрупп вполне разложимых групп. В теореме 1.4 из [4] показано, что при изучении строения вполне характеристических подгрупп абелевых групп можно ограничиться редуцированными группами. Поэтому в дальнейшем в статье изучаются редуцированные группы.

Прежде чем формулировать основной результат статьи, приведем необходимые обозначения и термины, используемые в [4].

Пусть $\mathfrak{X}$ — множество, состоящее из последовательностей $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}, \dots)$, где каждое $v^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, — целое неотрицательное число или символ ∞. Такие последовательности называются *характеристиками*. В множестве $\mathfrak{X}$ естественным образом вводится частичный порядок: $v \leqslant w$ тогда и только тогда, когда $v^{(i)} \leqslant w^{(i)}$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Относительно этого частичного порядка $\mathfrak{X}$ является полной решеткой. Пусть $\Pi = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ — множество всех простых чисел, перенумерованных в порядке возрастания. Если G — абелева группа без кручения, $x \in G$, то *характеристика $\chi_G(x)$ элемента x* — это такая характеристика $w = (w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(n)}, \dots)$, в которой каждое $w^{(i)}$ есть p_i-высота $h^G_{p_i}(x)$ элемента x в группе G. Если понятно, о какой группе G идет речь, то индекс G в обозначениях характеристики и высоты будет опускаться.

Пусть G — абелева группа без кручения, v — некоторая характеристика. Обозначим $G(v) = \{g \in G \mid \chi(g) \geqslant v\}$. Понятно, что $G(v)$ — вполне характеристическая подгруппа группы G.

Определение ([4]). *Гомоморфной оболочкой* подгруппы A' группы A в группе B будем называть подгруппу группы B, порожденную всеми элементами вида $\eta a'$, где $\eta \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $a' \in A'$.

Лемма 3 ([4]). *Пусть $G = \bigoplus\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha$, $G' = \bigoplus\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} G'_\alpha$, где G'_α — вполне характеристическая подгруппа группы G_α ($\alpha \in \mathfrak{A}$). Подгруппа G' вполне характеристична в G тогда и только тогда, когда для всякой пары индексов (γ, β), где $\gamma, \beta \in \mathfrak{A}$, $\gamma \neq \beta$, гомоморфная оболочка подгруппы G'_γ группы G_γ в группе G_β содержится в G'_β.*

Для абелевой группы G обозначим через $\Phi(G)$ решетку всех вполне характеристических подгрупп группы G.

Пусть G — абелева p-группа, $f_k(G)$ — k-й инвариант Ульма–Капланского этой группы ($f_k(G) = r(p^k A[p]/p^{k+1}A[p])$) и $K(G) = \{k \in \mathbb{N} \mid f_G(k-1) \neq 0\}$. Рассмотрим функции φ, отображающие множество $K(G)$ в множество всех целых неотрицательных чисел и удовлетворяющие условиям

1) $\varphi(k) \leqslant k$ для всякого $k \in K(G)$;
2) $\varphi(k) \leqslant \varphi(k+r) \leqslant \varphi(k) + r$ для любых $k, k+r \in K(G)$, $r \in \mathbb{N}$.

Обозначим множество функций, удовлетворяющих свойствам 1), 2) через $F_1(G)$; $F_1(G)$ можно частично упорядочить, положив $\varphi \leqslant \psi$ тогда и только тогда, когда $\varphi(k) \leqslant \psi(k)$ для каждого $k \in K(G)$. Относительно этого порядка $F_1(G)$ является полной решеткой.

В теореме 2.2 из [5] получено новое описание вполне характеристических подгрупп абелевых p-групп без элементов бесконечной высоты и показано, что для таких групп G решетки $\Phi(G)$ и $F_1(G)$ антиизоморфны. Как следствие этого описания получается такой результат для абелевых p-групп, разложимых в прямые суммы циклических групп.

