МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ТЕОРИИ И ТЕХНОЛОГИЙ ПРЕПОДАВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Направление: 050 201.65 Педагогическое образование

Специализация: Математика и английский язык

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Метод координат в курсе стереометрии средней школы

Работа завершена:

"___"_____ 2014 г. _____ (З.А.Гильманова)

Работа допущена к защите:

К.п.н., доцент

"___"_____ 2014 г. _____ (Н.В.Тимербаева)

Заведующий кафедрой

Д.п.н., профессор

"___"_____ 2014 г. _____ (Л.Р. Шакирова)

Казань – 2014

Введение 3
Глава 1.ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ
1.1 Координаты в пространстве 4
1.2 Векторы в пространстве 5
1.3 Поверхности и линии в пространстве 9
1.4 Сферические координаты 12
Глава 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ
2.1 Основные положения изучения метода координат 14
2.2 Анализ школьных учебников геометрии 15
2.3 Суть координатного метода 17
2.4 Этапы решения задач методом координат 18
2.5 Задачи, обучающие координатному методу 18
2.6 Примеры определения фигур уравнениями 22
2.7 Виды задач, решаемых методом координат 24
Глава 3. СИСТЕМА УРОКОВ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ 35
Заключение 62
Список использованной литературы 63

Введение

В стереометрии используется два основных метода решения задач. Первый метод основан на аксиомах, теоремах и свойствах фигур. Он требует логической последовательности практических рассуждений. Второй метод – это метод координат или координатно-векторный метод. Стоит отметить, что изучение метода координат является неотъемлемой частью школьного курса геометрии, так как его можно успешно применять при решении большого числа задач, в том числе, задач Единого Государственного экзамена (задания С2). А так как, эти задания - повышенной сложности, то они приносят учащимся хорошие баллы при сдаче ЕГЭ.

Поэтому необходима методика изучения метода координат, позволяющая ученикам применять его при решении стереометрических задач, и показывающая, что это лишь вспомогательный метод.

Всем вышесказанным и определяется **актуальность** выбранной темы: «Метод координат в стереометрии средней школы».

Объект исследования – это процесс изучения учащимися геометрии.

Предметом исследования является изучение метода координат в пространстве в школьном курсе геометрии.

Цель работы - познакомиться с методикой изучения и использования метода координат в пространстве в школьном курсе геометрии.

Для достижения нашей цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Подобрать теоретический материал по координатному методу,
2. Рассмотреть методику изучения метода координат в пространстве,
3. Показать все достоинства данного метода при решении соответствующего вида задач.

Структура работы: работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников и содержит 64 страницы.

Глава 1.ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ

1.1 Координаты в пространстве

Метод координат — способ определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов. Числа (символы), определяющие положение точки (тела) на прямой, плоскости, в пространстве, на поверхности и так далее, называются её координатами. В зависимости от целей и характера исследования выбирают различные системы координат.

Система координат — это способ определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов. Совокупность чисел или символов, определяющие положение конкретной точки, называется координатами этой точки.

В математике координаты — совокупность чисел, сопоставленных точкам многообразия в некоторой карте определённого атласа.

В элементарной геометрии координаты — величины, определяющие положение точки на плоскости и в пространстве. На плоскости положение точки чаще всего определяется расстояниями от двух прямых (координатных осей), пересекающихся в одной точке (начале координат) под прямым углом; одна из координат называется ординатой, а другая — абсциссой. В пространстве по системе Декарта положение точки определяется расстояниями от трёх плоскостей координат, пересекающихся в одной точке под прямыми углами друг к другу, или сферическими координатами, где начало координат находится в центре сферы. экваториальной, эклиптической и галактической.

Наиболее используемая система координат — прямоугольная система координат (также известная как декартова система координат)[1].

Прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием масштаба (отрезка для измерения длин) и трех пересекающихся в

одной точке взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в определенном порядке.

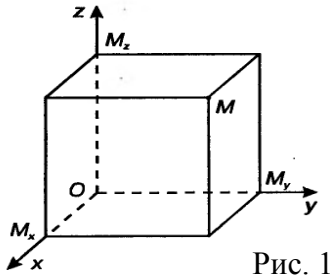


Рис. 1

Точка пересечения осей называется началом координат, сами оси – координатными осями, первая из них – осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью аппликат. Обозначаются, соответственно, O - начало координат, *Ox, Oy, Oz*. Если M – произвольная точка пространства, то проведя три плоскости перпендикулярные координатным осям, получим точки пересечения с осями: M_x, M_y, M_z(рис. 1). Прямоугольными декартовыми координатами называются числа, определяемые формулой:

$x = OM_x$, $y = OM_y$, $z = OM_z$, где OM_x, OM_y, OM_z- величины направленных отрезков OM_x, OM_y, OM_z. Число x называется первой координатой, y - второй и z – третьей.

Расстояние между двумя точками в пространстве можно определить по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ [2].

В пространстве также можно использовать полярные, сферические и цилиндрические координаты.

Координаты на плоскости и в пространстве можно вводить бесконечным числом разных способов. Решая ту или иную математическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще или удобнее в данном конкретном случае.

1.2 Векторы в пространстве

Из курса планиметрии мы знаем, что вектор – направленный отрезок. Рассмотрим в пространстве декартову прямоугольную систему координат. Векторы, как и точки, в пространстве имеют свои координаты. Их несложно

найти: если даны точки A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), тогда вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Частным случаем является радиус-вектор, точка приложения которого совпадает с началом координат. И для радиус-вектора координатами в этой системе будет проекция на координатные оси.

Можно сказать, что координаты радиус вектора данной точки *M* совпадает с координатами точки *M*. Таким образом, координаты точки *M* можно определять с помощью радиус-вектора. Радиус-вектором точки M называется вектор $r = \overline{OM}$, точка приложения которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке *M*. Декартовыми прямоугольными координатами *X, Y, Z* вектора $\boldsymbol{r}$ называется его проекция на координатные оси X=пр$_x\boldsymbol{r}$, Y=пр$_y\boldsymbol{r}$,Z=пр$_z\boldsymbol{r}$. Если *x,y,z* – декартовые прямоугольные координаты точки *M*, то *X=x, Y=y, Z=z,* т.е. координаты радиус вектора $\overline{OM}$ равны координатам точки *M*(рис. 2).

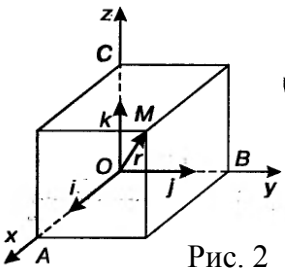


Рис. 2

Введем в рассмотрение единичные векторы ***i, j, k*** координатных осей (их называют ортами) и векторы $\overline{OA} = X_{\boldsymbol{i}}, \overline{OB} = Y_{\boldsymbol{j}}, \overline{OC} = Z_{\boldsymbol{k}}$, где *A,B,C* – вершины прямоугольного параллелепипеда, для которого *OM* является диагональю. По определению суммы $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$, поэтому $\boldsymbol{r} = X_{\boldsymbol{i}} + Y_j + Z_k$.

Эти формулы выражают расположение вектора $\boldsymbol{r}$ по базисным векторам. Векторы стоящие в правой части формулы называются составляющими или компонентами вектора ***r.***

На основании теоремы о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда получаем формулу выражающую **длину вектора** или через его координаты:

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Равные векторы имеют равные координаты, поэтому координаты вектора не зависят от точки его приложения. Координатами любого вектора называют его проекции на координатные оси.

Если даны векторы (т.е. известны их координаты) и указаны определенные соотношения между ними, то они равносильны аналогичным числовым соотношениям между координатами [2].

Координаты произведения на число. Пусть дан вектор $\mathbf{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$ и число $\alpha \neq 0$. Координаты X_2, Y_2, Z_2 вектора **b**=α**a**:

$X_2 = \alpha X_1, Y_2 = \alpha Y_1, Z_2 = \alpha Z_1$

Данные равенства выражают необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов **a** и **b**. Векторы коллинеарные тогда и только тогда, когда пропорциональны их одноименные координаты.

Координаты суммы (разности) двух векторов. Пусть даны два вектора $\mathbf{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$ и **b**=(X_2, Y_2, Z_2), тогда $X, Y, Z -$ координаты вектора суммы

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}:$$

$$X = X_1 + X_2, Y = Y_1 + Y_2, Z = Z_1 + Z_2;$$

$$X' = X_1 - X_{2,} Y' = X_1 - X_2, Z' = Z_1 - Z_2,$$

- $X', Y', Z' -$ координаты разности данных векторов.

Координаты вектора, заданного двумя точками. Начало вектора $\boldsymbol{M_1 M_2}$ находится в точке $M_1(x_{1,} y_1, z_1)$, конец –

в точке $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Выражение для его координат через координаты точек

M_1 и M_2: $X = x_2 - x_1, Y = y_2 - y_1, Z = z_2 - z_1$.

Деление отрезка в данном отношении. Даны две точки в пространстве $M_1(x_{1,} y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Координаты точки *M*, делящий отрезок $\boldsymbol{M_1 M_2}$ в отношении *l*:

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}, y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}, z = \frac{z_1 + lz_2}{1 + l}.$$

В частности, координаты середины отрезка определяется формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Преобразование декартовых прямоугольных координат при параллельном переносе. Если рассмотрим две декартовы прямоугольные системы координат с одним и тем же масштабным отрезком и одинаковыми

направлениями одноименных координатных осе. Начало новой системы координат находится в точке $O_1(a, b, c)$Пусть M – произвольная точка пространства,

x, y, z – ее координаты в старой системе, X, Y, Z – в новой, тогда

$x = X + a, y = Y + b, z = Z + c$, или

$X = x – a, Y = y – b, Z = z – c$.

Скалярное произведение двух векторов.

Скалярным произведением двух векторов **a** и **b** называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Есть обозначить скалярное произведение через **ab** = $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$. Скалярным квадратом вектора **a** называется скалярное произведение вектора **a** на себя $\mathbf{a^2} = \mathbf{aa} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos 0 = |\mathbf{a}|^2$, т.е. скалярный квадрат его длины равен квадрату его длины.

Векторы **a** и **b** перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\mathbf{ab} = 0$.