Предложение 2 ([5], следствие 2.5). *Пусть* $B = \bigoplus_{k\in K} B_k$,*где* $B_k = \oplus Z(p^k)$. *Подгруппа* S *вполне характеристична в* B *тогда и только тогда, когда* $S = \bigoplus_{k\in K} p^{\varphi(k)}B_k$, *где* φ — *некоторая функция из* $F_1(B)$. *Соответствие* $\mu_1 : \varphi \longmapsto \bigoplus_{k\in K} p^{\varphi(k)}B_k$ *определяет антиизоморфизм решеток* $F_1(B)$ *и* $\Phi(B)$.

Пусть G — вполне разложимая группа. Обозначим через $\Omega(G)$ множество всех типов прямых слагаемых без кручения ранга 1 группы G. Из предложения 1 вытекает, что в любом разложении группы G в прямую сумму групп ранга 1 для всякого типа $t \in \Omega(G)$ существует компонента без кручения такого разложения, имеющая тип t. Рассмотрим произвольное разложение группы G в прямую сумму групп ранга 1. Обозначим через A_t ($t \in \Omega(G)$) прямую сумму прямых слагаемых без кручения ранга 1 типа t этого разложения, а через B_{ij} ($i, j \in \mathbb{N}$) — прямую сумму циклических прямых слагаемых порядка p_i^j такого разложения (некоторые из групп B_{ij} могут быть нулевыми). Получаем *каноническое разложение* $G = (\bigoplus_{i,j\in\mathbb{N}} B_{ij}) \oplus (\bigoplus_{t\in\Omega(G)} A_t)$. Также из предложения 1 вытекает, что каноническое разложение единственно с точностью до изоморфизма. Пусть K_i ($i \in \mathbb{N}$) — множество всех тех натуральных чисел n, для которых существует циклическое прямое слагаемое группы G порядка p_i^n.

Матрицу $M = (m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$, элементами которой являются неотрицательные целые числа, назовем *допустимой* для группы G, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) $m_{ij} \leqslant j$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$;

б) $m_{ij} \leqslant m_{i,j+r} \leqslant m_{ij} + r$ для всякого $i \in \mathbb{N}$ и для любых $j, j+r \in K_i$, $r \in \mathbb{N}$;

в) $m_{ij} = 0$ для всякого $i \in \mathbb{N}$ и для любого $j \in \mathbb{N} \setminus K_i$.

Будем говорить, что функция f, отображающая $\Omega(G)$ в $\mathfrak{X}$, *допустима* для группы G, если она удовлетворяет следующим условиям (чтобы сократить количество скобок, будем записывать аргумент как индекс):

1) либо $f_t = (f_t^{(1)}, f_t^{(2)}, \ldots, f_t^{(k)}, \ldots) \leqslant \chi$ для некоторой $\chi \in t$, либо $f_t^{(k)} = \infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$;

2) $f_t^{(k)} = \infty$ для всех k, для которых $p_k A_t = A_t$;

3) если $t_1 > t_2$ ($t_1, t_2 \in \Omega(G)$), то для всякого k такого, что $p_k A_{t_1} \neq A_{t_1}$, имеем $f_{t_1}^{(k)} \leqslant f_{t_2}^{(k)}$.

Множество $F_2(G)$ всех допустимых для группы G функций можно частично упорядочить, положив $f \leqslant \varphi$ тогда и только тогда, когда $f_t \leqslant \varphi_t$ для всякого $t \in \Omega(G)$. Относительно этого порядка $F_2(G)$ является полной решеткой. В теореме 3.7 из [5] получено полное описание вполне характеристических подгрупп и решетки (ими образуемой) для сепарабельных групп без кручения. Как следствие этого описания для вполне разложимых групп без кручения получаем

Предложение 3. *Пусть* $G = \bigoplus_{t\in\Omega(G)} A_t$ — *вполне разложимая группа без кручения* (A_t — *однородная компонента типа* t *группы* G). S *является вполне характеристической подгруппой группы* G *тогда и только тогда, когда* $S = \bigoplus_{t\in\Omega(G)} A_t(f_t)$, *где* f — *некоторая функция из* $F_2(G)$. *Соответствие* $\mu_2 : f \longmapsto \bigoplus_{t\in\Omega(G)} A_t(f_t)$ *определяет антиизоморфизм решеток* $F_2(G)$ *и* $\Phi(G)$.

Вернемся к изучению произвольной вполне разложимой группы G, имеющей каноническое разложение $G = (\bigoplus_{i,j\in\mathbb{N}} B_{ij}) \oplus (\bigoplus_{t\in\Omega(G)} A_t)$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}(G)$ всех пар вида (M, f), где M и f — допустимые для группы G матрица и функция соответственно, удовлетворяющие условию

$$\inf\{f_t^{(i)} \mid t \in \Omega(G)\} \geqslant \sup\{m_{ij} \mid j \in \mathbb{N}\} \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

На множестве $\mathfrak{M}(G)$ естественным образом введем отношение порядка: $(M', f') \leqslant (M'', f'')$ в том и только том случае, когда $M' \leqslant M''$, т. е. $m'_{ij} \leqslant m''_{ij}$ ($M' = (m'_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$, $M'' = (m''_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$) для любых $i,j\in\mathbb{N}$ и $f'\leqslant f''$, т. е. $f'_t\leqslant f''_t$ для всякого $t\in\Omega(G)$. Непосредственно проверяется, что $\mathfrak{M}(G)$ — полная решетка.

Теорема. *Пусть G — вполне разложимая группа и $G=(\bigoplus\limits_{i,j\in\mathbb{N}}B_{ij})\oplus(\bigoplus\limits_{t\in\Omega(G)}A_t)$ — ее каноническое разложение. Подгруппа S вполне характеристична в G тогда и только тогда, когда $S=(\bigoplus\limits_{i,j\in\mathbb{N}}p_i^{m_{ij}}B_{ij})\oplus(\bigoplus\limits_{t\in\Omega(G)}A_t(f_t))$, где $(M,f)\in\mathfrak{M}(G)$ $(M=(m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}})$. Соответствие $\mu:(M,f)\longrightarrow(\bigoplus\limits_{i,j\in\mathbb{N}}p_i^{m_{ij}}B_{ij})\oplus(\bigoplus\limits_{t\in\Omega(G)}A_t(f_t))$ определяет антиизоморфизм решеток $\mathfrak{M}(G)$ и $\Phi(G)$.*

Доказательство. 1. Покажем вначале, что μ отображает $\mathfrak{M}(G)$ в $\Phi(G)$, т. е. $S=(\bigoplus\limits_{i,j\in\mathbb{N}}p_i^{m_{ij}}B_{ij})\oplus(\bigoplus\limits_{t\in\Omega(G)}A_t(f_t))$, где $(M,f)\in\mathfrak{M}(G)$ — вполне характеристическая подгруппа группы G. Из предложения 2 вытекает, что подгруппа $\bigoplus\limits_{i,j\in\mathbb{N}}p_i^{m_{ij}}B_{ij}$ вполне характеристична в $\bigoplus\limits_{i,j\in\mathbb{N}}B_{ij}$, а т. к. в силу предложения 3 подгруппа $\bigoplus\limits_{t\in\Omega(G)}A_t(f_t)$ вполне характеристична в $\bigoplus\limits_{t\in\Omega(G)}A_t$, то с учетом леммы 3 нужно показать только, что для любого $t\in\Omega(G)$ гомоморфная оболочка подгруппы $A_t(f_t)$ группы A_t в любой группе B_{ij} $(i,j\in\mathbb{N})$ содержится в $p_i^{m_{ij}}B_{ij}$.

Пусть $t\in\Omega(G)$ и $a\in A_t(f_t)$, тогда $\chi_{A_t}(a)\geqslant f_t$ и $h_{p_i}^{A_t}(a)\geqslant f_t^{(i)}$. Если $\varphi\in\mathrm{Hom}(A_t,B_{ij})$, то $h_{p_i}(\varphi a)\geqslant f_t^{(i)}$. В силу условия $(*)$ для пары (M,f) имеем $f_t^{(i)}\geqslant m_{ij}$ и поэтому $h_{p_i}(\varphi a)\geqslant m_{ij}$. Значит, $\varphi a\in p_i^{m_{ij}}B_{ij}$.