Скалярное произведение обладает свойствами:

1) переместительности (коммутативности): **ab = ba** ,

2) сочетательности (ассоциативности) относительно числового элемента: $(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{ab})$**,**

3) распределительности (дистрибутивности) относительно суммы векторов:

a (b + c) = ab + ac,

Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$ и

$\mathbf{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$ выражается формулой **ab** = $X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$, т.е. скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных квадратов.

Косинус угла между векторами определяется формулой $\cos\varphi = \frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$.

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов выражается равенством:

$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0$, она следует из выше указанных формул [10].

1.3 Поверхности и линии в пространстве

1.3.1 Уравнение поверхности и уравнение линии пространстве

Уравнение поверхности в фиксированной системе координат называется такое уравнение с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки данной поверхности и только они.

Из этого определения вытекает способ решения следующей простой задачи: выяснить, лежит ли данная точка на поверхности, определяемой заданным уравнением. Для решения этой задачи необходимо подставить ее координаты в данное уравнение, если получается числовое равенство, то точка лежит на поверхности, в противном случае точка поверхности не принадлежит.

Всякое уравнение с тремя переменными x, y, z можно записать так:

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ – функция переменных x, y, z.

Из определения прямоугольного декартовых систем координат точки в пространстве следует, что координатные плоскости Oxy, Oxz, Oxy – определяются соответственно уравнениями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей, поэтому она определяется двумя линиями. И координаты любой точки линии одновременно будет удовлетворять обоим уравнения.

Поверхность, определяемая алгебраическим уравнением n-й степени относительно декартовых координат, называется поверхностью n-го

порядка. Например, сфера – поверхность второго порядка, так как ее уравнение является уравнением второй степени.

1.3.2 Различные виды уравнения плоскости

Плоскость в пространстве можно задать различными способами в зависимости этого рассматривают различные виды ее уравнения.

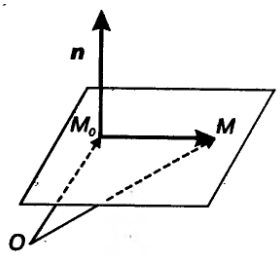


Рис. 3

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору.

Ненулевой вектор **n**, перпендикулярный плоскости, называют ее нормальным вектором. Если дана точка $M_0(x_{0,}y_0, z_0)$ и нормальный вектор **n** = (A, B, C) плоскости, то ее уравнение имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Равенство выражает необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов **n** и M_0M.

Общее уравнение плоскости. Уравнение первой степени относительно декартовых координат $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D одновременно в нуль не обращается, определяет плоскость в пространстве (рис. 3).

Отметим частные случаи. Если $D = 0$, то уравнение имеет вид

$Ax + By + Cz = 0$ и определяет плоскость, проходящую через начало координат.

Если $C = 0$, то уравнение принимает вид $Ax + By + D = 0$ и определяет плоскость, параллельную оси Oz, ибо $C = 0$.

Если $C = 0$ и $D = 0$,

то уравнение принимает вид $Ax + By = 0$, и определяет плоскость, проходящую через ось Oz.

Если $C = 0$, $B = 0$, то уравнение принимает вид $Ax + D = 0$ или $x = a$ и определяет плоскость параллельную оси Oyz. Если $C = 0$, $B = 0$, $D = 0$, то

уравнение принимает вид $Ax = 0$. или $x = 0$ и определяет координатную плоскость Oyz.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Если даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, то уравнение плоскости, проходящей через эти точки, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

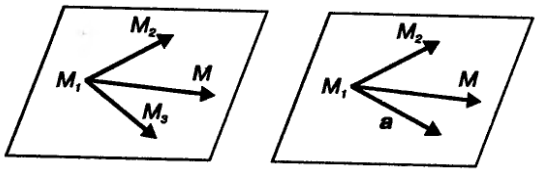


Рис. 4

Это равенство выражает компланарность трех векторов, следовательно, вместо трех точек мы можем использовать два вектора и одну точки или две точки и один вектор.

1.3.3 Различные виды уравнений прямой в пространстве

Прямую в пространстве можно задать различными способами.

Векторно-параметрическое уравнение прямой. Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, параллельный ей. Если даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_2)$ прямой, то $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{a}t$, где $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ – радиус-вектор точки $M\ (x,\ y,\ z)$, $\mathbf{r_0} = \mathbf{OM}$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, t – переменная величина (параметр)(рис. 5).

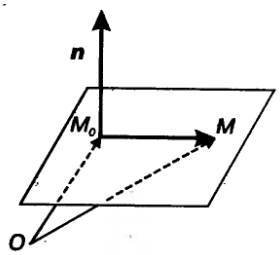


Рис. 5

Параметрическое уравнение прямой:

$x = x_0 + a_1 t, y = y_0 + a_2 t, z = z_0 + a_3 t,$ проходящее через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющий направляющий вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_2)$.

Каноническое уравнение прямой:

$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$, где $M_0(x_0, y_0, z_0)-$ данная точка и $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_2)$ - направляющий вектор.

Уравнение прямой, проходящей через две точки. Если даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$, поэтому уравнение примет вид $\frac{x-x_0}{x_2-x_1}=\frac{y-y_0}{y_2-y_1}=\frac{z-z_0}{z_2-z_1}$ [11].

1.4 Сферические координаты

Сферические координаты широко используются для определения положения тел в пространстве, например: в навигации при определении места нахождения самолета, корабля и т.д., в астрономии при определении положения звезд и других небесных тел и т.д.

Для определения сферических координат рассматривают декартовую систему координат в пространстве и точку A. Ортогональную проекцию данной точки на плоскость Oxy обозначим A', а длину вектор $\overrightarrow{OA'}$ - через r. Угол наклона вектора $\overrightarrow{OA}$ к плоскости Oxy обозначим ψ, причем будем считать его изменяющимся от -90° до . Если точка A расположена в верхнем полупространстве, то угол ψ считается положительным, а если в нижнем, то отрицательным. Угол между $\overrightarrow{OA'}$ и осью Ox обозначим φ (рис. 6). Тройка (x, ψ, φ) называется сферическими координатами точки A в пространстве.

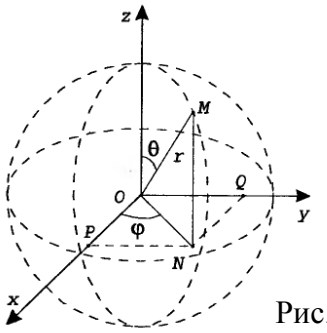


Рис. 6

Декартовые координаты точки в пространстве выражаются через ее сферические координаты по формулам

$\begin{cases} x = r\cos\psi\ \cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$, и наоборот, если заданы декартовы координаты, то по ним можно найти сферические координаты по формулам

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$\sin\psi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ [6].

Глава 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КООРДИНАТ

2.1 Основные положения изучения метода координат

Способы решения задач с помощью метода координат единообразные. В элементарной геометрии учащимся приходится искать особый путь решения для каждой задачи, а в задачи решаются по определенному алгоритму, который легко приспосабливается к любой задаче. Главной ценностью метода координат составляет то, что, перенося этот метод из алгебры в геометрию, мы находим большую общность способ решения задач. Также, если использовать этот метод, то нам не придется прибегать к наглядному представлению сложных пространственных изображений.

Изучение метода координат преследует следующие цели:

- дать учащимся новый метод решения задач и доказательства ряда теорем;

-показать тесную связь между геометрией и алгеброй с помощью метода координат;

- способствовать развитию вычислительной и графической культуры учащихся.

В школе изучение координатного метода и обучение его применению для решения различных математических задач происходит в несколько этапов. На первом этапе вводится основной понятийный аппарат, который хорошо отрабатывается в 5-6 классах и систематизируется в курсе геометрии. В 5 классе учащиеся знакомятся с координатным лучом, который в последствии, при изучении отрицательных чисел, дополняется до координатной прямой. И уже после введения рациональных чисел в 6 классе учащиеся изучают координатную плоскость. На втором этапе ученики знакомятся с уравнениями прямой и окружности. Данные понятия изучаются ими как в алгебре, так и в геометрии с разной содержательной целью, поэтому учащиеся часто не видят связи между ними, а, значит, и плохо усваивают

суть метода. Так, в курсе алгебры VII класса графики основных функций вводятся путем построения ряда точек, координаты которых вычисляются по аналитическому заданию функции. В курсе геометрии уравнение прямой и окружности вводится на основе геометрических характеристических свойств, как множество точек, обладающих определенным свойством (равноудаленности от 2 точек – для прямой, от одной точки – для окружности). Обучение применению самого метода координат для решения задач происходит в курсе геометрии 9 класса. Для этого сначала раскрываются основные этапы применения метода, а затем на примере ряда задач показывается непосредственное применение метода координат. В 10 классе уже метод координат начинает изучаться в пространстве. Добавляется большое количество формул и правил, появляются новые виды задач [3,4].

Но метод координат не является основным методом. Шарыгин И.Ф. отметил о вреде данного метода. Что касается слабых учеников, то «большей частью в этой группе находятся дети, которые плохо считают, с трудом понимают и запоминают формулы. Для этих детей Геометрия могла бы стать предметом, за счет которого они могли бы компенсировать недостатки общематематического развития. А вместо этого она ложится на них дополнительным грузом… Координатный метод оставляет в стороне геометрическую суть изучаемой геометрической ситуации. Воспитывается исполнитель, решающий заданную конкретную задачу. Не меньше, но и не больше. Не развивается геометрическая, и даже математическая интуиция, столь необходимая математику-исследователю»[8].

2.2 Анализ учебников

В учебниках геометрии одно из важнейших мест занимает метод координат, но в школьной программе по этому методу уделяется мало времени. Если проанализировать учебник геометрии 7-11 классов А.В.

Погорелова, то можно увидеть, что в §18 посвящается декартовым координатам и векторам в пространстве. Этот параграф включает в себя расстояние между точками, координаты середины отрезка, преобразование симметрии в пространстве, движение в пространстве, параллельный перенос, подобие пространственных фигур, угол между скрещивающимися прямыми, прямой и плоскостью, между плоскостями, площадь ортогональной проекции многоугольника, векторы и действия над ними в пространстве [4]. У Атанасяна Л.С изучение теоретических основ метода координат в пространстве начинается с введения векторов, включая в себя понятие и равенство векторов, сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число, и коплонарные векторы и разложение вектора по трем некомплонарным векторам. Следующая 5 глава посвящается методу координат и движениям. В этой главе метод координат рассматривается как метод решения задач. В учебнике Атанасяна приводятся все формулы для вычисления углов и расстояний, чего мало в учебнике Погорелова. Можно сделать вывод, что в учебнике Атанасяна одним из доминирующих методов решения задач является метод координат [3].