2. Покажем теперь, что μ — сюръективное отображение, т. е. всякая вполне характеристическая подгруппа S группы G имеет вид $S=(\bigoplus\limits_{i,j\in\mathbb{N}}p_i^{m_{ij}}B_{ij})\oplus(\bigoplus\limits_{t\in\Omega(G)}A_t(f_t))$, где $(M,f)\in\mathfrak{M}(G)$ $(M=(m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}})$.

Пусть $\bigoplus\limits_{i,j\in\mathbb{N}}B_{ij}=B$, $\bigoplus\limits_{t\in\Omega(G)}A_t=A$. Имеем $G=B\oplus A$, и если S — вполне характеристическая подгруппа группы G, то $S=(S\cap A)\oplus(S\cap B)$, где $S\cap A$ и $S\cap B$ — вполне характеристические подгруппы групп A и B соответственно. Имеем $S\cap B=\bigoplus\limits_{i,j\in\mathbb{N}}p_i^{m_{ij}}B_{ij}$, где $M=(m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ — допустимая матрица для группы G (предложение 2) и $S\cap A=\bigoplus\limits_{t\in\Omega(G)}A_t(f_t)$, где f —допустимая функция для G (предложение 3). Покажем, что M и f связаны условием $(*)$.

Пусть $i\in\mathbb{N}$. Для всякого $t\in\Omega(G)$ $f_t^{(i)}$ является целым неотрицательным числом или символом ∞. Пусть t_i — такой тип из множества $\Omega(G)$, что $\inf\{f_t^{(i)}\mid t\in\Omega(G)\}=f_{t_i}^{(i)}$. Если $f_{t_i}^{(i)}=\infty$, то условие $(*)$ выполняется очевидным образом. Пусть $f_{t_i}^{(i)}=k_i\neq\infty$. Рассмотрим группу A_{t_i}, которая является прямой суммой групп без кручения ранга 1 типа t_i, обозначим одну из таких групп ранга 1 через C_i. Пусть j — такое произвольное натуральное число, что $B_{ij}\neq 0$; B_{ij} является прямой суммой циклических групп порядка p_i^j, обозначим образующий элемент одной из таких циклических групп через b_{ij}. Имеем $S\cap C_i=C_i(f_{t_i})$ ($C_i(f_{t_i})$ — прямое слагаемое группы $A_{t_i}(f_{t_i})$).

В группе $C_i(f_{t_i})$ найдется такой элемент c_i, что $h_{p_i}^{C_i}(c_i)=f_{t_i}^{(i)}=k_i$. Существует гомоморфизм φ_i группы C_i в группу $\langle b_{ij}\rangle$, отображающий элемент c_i в элемент $p_i^{k_i}b_{ij}$. Гомоморфизм φ_i допускает продолжение до гомоморфизма группы A_{t_i} в группу B_{ij}. Значит, элемент $p_i^{k_i}b_{ij}$ принадлежит гомоморфной оболочке подгруппы $A_{t_i}(f_{t_i})$ группы A_{t_i} в группе B_{ij}. Отсюда получаем $p_i^{k_i}b_{ij}\in p_i^{m_{ij}}B_{ij}$, и поэтому $k_i\geqslant m_{ij}$. Учитывая, что $m_{ij}=0$, если $B_{ij}=0$ (это вытекает из условия в) для допустимых матриц), имеем $f_{t_i}^{(i)}\geqslant m_{ij}$ для любого $j\in\mathbb{N}$. Отсюда вытекает, что $f_{t_i}^{(i)}\geqslant\sup\{m_{ij}\mid j\in\mathbb{N}\}$, и поэтому $\inf\{f_t^{(i)}\mid t\in\Omega(G)\}\geqslant\sup\{m_{ij}\mid j\in\mathbb{N}\}$.