Если просмотреть учебник геометрии Смирновой И.М и Смирнова В.А., то можно точно сказать, что последний школьный учебный семестр посвящается методу координат. Этот учебник предназначен для 10-11 классов естественно-научного профиля обучения. По данному методу этот учебник включает в себя как прямоугольные, так и сферические координаты. Также, имеют место параметрически заданные кривые на плоскости и в пространстве, аналитическое задание пространственных фигур. В этом учебнике наблюдается переход от элементарной математики к аналитической геометрии [6].

В учебнике Шарыгина И.Ф. метод координат не является одним из доминирующих методов для решения координат. Он включает в себя формулу расстояния между двумя точками, уравнения сферы, плоскости, прямой, векторов и их скалярное произведение. В этом учебнике не найдешь

формул для нахождения угол между прямыми, плоскостями и т. д. Если по учебнику Атанасяна метод координат изучается в начале 11 класса, то по Шарыгину – в конце 11 класса. Учащимся предоставляется мало времени для усвоение метода координат [7]. Говоря об учебнике Александрова А.Д., можно сказать, что в этом учебнике упущено нахождение угла между прямыми, плоскостями и прямой и плоскостью [5].

Если проанализировать задачи, приведенные в учебниках, то мы найдем задачи на нахождение координат точек, разложение векторов по координатным векторам, нахождение координат векторов, нахождения скалярного произведения и угла между прямыми и плоскостями и т.д.

Далее мы будем разбирать все виды задач.

2.3 Суть координатного метода

Сущность метода координат как метода решения задач состоит в том, что, задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах различные геометрические соотношения, мы можем решать геометрическую задачу средствами алгебры. Пользуясь координатами, можно истолковывать алгебраические и аналитические соотношения и факты геометрически и таким образом применять геометрию к решению алгебраических задач.

Метод координат – это универсальный метод. Он обеспечивает тесную связь между алгеброй и геометрией, которые, соединяясь, дают «богатые плоды», какие они не могли бы дать, оставаясь разделенными.

В отношении школьного курса геометрии можно сказать, что в некоторых случаях метод координат дает возможность строить доказательства и решать многие задачи более рационально, красиво, чем чисто геометрическими способами. Метод координат связан, правда, с одной геометрической сложностью. Одна и та же задача получает различное аналитическое представление в зависимости от того или иного выбора системы координат.

И только достаточный опыт позволяет выбирать систему координат наиболее целесообразно [1].

2.4 Этапы решения задач методом координат

Для решения геометрических задач с помощью метода координат нужно знание простых формул, алгоритма и правил. Преимущество этого метода состоит в том, что он упрощает и сокращает решение задач. Он не требует сложных посторенний в проекциях, так как сначала вводится декартовая система координат, затем производятся исчисления. Метод координат является сильным методом и с помощью него можно решить задачи разных уровней сложности. Но и у этого метода есть недостаток – большой объем вычислений.

Алгоритм применения метода координат состоит:

1. Выбор системы координат в пространстве
2. Нахождение координат необходимых точек и векторов, или уравнения кривых и фигур
3. Решение примера, используя ключевые задачи или формулы данного метода
4. Переход от аналитических соотношений к метрическим.

Но этот алгоритм является общим, и для некоторых видов задач приходиться использовать дополнительные шаги для решения задач [8].

2.5 Задачи, обучающие координатному методу

Для разработки методики формирования умения применять координатный метод важно выявить требования, которые предъявляет логическая структура решения задач мышлению решающего. Координатный метод

предусматривает наличие у обучающихся умений и навыков, способствующих применению данного метода на практике. Проанализируем решение нескольких задач. В процессе этого анализа выделим умения, являющиеся компонентами умения использовать координатный метод при решении задач. Знание компонентов этого умения позволит осуществить его поэлементное формирование.

Решим две задачи для выявления умений и навыков, которые пригодятся для использования координатного метода.

Пример. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.7) найдите угол между плоскостями AD_1E и D_1FC, где точки E и F-середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно [9].

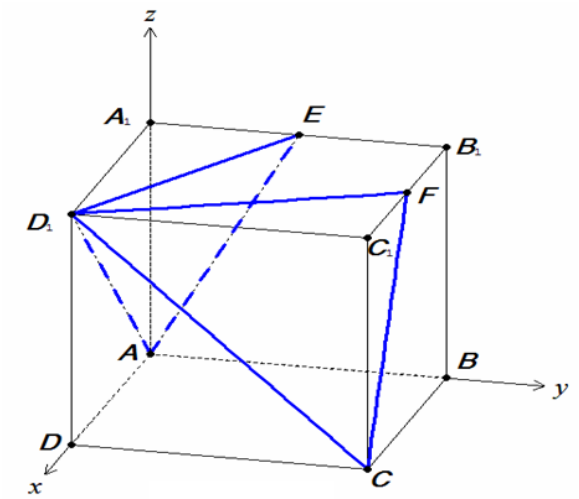


Рис. 7

Решение:

1. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке $A(0;0;0)$ (умение выбирать удобную нам систему координат).

2. Находим координаты точек, которые необходимы для составления уравнения плоскостей: $D_1(1;0;1)$, $E(0;0,5;1)$, $C(1;1;0)$, $F(0,5;1;1)$(умение находить координаты необходимых точек и строить их по заданным координатам).

3. Составим уравнение плоскости (AD_1E), используя уравнение $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$.(умение составлять уравнения плоскости, прямой и пространственных кривых и фигур) Подставим координаты всех трех точек в это уравнение и решим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D = 0; \\ A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 1 + D = 0; \\ A\cdot 0 + B\cdot 0{,}5 + C\cdot 1 + D = 0 \end{cases}$$

Получим, что $A = -C$, $B = -2C$, $D = 0$.

Таким образом, уравнение имеет вид: $x + 2y - z = 0$, следовательно, $A_1 = 1$, $B_1 = 2$, $C_1 = -1$.

Составим уравнение плоскости (CFD_1), используя уравнение $A_2x+B_2y+C_2z+D_1=0$. Подставим координаты всех трех точек в это уравнение и решим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} A\cdot 1 + B\cdot 1 + C\cdot 0 + D = 0; \\ A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 1 + D = 0; \\ A\cdot 0{,}5 + B\cdot 1 + C\cdot 1 + D = 0 \end{cases}$$

Получим, что $B = C$, $A = 2C$, $D = -3C$. Таким образом, уравнение примет вид:

$2x + y + z - 3 = 0$. Значит, $A_2 = 2$, $B_2 = 1$, $C_2 = 1$.

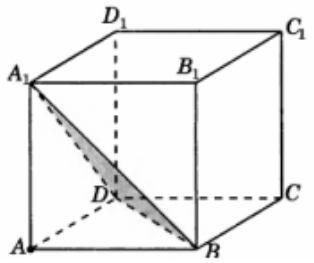
4. По формуле (знания формул и умение их применять):

$$\cos\angle(\alpha,\beta) = \frac{|1\cdot 2+2\cdot 1-1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Пример. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 8) найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1 [10].

Решение:

1. Введем систему координат с началом координат $A(0,0,0)$ и единичными векторами $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$. Следовательно, координаты точек $A_1(0,0,1),\ B(1,0,0), D(0,1,0)$. (*умение оптимально выбирать систему координат*)



(Рис 8)

2. Составим уравнение плоскости A_1BD:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1-0 & 0-0 & 0-1 \\ 0-0 & 1-0 & 0-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости будет иметь вид $x + y + (z - 1) = 0$, т.е. $x + y + z - 1 = 0$ и координаты вектора нормали будут $\vec{n}(1,1,1)$(умение составлять уравнение пространственных фигур и находить координаты векторов).

3. Теперь найдем расстояние от точки A до нашей плоскости по формуле для нахождения расстояния от точки до плоскости (знание формул и умение их использовать) :

$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cy_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|1\cdot0+1\cdot0+1\cdot0+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Разбирая данные задачи можно определить какие умения нужны для того, чтобы научиться использовать метод координат. Итак,

1. переводить геометрический язык на аналитический;

2. строить точку по заданным координатам;
3. находить координаты заданных точек;
4. вычислять расстояние между точками, заданными координатами;
5. вычислять расстояние между прямой и плоскостью, прямыми и плоскостями;
6. вычислять угол между прямой и плоскостью, прямыми и плоскостями;
7. оптимально выбирать систему координат;
8. составлять уравнения заданных фигур (плоскости и прямые) и вычислять определитель;
9. видеть за уравнением конкретный геометрический образ;
10. выполнять преобразование алгебраических соотношений.

Следовательно, все задачи, которые развивают вышеуказанные умения, являются задачами, обучающими координатному методу.

2.6 Примеры определения фигур уравнениями

Чтобы использовать метод координат, нужно уметь определять фигуры уравнениями, в частности, прямые и плоскости.

Плоскость в пространстве можно задать различными способами в зависимости этого рассматривают различные виды ее уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору.

Ненулевой вектор n, перпендикулярный плоскости, называют ее нормальным вектором. Если дана точка $M_0(x_{0,}y_0, z_0)$ и нормальный вектор n = (A, B, C) плоскости, то ее уравнение имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Если даны три точки $M_1(x_{1,}y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_{3,}y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, то уравнение плоскости, проходящей через эти точки, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Пример, Напишите уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M(3,-1,2,), N(4,1,-1), K(2,0,1)$.

Решение: Так как нам даны три точки, то мы можем использовать вышеуказанную формулу:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & 1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 1-2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (x-3) - 2(y+1) + 3(z-2) = 0,$$

$x - 2y + 3z - 11 = 0$.

Теперь рассмотрим способы задания уравнения прямой. Прямую в пространстве можно задать различными способами.

Векторно-параметрическое уравнение прямой. Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, параллельный ей. Если даны точка $M_0(x_{0,}y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\mathrm{a} = (a_1, a_2, a_2)$ прямой, то $\mathrm{r} = \mathrm{r}_0 + \mathrm{a}t$, где r = OM – радиус-вектор точки *M (x, y, z)* , $\mathrm{r}_0 = \mathrm{OM}$ – радиус-вектор точки $M_0(x_{0,}y_0, z_0)$, *t* – переменная величина (параметр).

Параметрическое уравнение прямой:

$x = x_0 + a_1 t,\ y = y_0 + a_2 t,\ z = z_0 + a_3 t,$ проходящее через точку $M_0(x_{0,}y_0, z_0)$ и имеющий направляющий вектор $\mathrm{a} = (a_1, a_2, a_2)$.

Каноническое уравнение прямой:

$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$, где $M_0(x_{0,}y_0, z_0) -$ данная точка и $\mathrm{a} = (a_1, a_2, a_2)$ - направляющий вектор.

Уравнение прямой, проходящей через две точки. Если даны две точки $M_1(x_{1,}y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$, *поэтому уравнение примет вид* $\frac{x-x_0}{x_2-x_1} = \frac{y-y_0}{y_2-y_1} = \frac{z-z_0}{z_2-z_1}$. Мы видим, что легко можно задать уравнение прямой.

Пример, Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(-2,1,-3), A_2(5,4,6)$.

Решение: Если в качестве данной точки будет точка A_1, то направляющим вектором будет вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$. Следовательно,

$$\begin{cases} x = (5+2)\,\mathrm{t} - 2 \\ y = (4-1)t + 1 \\ z = (6+3)t - 3 \end{cases}.$$

Теперь рассмотрим примеры аналитическое задание пространственных фигур.

Уравнение сферы с центром в точке $A(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R задается уравнением $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$. Шар, поверхностью которого служит эта сфера задается неравенством $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \le R^2$.

Круговой цилиндр с радиусом R и высотой h можно задать неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le R^2 \\ 0 \le z \le h \end{cases},$$

а параболоид вращения можно задать уравнением $z = a(x^2 + y^2)$ [2,11].

2.7 Виды задач решаемых методом координат

Есть шесть основных ключевых задач:

1) Нахождение расстояния **d** между двумя точками $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ по формуле: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2 + (z_2 + z_1)^2}$;

2) Нахождение координат середины **C(*x, y, z*)** отрезка AB, где A(x_1, y_1, z_1) и B(x_2, y_2, z_2): C$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$;

3) Нахождение угла между двумя векторами $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$:

$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$;

4) Нахождение угла между прямой *l* и плоскостью α:

$\sin\phi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}\,|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}\,|}$, где $\vec{n}$ - вектор нормали к данной плоскости и $\vec{p}$ – направляющий вектор прямой

5) Нахождение угла между плоскостями, имеющих вид

$Ax+By+Cz+D = 0$: $\cos\measuredangle(\alpha, \beta) = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$ или

$\cos\measuredangle(\alpha, \beta) = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

6) Нахождение расстояния от произвольной точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до данной плоскости $Ax+By+Cz+D = 0$:

$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cy_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$[1,8].

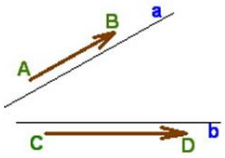


Рис. 9

Рассмотрим конкретные задачи:

1. Нахождение угла между прямыми a и b

Углом между прямыми в пространстве называется угол между любыми параллельными им пересекающимися прямыми. И этот угол равен углу между направляющими векторами данных прямых (рис. 9).

1. Выбираем любые вектора $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$, имеющие направления прямых a и b.

2. Определяем координаты этих векторов по соответствующим координатам их начал и концов

3. Подставляем найденные координаты в формулу: $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$. Чтобы найти сам угол, нужно найти арккосинус числа, который получится после вычислений.

Для вычисления угла между прямыми в многогранники придерживаемся того же принципа. И чаще всего выбирают параллельные прямые данным прямым.

Задача. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ M и N – середины ребер A_1D_1 и BB_1 (рис. 10). Найдите угол между прямой MN и диагональю BD_1 [12].

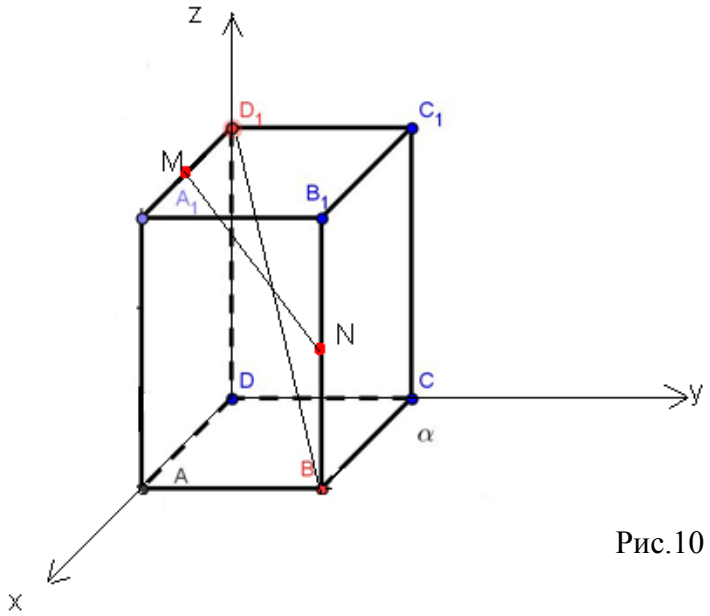


Рис.10

Решение:

1. Введем систему координат с началом координат в точке D и векторами $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$

2. Находим координаты точек B, D_1, MN:

$B(1;1;0), D_1(0;0;1), M(0,5;0;1), N(1;1;0,5)$

И координаты векторов $\overrightarrow{BD_1}(-1;1-1;1), \overrightarrow{MN}(0,5;1;-0,5)$.

3. Искомый угол находится по вышеуказанной формуле:

$$\cos a = \frac{\left| -1 * 0{,}5 - 1 * 1 + 1 * (-0{,}5) \right|}{\sqrt{1 + 1 + 1} * \sqrt{0{,}25 + 1 + 0{,}25}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. Уравнение плоскости в пространстве

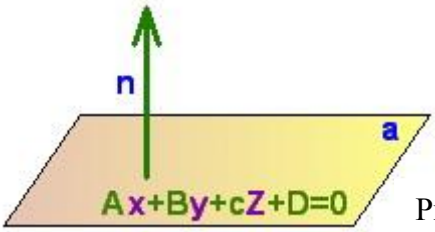


Рис. 11

Точки, удовлетворяющие равенству $Ax + By + Cz + D = 0$ образуют плоскость с нормалью $\vec{n}(A, B, C)$ (рис. 11). Коэффициент D показывает величину отклонения (параллельного сдвига) между двумя плоскостями с одной и той же заданной нормалью $\vec{n}(A, B, C)$. Для того, чтобы написать уравнение плоскости нужно сначала найти ее нормаль, используя матрицу и определители, а затем подставить координаты найденной нормали в уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ [18].

3. Угол между прямой и плоскостью

Пусть заданы прямая и плоскость координатами направляющего вектора $\overrightarrow{AB}(x_1, y_1, z_1)$ и нормали $\vec{n}(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 12). Угол Ψ между прямой и плоскостью вычисляется по следующей формуле[19]:

$$\sin\psi = \left|\cos(\vec{n}, \overrightarrow{AB})\right| = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Рис. 12

Задача. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна $8\sqrt{3}$ и SC =17 (рис. 13) . Найдите tg угла , образованного плоскостью основания и прямой AO , где O – точка пересечения медиан грани ABC [13].

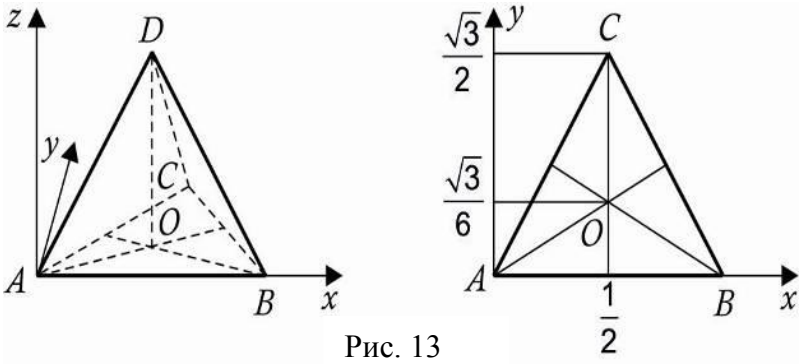


Рис. 13

Решение:

1. Введем систему координат с центром в точке A.
2. Найдем координаты точек B,A,C,O: $B(8\sqrt{3};0;0)$ $A(0;0;0)$,$C(4\sqrt{3};12;0)$, $O(4\sqrt{3};4;15)$ и координаты вектора $\vec{n} = \overrightarrow{AO}(4\sqrt{3};4;15)$
3. Составим уравнение плоскости основания:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 8\sqrt{3}-0 & 0-0 & 0-0 \\ 4\sqrt{3}-0 & 12-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \ , \ 96\sqrt{3}z = 0$$

4. Искомый угол находится по вышеуказанной формуле:

$$\sin a = \frac{\left| 0 * 4\sqrt{3} - 0 * 4 + 96\sqrt{3} * 15 \right|}{\sqrt{48 + 16 + 225} * \sqrt{0 + 0 + 96\sqrt{3} * 96\sqrt{3}}} = \frac{96\sqrt{3} * 15}{96\sqrt{3} * 17} = \frac{15}{17}$$

$\cos a = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg} a = \frac{15}{8}$;

Ответ: $\frac{15}{8}$.

4.Угол между плоскостями

Пусть $\vec{n}_1(x_1, y_1, z_1), \vec{n}_2(x_2, y_2, z_2)$ — две любые нормали к данным плоскостям.

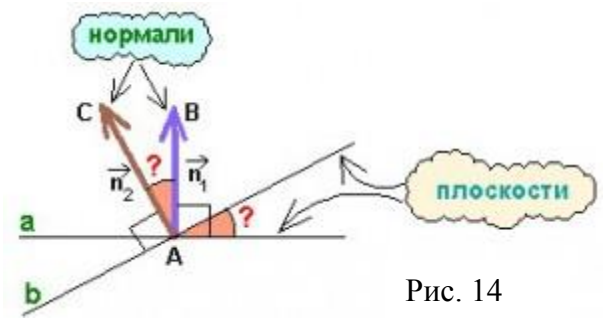


Рис. 14

Если в задаче необходимо найти угол между плоскостями, то координаты векторов нормали составляются по матрицам, в которых берутся координаты соответствующих точек. После того как составлены уравнения плоскостей, значение угла находится по формуле $\cos a$ [20].