3. Докажем, что μ — инъективное отображение. Пусть $(M',f'),(M'',f'')\in\mathfrak{M}(G)$ $(M'=(m'_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$, $M''=(m''_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}})$ и $\mu(M',f')=\mu(M'',f'')$. Имеем $(\bigoplus\limits_{i,j\in\mathbb{N}}p_i^{m'_{ij}}B_{ij})\oplus(\bigoplus\limits_{t\in\Omega(G)}A_t(f'_t))=$

$(\bigoplus_{i,j\in\mathbb{N}} p_i^{m''_{ij}} B_{ij}) \oplus (\bigoplus_{t\in\Omega(G)} A_t(f''_t))$. Так как $p_i^{m'_{ij}} B_{ij} \subset B_{ij}$, $p_i^{m''_{ij}} B_{ij} \subset B_{ij}$ и аналогично $A_t(f'_t) \subset A_t$, $A_t(f''_t) \subset A_t$, то $p_i^{m'_{ij}} B_{ij} = p_i^{m''_{ij}} B_{ij}$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$ и $A_t(f'_t) = A_t(f''_t)$ для всякого $t \in \Omega(G)$. Учитывая условия а) и в) для допустимых матриц и условия 1) и 2) для допустимых функций, получим $m'_{ij} = m''_{ij}$ $(i, j \in \mathbb{N})$ и $f'_t = f''_t$ $(t \in \Omega(G))$. Значит, $(M', f') = (M'', f'')$ и отображение μ инъективно.

Понятно, что $(M_2, f_2) \leqslant (M_1, f_1)$ $((M_1, f_1), (M_2, f_2) \in \mathfrak{M}(G))$ в том и только том случае, когда $\mu(M_1, f_1) \subset \mu(M_2, f_2)$. Поэтому биекция μ является решеточным антиизоморфизмом. □

Будем обозначать через $T_p(G)$, $p \in \Pi$, p-компоненту периодической части группы G. Чтобы подчеркнуть, что p — k-е простое число, будем иногда обозначать эту p-компоненту через $T_{p_k}(G)$.

Тип t назовем *p_k-делимым*, если для абелевой группы A без кручения ранга 1 типа t имеем $p_k A = A$. Понятно, что тип t тогда и только тогда p_k-делим, когда для всякой характеристики $v \in t$ имеем $v^{(k)} = \infty$.

Следствие 1. Пусть G — вполне разложимая группа, S — вполне характеристическая подгруппа группы G. Если для некоторого простого числа p_k группа $T_{p_k}(G)$ неограничена, а $S \cap T_{p_k}(G)$ — ограниченная группа, то для всякого типа $t \in \Omega(G)$, не являющегося p_k-делимым, имеем $S \cap A_t = 0$.

Доказательство. Запишем $G = (\bigoplus_{i,j\in\mathbb{N}} B_{ij}) \oplus (\bigoplus_{t\in\Omega(G)} A_t)$. В силу теоремы вполне характеристической подгруппе S соответствует некоторая пара $(M, f) \in \mathfrak{M}(G)$ $(\mu(M, f) = S)$. В матрице $M = (m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ рассмотрим k-ю строку. Имеем $S \cap T_{p_k}(G) = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} p_k^{m_{kj}} B_{kj}$. Так как $T_{p_k}(G)$ — неограниченная группа, а $S \cap T_{p_k}(G)$ — ограниченная группа, то последовательность $(m_{kj})_{j\in\mathbb{N}}$ неограничена. Отсюда $\sup\{m_{kj} \mid j \in \mathbb{N}\} = \infty$ и в силу условия $(*)$ для пары (M, f) имеем $\inf\{f_t^{(k)} \mid t \in \Omega(G)\} = \infty$. Пусть $t' \in \Omega(G)$ и t' — не p_k-делимый тип. Тогда $p^k A_{t'} \neq A_{t'}$. Учитывая, что $f_{t'}^{(k)} = \infty$ и условие 1) для допустимой функции f, имеем $f_{t'}^{(n)} = \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $S \cap A_{t'} = A_{t'}(f_{t'}) = 0$. □

Для абелевой группы A обозначим через $\pi(A)$ множество всех таких простых чисел p, для которых $pA \neq A$.