Тогда косинус угла между плоскостями равен модулю косинуса угла между нормалями:

$$cosa = \cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} * \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Задача. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15) найдите угол между плоскостью A_1BD и плоскостью, проходящей через середины его ребер AB, BB_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1D, DA.

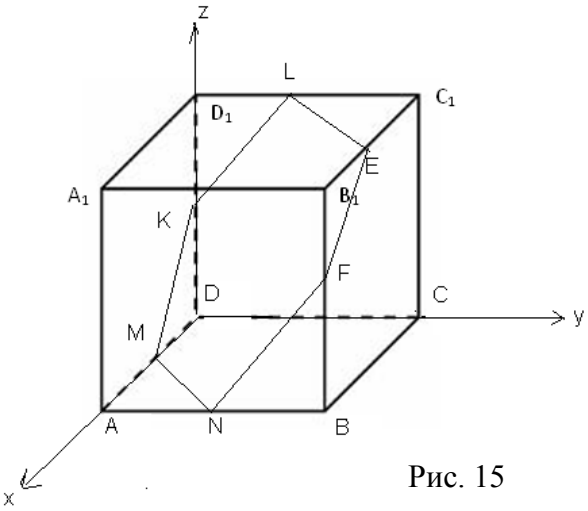


Рис. 15

Решение:

1. Введем систему координат с началом координат в точке *D*.

2. Находим координаты точек необходимых для составления уравнения плоскостей: $B(1;1;0)$, $A_1(1;0;1)$, $D(0;0;0)$,$K(0;0;0,5)$, $M(0,5;0;0)$,$N(1;0,5;0)$

3. Составляем уравнение плоскости A_1BD

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x + y + z = 0$$

Составляем уравнение плоскости KMN

$$\begin{vmatrix} x & y & z-0,5 \\ 1 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0 & -0,5 \end{vmatrix} = -0,25x + 0,25y + -0,25z = 0$$

Тогда $\vec{n}_1(-1;1;1), \vec{n}_2(-0,25;0,25;-0,25)$.

4. Следовательно,

$$\cos a = \frac{0,25 + 0,25 - 0,25}{\sqrt{3 \cdot \frac{3}{16}}} = \frac{0,25}{0,75} = \frac{1}{3}$$

$$\sin a = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{tga} = 2\sqrt{2}$$

Ответ: $arctg\ 2\sqrt{2}$.

5. Расстояние от точки до плоскости

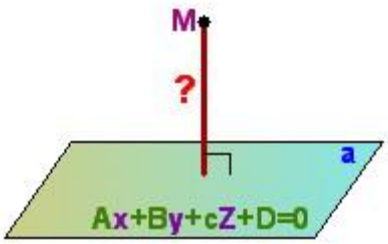


Рис 16

Для вычисления расстояния $\rho(M;a)$ от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α

(рис. 16), заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ можно использовать следующую формулу:

$$\rho(M,a)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

В знаменателе стоит длина нормали, а в числителе — значение выражения из левой части уравнения плоскости в точке *M*.

Задача. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCEF* (рис. 17), все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки *E* до плоскости *SDA* [14].

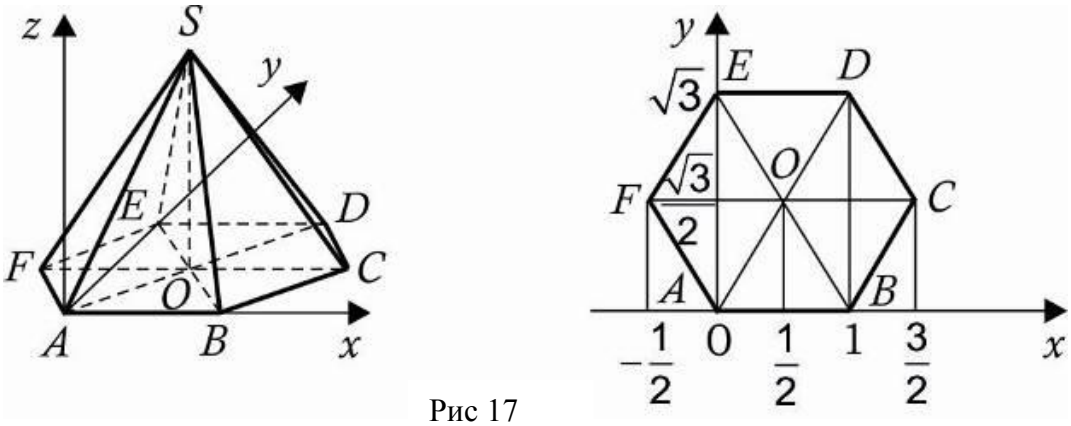


Рис 17

Решение:

1. Введем пространственную систему координат с началом координат в точке *A*.

2. Находим координаты точек *S,D,E,A*: $A(0;0;0)$, $S\ (\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3})$, $E(0;\sqrt{3};0)$, $D(1;\sqrt{3};0)$.

3. Составим уравнение плоскости *SDA*:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ \frac{1}{2}-0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-0 & \sqrt{3}-0 \\ 1-0 & \sqrt{3}-0 & 0-0 \end{vmatrix}=-3x+\sqrt{3}y$$

После упрощения уравнение принимает вид: $-3x+\sqrt{3}y=0$

4. Подставляем в вышеуказанную формулу:

$$\rho = \frac{\left|-3\cdot 0+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\right|}{\sqrt{(-3)^2+\sqrt{3}^2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\rho = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Расстояние от точки до прямой

Для вычисления расстояния от точки $K(x_1, y_1, z_1)$ до прямой a необходимо на ней найти координаты вектора $\vec{n}(A, B, C)$, которые составлены из координат двух точек прямой. Одна из этих точек, например $N(x_2, y_2, z_2)$, используется в формуле, по которой находится искомое расстояние:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ A & B \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ A & C \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ B & C \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ [17].

Задача. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF\,A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 18), все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1F_1

[15].

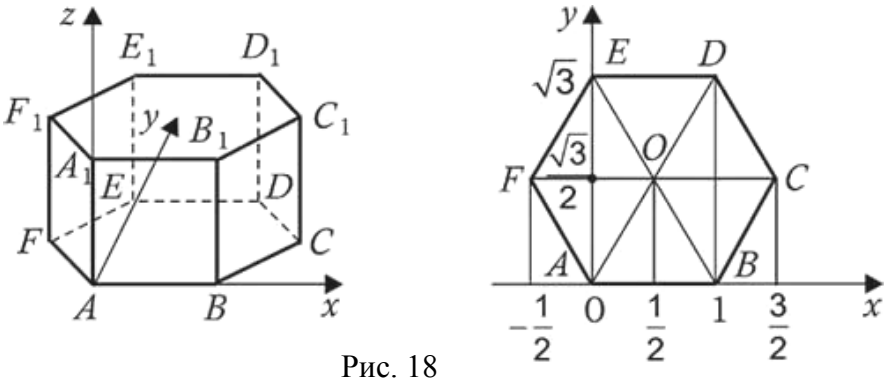


Рис. 18

Решение:

1. Введем пространственную систему координат.
2. Находим координаты точек A_1, F_1, B : A_1 (0;0;1), F_1 $(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1)$, $B(1;0;0)$.

3. Подставляя координаты в формулу можно вычислить расстояние от точки B до прямой A_1F_1.

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

7. Расстояние между прямыми

Для вычисления расстояния между двумя прямыми a и b необходимо иметь координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}$, которые лежат на этих прямых. Пусть точка A $(x_1;y_1;z_1)$ принадлежит прямой a, точка B $(x_2;y_2;z_2)$ принадлежит прямой b. Вектор $\vec{a}$ $(l_1; m_1; n_1)$, вектор $\vec{b}$ $(l_2; m_2; n_2)$.И тогда расстояние между прямыми находятся по формуле: $d = \frac{mod \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}$[17].

Задача. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (рис. 19), все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BD и AS [12].

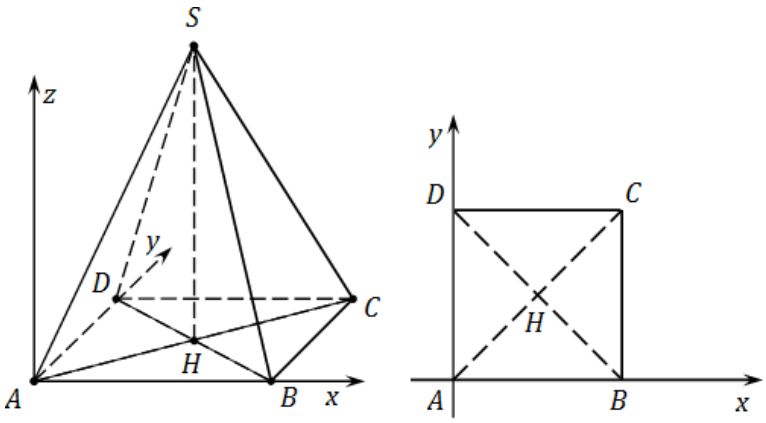


Рис. 19

Решение:

1. Введем пространственную систему координат. Находим координаты точек A, D, B, H, S: A (0;0;0), B(1;0; 0) , H $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2};0)$ S $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}})$, D (0;1;0).

$\overrightarrow{BD}(1;\ 1;\ 0)$, $\overrightarrow{AS}\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Подставляя координаты в формулу можно вычислить искомое расстояние.

$$d = \frac{mod \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 \end{vmatrix}^2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

ГЛАВА 3. СИСТЕМА УРОКОВ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Представленный нами курс содержит 10 основных тем:

1. Декартовы координаты в пространстве. Нахождение координат точек и длин векторов в пространстве – 1ч.

Проводится этот урок сначала в форме лекции – повторение основных ключевых моментов: декартовы координаты в пространстве и понятия, связанные с ними (координаты вектора, длина вектора, расстояние между точками, середина отрезка, параллельный перенос). На этом уроке учитель знакомит учеников с планом, задачами и целями работы. Даются задачи, решение которых будет рассмотрено на последнем занятии, а также список литературы и электронных адресов информации по теме.

2 .Составление матрицы и нахождение определителей - 2ч.

Данный теоретический материал является частью высшей алгебры. На занятиях рассматриваются основные формулы и решаются задания по нахождению определителей.