Следствие 2. Пусть G — вполне разложимая группа, S — вполне характеристическая подгруппа группы G. Если $S \cap A_{t'} = A_{t'}$ для некоторого типа $t' \in \Omega(G)$, то $S \cap T_q(G) = T_q(G)$ для любого простого числа $q \in \pi(A_{t'})$.

Доказательство. Имеем $G = (\bigoplus_{i,j\in\mathbb{N}} B_{ij}) \oplus (\bigoplus_{t\in\Omega(G)} A_t)$. По теореме вполне характеристической подгруппе S соответствует некоторая пара $(M, f) \in \mathfrak{M}(G)$. Так как $S \cap A_{t'} = A_{t'} = A_{t'}(f_{t'})$, то $f_{t'}^{(k)} = 0$ для всех таких натуральных чисел k, для которых k-е простое число p_k принадлежит $\pi(A_{t'})$. Для таких натуральных чисел k имеем $\inf\{f_t^{(k)} \mid t \in \Omega(G)\} = 0$. В силу условия $(*)$ для пары (M, f) имеем $\sup\{m_{kj} \mid j \in \mathbb{N}\} = 0$ и, значит, $m_{kj} = 0$ для всякого $j \in \mathbb{N}$. Тогда $S \cap T_{p_k}(G) = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} p_k^{m_{kj}} B_{kj} = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} B_{kj} = T_{p_k}(G)$. □

Следствие 3. Пусть G — вполне разложимая группа, содержащая свободное прямое слагаемое, и S — вполне характеристическая подгруппа группы G, имеющая с этим прямым слагаемым ненулевое пересечение. Тогда $S \cap T_p(G) = T_p(G)$ почти для всех простых чисел p.

Доказательство. Запишем $G = (\bigoplus_{i,j\in\mathbb{N}} B_{ij}) \oplus (\bigoplus_{t\in\Omega(G)} A_t)$. В силу теоремы вполне характеристической подгруппе S соответствует некоторая пара $(M, f) \in \mathfrak{M}(G)$. Среди типов множества $\Omega(G)$ есть тип t_1, являющийся типом аддитивной группы целых чисел. Учитывая, что $S \cap A_{t_1} \neq 0$, и применяя условие 1) для допустимых функций, имеем $\inf\{f_t^{(k)} \mid t \in \Omega(G)\} = 0$ для почти всех натуральных чисел k. Для всех таких натуральных чисел k, для которых $\inf\{f_t^{(k)} \mid t \in \Omega(G)\} = 0$, в силу условия $(*)$ для пары (M, f) имеем $\sup\{m_{kj} \mid j \in \mathbb{N}\} = 0$, и поэтому, как было установлено в доказательстве следствия 2, $S \cap T_{p_k}(G) = T_{p_k}(G)$. Итак, $S \cap T_p(G) = T_p(G)$ почти для всех простых чисел p. $\square$

Из следствия 3 непосредственно вытекает

Следствие 4. Пусть G — вполне разложимая смешанная группа, фактор-группа которой по ее периодической части свободна. Если S — смешанная вполне характеристическая подгруппа группы G, то $S \cap T_p(G) = T_p(G)$ почти для всех простых чисел p.

Литература

1. Megibben Ch.K. *Separable mixed groups* // Comment. Math. Univ. Carolin. – 1980. – V. 21. – № 4. – P. 755–768.
2. Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы.* Т. 2. – М.: Мир, 1977. – 416 с.
3. Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы.* Т. 1. – М.: Мир, 1974. – 335 с.
4. Гриншпон С.Я. *О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения* // Абел. группы и модули. – Томск, 1981. – С. 56–92.
5. Гриншпон С.Я. *Вполне характеристические подгруппы сепарабельных абелевых групп* // Фундамент. и прикл. матем. – 1998. – Т. 4. – № 4. – С. 1281–1307.

Томский государственный университет

Поступила
03.06.2002