3. Уравнение плоскости и векторы нормали – 2ч.

Эта тема является основой для решения задач по стереометрии координатным методом. Задачи, решаемые здесь, ставят вопросы, которые будут рассмотрены в следующих темах.

4. Нахождение угла между прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями – 6ч.

На этих занятиях ребята не только используют изученные формулы для нахождения углов в многогранниках, но и готовятся к ЕГЭ, выполняя задания С2. Необходимо использовать презентации, т. к. они помогут в выборе координатного пространства и правильного нахождения координат точек.

5. Нахождение расстояния между точкой и плоскостью, между прямыми, плоскостями в пространстве - 3ч.

Немаловажное значение на этих уроках отводится нахождению расстояний от середины ребер, от вершин, от центра окружности, что значительно облегчит в дальнейшем решение более сложных задач. Благодаря работе с интерактивной доской и компьютером, ученики наглядно увидят расположение элементов фигур в пространстве.

6. Подведение итогов - 2ч.

Заключительные уроки содержат достаточное количество геометрических задач, часть из которых имеет сложность уровня С2.

После изучения полного курса учащиеся должны иметь следующие результаты обучения:

а) уметь составлять уравнение плоскости;

б) уметь применять формулы для нахождения углов между прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями;

в) уметь находить расстояния между прямыми, между прямой и плоскостью в многогранниках;

г) уметь решать задачи с использованием изученных формул;

д) уметь находить дополнительный материал по изучаемой теме во всех допустимых средствах информации; уметь предоставлять результаты своих находок по окончании курса.

Данный курс расчитан для выпускников. Но он также и полезен ребятам, которые будут в дальнейшем работать по специальности, связанной с математикой.

Далее мы представили один из уроков, разработанный нами. Он может использоваться при подведении итогов, то есть для систематизации и проверки знаний. Предназначен для 11 классов.

Конспект урока

Тема урока: Решение стереометрических задач методом координат.

Тип урок: Обобщение и систематизация знаний.

Цели урока:

1. Обобщить виды и способы нахождения расстояний и углов в пространстве с помощью координатного метода. Используя учебные конспекты и справочные таблицы в учебнике составить и решить задачи на каждый из случаев .
2. Через решение задач на нахождение расстояний и углов в пространстве двумя способами (геометрический и метод координат) сделать вывод о преимуществе метода координат для решения ряда задач этого блока.
3. Расширить представление о применении метода координат в решении стереометрических задач на построение сечения.

Форма организации работы:

1. Работа по группам (4 человека)

План урока

1. Постановка целей урока. Организация хода урока.(2 мин.)
2. Разбор решения домашних задач на нахождение расстояний между точками, точкой и плоскостью в прямоугольном параллелепипеде геометрическим методом. (Работа в группах)(3 мин.)
3. Мотивирование решения домашних задач методом координат. Решение этих задач в группах координатным методом с последующим обсуждением в классе и формирование выводов о преимуществах того или иного метода.(7 мин.)
4. Обобщение видов задач на определение расстояний и углов в пространстве и способов (алгоритмов) их нахождения методом координат через постановку вопросов к домашним задачам. Систематизация теоретических знаний через использование учебных конспектов и справочных таблиц в учебнике(10 мин.).

5. Составление новых задач с известной формулировкой на нахождение расстояний и углов в пространстве по данным домашних задач. Решение этих задач (в группе план решения каждой задачи, и завершаем решение дома)(5 мин.).

6. Использование метода координат в конкретной ситуации: решение задачи по материалам ЕГЭ параллельно методами координат и геометрическим. (Работа по вариантам внутри группы, 11 мин.)

7. Расширение представлений о возможностях метода координат через задачу о построении сечения прямоугольного параллелепипеда(5 мин.).

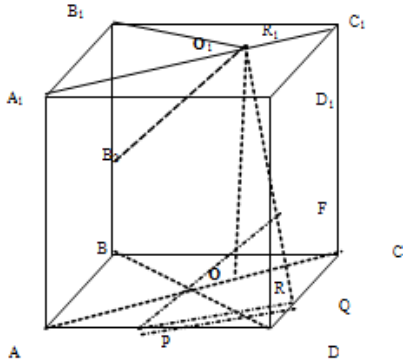
8. Подведение итого урока(1 мин).

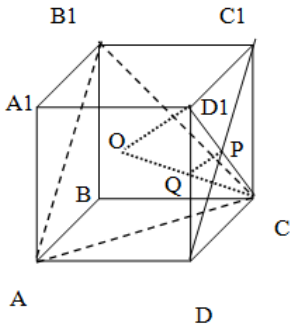
9. Формулирование домашнего задания(1 мин.).

I Этап урока.	**Возможные варианты ответов и действий учеников**
Преступая к решению любой задачи, анализируя её условие мы определяем метод решения. К настоящему моменту решение стереометрической задачи мы способны осуществить тремя методами .	
Назовите эти методы.	*Геометрический (названо условно)* *Векторный* *Координатный* *Можно выделить координатно-векторный*.

Каждый метод имеет свой язык , свои алгоритмы. Сегодня на уроке к решению одной задачи мы применим и геометрический метод и метод координат. Попробуем сравнить их с позиции удобства и простоты решения. На основе этой же задачи подробно поговорим о методе координат в задачах на нахождение расстояний и углов в пространстве. Какие вопросы по вашему мнению должны быть рассмотрены в ходе урока?	
(Учитель записывает эти вопросы на доске.)	*Какие виды расстояний можно находить координатным методом?* *Какие виды углов находят этим методом?* *Как находить, по каким формулам и алгоритмам?* *Какой справочный материал можно создать или использовать?*
Работа будет организована следующим	Класс разделим на группы по 4 человека. В группе есть капитан, отвечающей за работу

образом:	членов группы и подводящий итог работы каждого. Группа может получить затребованную помощь учителя или представителя другой группы. В ходе работы используем учебные конспекты и справочные таблицы учебника.
II Этап урока. Дома надо было решить две задачи геометрическим методом, т.е. последовательно вычислительным способом ответить на вопрос о нахождении расстояния между двумя точками и точкой и плоскостью. Идет обсуждение решения. Если задача не решена ,то можно попросить помощь учителя (листы с готовыми решениями или комментарии по конкретным вопросам) В итоге этой работы на доске появляются записи:	Организуем проверку решения домашних задач следующим образом: В группе 1 человек рассказывает решение одной задачи, 2-ой – другой задачи. *Расстояние между точками* B_2 *и* R_1; P *и* F *:* $B_2R_1=\frac{a\sqrt{14}}{4}$ $P\,F=\frac{5a\sqrt{2}}{8}$

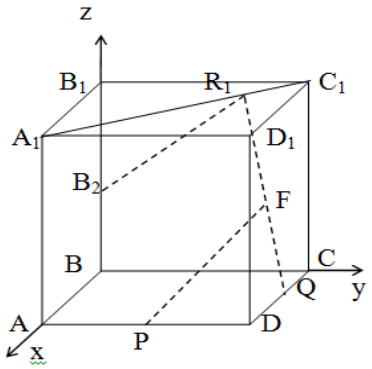
Переформулируем вопросы задачи на язык координат и запишем ответы.	*Расстояние от точки до плоскости* $\rho(P,(AB_1C)) = PQ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
<u>Решение домашних задач геометрическим методом.</u> **Задача №1**  	**Задача.** **На ребрах BB_1 ,AD , CD куба взяты соответственно точки B_2, P, Q - середины ребер;** **на диагонали A_1C_1 взята точка R_1 :** **A_1R_1:A_1C_1=3:4.** **Считая ребра куба а, найти расстояние между следующими парами точек** **а) B_2 и R_1** **б) P и F, где F середина R_1Q**
Решение (поэтапно-вычислительный способ) **1**. B_2R_1 найдем из прямоугольного треугольника $B_1B_2R_1$ $B_2R_1 = \sqrt{B_1B_2^{\,2} + B_1R_1^{\,2}}$, где $B_1B_2 = \frac{a}{2}$ B_1R_1 найдем из	**2**. а) F- середина отрезка R_1Q. Проведем дополнительные построения 1. построим диагональное сечение куба ACC_1A_1; 2. в плоскости (ACC_1) проведем RR_1 параллельно CC_1; *3.* RQ $RR_1 \perp$ (ABC) т.к. $RR_1 \parallel CC_1$ и $A_1R_1 \parallel AR$, то AR=A_1R_1 . RQ проекции R_1Q на (ABC). б) т .к. $AO=\frac{1}{2}AC$ $AR=A_1R_1=\frac{3}{4}A_1C_1 = \frac{3}{4}AC$, то

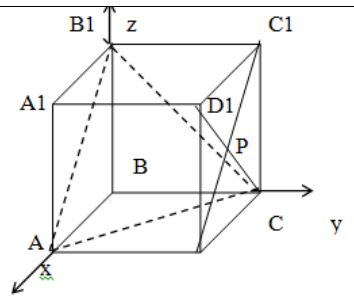
прямоугольника треугольника $B_1O_1R_1$, в котором $O_1B_1=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $O_1R_1=\frac{1}{4}A_1C_1=\frac{a\sqrt{2}}{4}$; тогда $B_1R_1^2 = O_1B_1^2+ O_1R_1^2 = \frac{5a^2}{8}$ Получили $B_2R_1 = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{5a^2}{8}}=\frac{a\sqrt{14}}{4}$.	$OR=\frac{1}{4}AC$ т.е R –середина стороны OC треугольника COD и Q – середина стороны DC , значит RQ – средняя линия т-ка COD, тогда $RQ \parallel OD$ и $RQ \perp$ AC. в) $PQ \parallel AC$ и по теореме о трех перпендикулярах $PQ \perp FQ$,.значит треугольник PQF прямоугольный ($\angle PQF=90^0$). Тогда искомое расстояние $PF=\sqrt{PQ^2+FQ^2}$. $PQ=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ $FQ=\frac{1}{2}R_1Q=\frac{1}{2}\sqrt{RR_1^2+RQ^2}=\frac{3a\sqrt{2}}{8}$ В результате получаем: $PF=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{3a\sqrt{2}}{8}\right)^2}=\frac{5a\sqrt{2}}{8}$
Задача №2  	**Найти расстояние от центра грани CDD_1C_1 до плоскости (A,B_1,C). Ребро куба а.** 1) Пусть $D_1B \cap (AB_1C)$=O O- центроид треугольника AB_1C и по свойству куба $\frac{D_1O}{OB}=\frac{2}{1}$ $D_1O=\frac{2}{3}BD_1=\frac{2}{3}a\sqrt{3}$ 2) $D_1O \perp (AB_1C)$, в плоскости (OD_1C) проведен $PQ \parallel D_1O$, где $a \in OC$. $PQ \perp (AB_1C)$ и $PQ=\rho(P,(AB_1C))$ $PQ=\frac{1}{2}D_1O(\text{средняя линия } \Delta\, OD_1C)=\frac{a\sqrt{3}}{3}$
III Этап урока	

Сделайте выводы по ходу выполнения домашней работы. Были ли трудности ? В чем они заключались? И так, можно сделать вывод: Задачи вызвали затруднения в ходе решения и потребовали достаточное количество времени.	Возможные ответы: Для решения задачи надо уметь правильно выстроить логическую цепочку рассуждений, основанную на многих теоретических фактах. Не сделать вычислительных ошибок. Длинное решение – можно запутаться. И т д.
Обратимся к теме урока и той цели ,которую мы для себя определили. Ответьте на вопрос: «Каково будет следующее задание группам?» Какова схема решения задач этим методом?	*Решить домашние задачи методом координат* *1. Выбрать систему координат.* *2. Найти координаты нужных точек, векторов и (или) составить уравнения нужных фигур.* 3. *Сформулировать задачу с помощью координат, решить ее.* 4. *Сделать вывод без использования координат (метрически).*

(Учащиеся озвучивают схему и находят соответствующие записи в учебном конспекте.)	
На доске уже записаны главные вопросы задач на языке метода координат. Каким способом решаем эти задачи?	*Найти расстояние между точками B_2 и R_1; P и F.* *Найти расстояние от точки до плоскости.* Ученики называют формулы и находят соответствующие записи в учебном конспекте, учитель записывает их на доске или использует презентации. **1. Расстояние между двумя точками $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$ вычисляется по формуле** $\lvert AB \rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)}$ **2. Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости** $Ax + By + Cz + D = 0$ **находится по формуле:** $d = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Задание группам: Решить домашние задачи методом координат.	Возможны варианты организации работы: 1. Все решают одну задачу, затем совместно проверяют. 2. Два человека в группе решают одну задачу, два человека –другую задачу. 3. Если возникают трудности , то уч-ся берут помощь учителя.
Подводим итог работы с задачами.	Учащиеся называют полученные ответы. Сравнивают их с предыдущими результатами, выписанными на доске. Делают выводы о правильности решения.
В задаче требовалось составить уравнение плоскости. Каким способом можно составить общее уравнение плоскости? Кто пользовался ,каким из перечисленных способов? Какой из них предпочтительней в данном случае и почему ? Подведем итог . Вы решали одну и туже задачу двумя методами : геометрическим и координатным, и в состоянии сравнить эти	• *По трем точкам* • *По точке и вектору нормали к плоскости* • *Уравнение плоскости в отрезках* Учащиеся анализируют свою работу по решению задач.

способы с позиции предпочтения того или иного метода для решения данной задачи. Как вам проще, удобнее?	
Решение домашних задач методом координат	Учитель использует презентации для проверки решения задачи№1 и №2.
Задача №1  	**Решим задачу методом координат.** 1. Введем систему координат. За единицу измерения примем ребро куба. 2. В этой системе координат найдем координаты нужных точек. A(a,0,0) , C(0,a,0) , B_1(0,0,a) , A(a,0,0) , B(0,0,0) , D(a,a,0) , A_1(a,0,a) , C_1(0,a,a) По формулам координат середины отрезка или деления отрезка в данном отношении находим $O_1(\frac{a}{2},\frac{a}{2},a)$, $R_1(\frac{a}{4},\frac{3a}{4},a)$, $Q(\frac{a}{2},a,0)$, $F(\frac{3a}{8},\frac{7a}{8},\frac{a}{2})$, $P(a,\frac{a}{2},0)$ 3. Найдем нужные расстояния (длины отрезков) по формуле. $R_1B_2=$ $\sqrt{(0-\frac{a}{4})^2+(0-\frac{3a}{4})^2+(\frac{a}{2}-a)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{16}+\frac{9a^2}{16}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{14}}{4}$ $PF=$ $\sqrt{(\frac{3a}{8}-a)^2+(\frac{7a}{8}-\frac{a}{2})^2+(\frac{a}{2}-0)^2}=\sqrt{(\frac{5a}{8})^2+(\frac{3a}{8})^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{5a\sqrt{2}}{8}$
Задача №2	**Найти расстояние от центра грани CDD_1C_1 до плоскости (A,B_1,C). Ребро куба а.**

	1.Введем систему координат. Единица измерения а. 2. Найдем координаты нужных точек. A(a,0,0) B_1(0,0,a) C(0,a,0) P(a/2,a,a/2) Составим уравнение плоскости. Удобно пользоваться уравнением плоскости в отрезках. $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1 \quad x+y+z-a=0$ 3. Найдем расстояние от точки до плоскости по формуле $\rho(P,(AB_1C))=\frac{\left\lvert 1\cdot a/2+1\cdot a+1\cdot a/2-a\right\rvert}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$
IV, V Этапы урока.	
Итак, решая задачи на нахождение расстояний в пространстве , мы выделили две задачи с формулировкой: «Найти расстояние между…» Какие еще можно поставить вопросы к данной задаче с этой формулировкой? (учитель ответы учеников фиксирует на доске)	1. *Найти расстояние между двумя точками* 2. *Найти расстояние между точкой и плоскостью.* 3. *Найти расстояние между точкой и прямой.* 4. *Найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.* 5. *Найти расстояние между параллельными плоскостями.*
Каковы алгоритмы	Учащиеся называют нужные алгоритмы,

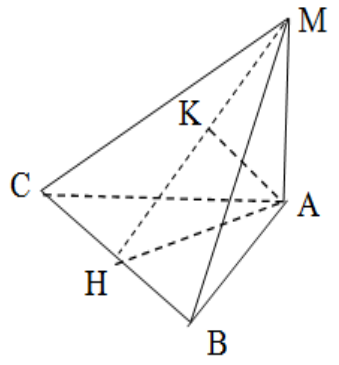
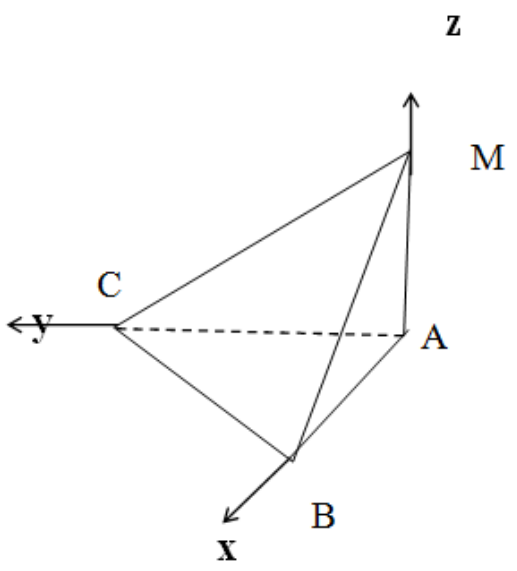
нахождения данных расстояний?	находят соответствующие записи в учебных конспектах или в справочной таблице. <u>Учитель использует презентации</u>.
Расстояние между точкой и прямой.	• *в пространстве задать* $\overrightarrow{MK} \perp a$, *где K – основание перпендикуляра* • *найти координаты K, используя условие* $\overrightarrow{MK} \cdot \vec{a} = 0$ • *найти расстояние от точки до прямой как расстояние между точками* $\left\|\overrightarrow{MK}\right\| = \rho(M,\alpha) = \sqrt{(x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2 + (z_M - z_K)^2}$
Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми	• *Найти координаты некоторой точки* $A \in a$ • *Определить плоскость* $\alpha \parallel a$ *,такую что* $b \subset a$ *(построить , написать уравнение)* *Найти расстояние* $\rho(A,\alpha) = \frac{\left\| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right\|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
Расстояние между параллельными плоскостями.	• *Написать уравнения плоскостей* α: $Ax+By+Cz+D_1=0$ β : $Ax+By+Cz+D_2=0$ • *Найти расстояние по формуле* $\rho(\alpha,\beta) = \frac{\left\|D_2 - D_1\right\|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $\vec{n}(A,B,C) = \vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta$

А теперь составьте конкретные задачи с данными формулировками вопросов к условию задачи №1. (учитель фиксирует на доске)	*1. Найти расстояние между диагональю куба и диагональю грани.* *2. Найти расстояние между прямой $ДС_1$ и плоскостью (AB_1C).*
Теперь поговорим о нахождении углов в пространстве. О каких углах идет речь? (<u>учитель использует презентации</u>) Каковы схемы решения данных задач? *Угол между двумя прямыми* *Угол между прямой и плоскостью*	*1. Угол между двумя прямыми.* *2. Угол между прямой и плоскостью.* *3. Угол между плоскостями* Учащиеся называют нужные алгоритмы, находят соответствующие записи в учебных конспектах или в справочной таблице. <u>Учитель использует презентации</u> $\cos(a,b)=\frac{\lvert a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\rvert}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$, *где* $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ - *напрвляющие векторы прямых* • *Найти координаты направляющего вектора прямой* $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ • *Написать уравнение плоскости и определить координаты вектора нормали* $\vec{n}(A,B,C)$ • *Воспользоваться формулой.*

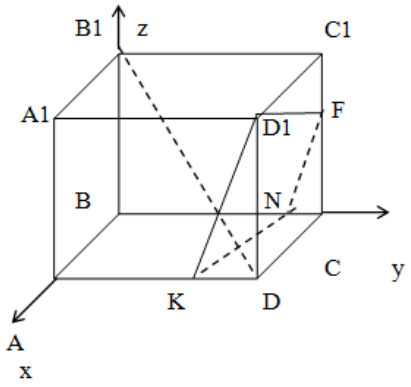
Угол между плоскостями	$\sin\varphi = \frac{\lvert a_1A + a_2B + a_3C \rvert}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ • *Написать уравнение плоскостей β и α* • *Определить координаты направляющих векторов* $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ • *Воспользоваться формулой* $\cos\varphi = \frac{\lvert A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 \rvert}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$
Составьте конкретные задачи с данными формулировками вопросов к условию задачи №1. (учитель фиксирует на доске) Часто задачи на доказательство перпендикулярности или параллельности прямых либо плоскостей сводятся к нахождению между ними углов. Приведите пример подобной задачи.	*Найти угол между* *прямыми* B_2R_1 *и PF;* *прямой PF и плоскостью* $B_2B_1R_1$*;* *плоскостями* $(B_2B_1R_1)$ *и (PQF).*
<u>Задание группам</u>: Обсудить план решения каждой из составленных	

задач. Сами задачи решить дома. Кто видит способ решения этих задач другим, не координатным методом? Можно ли метод координат применительно к этим задачам считать предпочтительным?	
VI Этап урока.	
Итак, метод координат занимает не последние место в решении задач на нахождение углов и расстояний в пространстве. И мы уже можем выбирать метод решения этих задач. Рассмотрим конкретную ситуацию. Задача из материалов ЕГЭ-2008. <u>Задание группам</u>: Решить задачу двумя методами- координатным и геометрическим. Сделать вывод о предпочтительности каждого из методов к решению задачи.	Возможные варианты организации работы. 1. Два человека решают задачу одним методом , два других- другим. 2. Вся группа сначала решает задачу одним методом, затем –другим. 3. Учащиеся могут взять помощь учителя.

Подведем итог работы. Были ли трудности по решению задачи координатным методом? Были ли трудности по решению задачи геометрическим методом? В чем они заключались? Какова польза от решения задачи двумя способами? <u>Вывод</u>. Каждый должен для себя сделать вывод о предпочтительности выбора способа решения задачи и ответить на вопрос : «Почему именно этот способ?».	**Задача №3.** **Боковое ребро *MA* пирамиды *MABC* перпендикулярно плоскости основания и равно 13,** $\angle BAC = 90°$**, *AB*=39, *AC*=52. Найдите расстояние от вершины *A* до плоскости *BCM*.**
Решение задачи геометрическим методом.	**Решение задачи методом координат.**

	
Если через точку *A* провести плоскость, перпендикулярную плоскости *BCM*, то перпендикуляр, проведенный через точку *A* к линии пересечения этих плоскостей, будет перпендикуляром и к плоскости *BCM*. Пусть $AH \perp BC$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $MH \perp BC$. Следовательно, $BC \perp AMH$ и $MBC \perp AMH$. Проведем в плоскости *AMH* перпендикуляр *AK* к	1. Введем систему координат и найдем координаты нужных точек. *A*(0,0,0) *B*(39,0,0) *C*(,52,0) *M*(0,0,13) 2. Напишем уравнение плоскости (*BMC*) по трем точкам. $Ax+By+Cz+D=0$ $39A+D=0,$ $13C+D=0,$ $52B=D=0.$ $4x+3y+12z-156=0$ 3. Найдем расстояние от точки до плоскости по соответствующей формуле : $d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ $\rho(A,(BMC))=\frac{\lvert 4\cdot 0+3\cdot 0+12\cdot 0-156\rvert}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}}=12$ Ответ: 12.

прямой *MH*. Тогда *AK*⊥ *BCM*. Длина отрезка *AK* равна расстоянию от точки *A* до плоскости *BCM*. В треугольнике *ABC*: *BC*= $\sqrt{39^2+52^2}=65$. Следовательно, $2S_{ABC}$=39*52=65**AH*, тогда *AH*=156/5. В треугольнике *AMH* *MH*= $\sqrt{13^2+\left(\frac{156}{5}\right)^2}=\frac{169}{5}$. Значит, $2S_{AMH}$=13*156/5=169/5**AK* , тогда *AK*= $\frac{13\cdot 156}{169}=12$. ОТВЕТ: 12.	
VII Этап урока	
На протяжении многих уроков мы решаем задачи на нахождение различных числовых характеристик фигур в стереометрии методом координат Рассмотрим еще одно из приложений координатного метода к решению задач, в данном случае, на построение сечения прямоугольного	**Задача №4** **В прямоугольном параллелепипеде** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB:AD:AA_1$**=1:3:2** **Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку** D_1 **и перпендикулярно прямой** B_1D**.**

параллелепипеда.	
Решим задачу методом координат.	
1. Введем систему координат и найдем координаты нужных точек. $A(1,0,0)$ $B(0,0,0)$ $C(0,3,0)$ $D(1,3,0)$ $A_1(1,0,2)$ $B_1(0,0,2)$ $C_1(0,3,2)$ $D_1(1,3,0)$ 2. Для построения сечения найдем координаты еще двух точек M и K, для чего:	
а) Напишем уравнение искомой плоскости сечения α по вектору нормали и точке $\vec{n} = \overrightarrow{B_1D}$ $D_1(1,3,0)$	$\overrightarrow{B_1D}(1,3,-2)$ $\alpha\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ $1(x-1)+3(y-3)-2(z-2)=0$ $x+3y-2z=0$
б) Найдем точки пересечения плоскости α с осями координат и некоторыми ребрами куба Отметим точки N и K на чертеже.	1. $\alpha \cap Oy = N,\quad N(0, y_N, 0)$ $x+3y-2z = 0,$ $3y_N-6 = 0,$ $y_N = 2,$ $N(0,2,0)$ 2. $\alpha \cap AD = K,\quad K(1, y_k, 0)$ $x+3y-2z=0,$ $1+3y_k-6=0,$

3. ПО точкам D_1KN строим искомое сечение KD_1FN.	y_k=5/3, K(1,5/3,0)
VIII этап урока	
Подведем итоги урока. Одной из целей урока было показать на конкретных примерах предпочтительность координатного метода для решения задач с прямоугольным параллелепипедом на нахождение расстояний и углов в пространстве. Для достижения этой и других целей урока мы проделали большой объем работы. Что полезного сегодня было на уроке?	*Вспомнили схему решения задач методом координат и применили её к решению 4-х задач.* *Во всех предложенных задачах сделали вывод о преимуществах метода координат .* *Обобщили и виды и способы нахождения расстояний и углов в пространстве .* *Определили , что данный теоретический материал систематизирован в учебнике в приложении «Формулы стереометрии» и в учебных конспектах.* *Проговорили все алгоритмы, и большинство из них применили на уроке при решении задач.* *Работая с задачами методом, координат*

	познакомились с его приложением для построения сечений многогранников.
Все выше сказанное позволяет сделать вывод об обобщении применения метода координат для нахождения расстояний и углов при решении конкретных задач .	
IX Этап урока	
Задание на дом: 1) Решить сформулированные задачи методом координат . Предложить решение этих задач другим способом . 2) Решить задачу. На ребрах AB_1, BC и BB_1 куба взяты соответственно точки P,Q,R так что $BP : BA = 3:4$ $BQ : BC = 1:2$ $BR : BB_1 = 3:4$. Через эти точки проведена плоскость (PQR) . Построить прямую проходящую через вершину D_1 , где $D_1 \in a$ и $a \perp (PQR)$	

Консультации с капитанами групп и выставление оценок за урок.	

Слайд№1

Цели урока

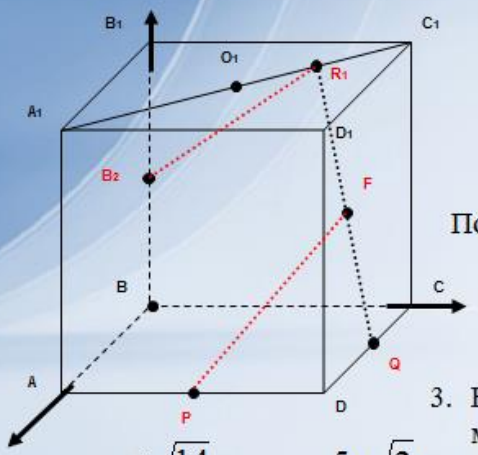
1. ***Обобщить виды и способы нахождения расстояний и углов в пространстве с помощью метода координат, используя учебные конспекты и справочные таблицы учебника.***
2. ***Через решение на нахождение расстояний и углов в пространстве двумя способами (геометрическим и методом координат) сделать вывод о преимуществе второго для ряда задач этого блока.***
3. ***Расширить представление о применении метода координат в решении стереометрических задач на построение сечений.***

Слайд№2

Задача №1

На ребрах BB, AD, CD куба взяты соответственно точки B_2, P, Q – середины ребер. На диагонали A_1C_1 взята точка R_1, такая что $A_1R_1 : A_1C_1 = 3:4$.
Считая ребро куба a, найти расстояние

а) B_2R_1 б) PF, где F середина R_1Q.



1. Введем систему координат.
За единицу измерения примем ребро куба a.
2. Найдем координаты нужных точек:
A(a; 0; 0), C(0; a; 0), B_1(0; 0; a), C_1(0; a; a),
B(0; 0; 0), D(a; a; 0), A_1(a; 0; a)

По формулам координат середины отрезка или деления отрезка в данном отношении находим O_1(a/2; a/2; a), P(a; a/2; 0),
R_1(a/4; 3a/4; a), B_2(0; 0; a/2),
F(3a/8; 7a/8; a/2), Q(a/2; a; 0).

3. Находим длину отрезка как расстояние между двумя точками по соответствующей формуле.

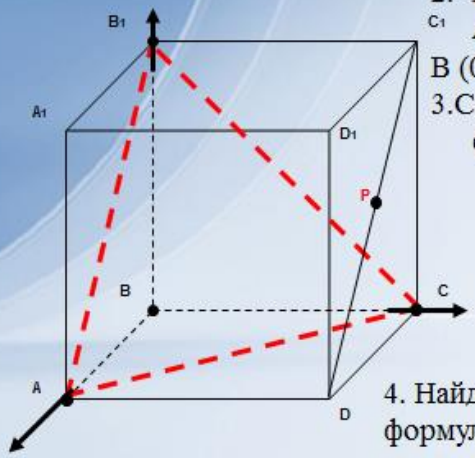
$$R_1B_2 = \frac{a\sqrt{14}}{4} \quad PF = \frac{5a\sqrt{2}}{8}$$

Слайд№3

Задача №2

Найти расстояние от центра грани CDD_1C_2 до плоскости (AB_1C).

1. Введем систему координат.
За единицу измерения примем ребро куба 1.



2. Найдем координаты нужных точек
A(1; 0; 0),
B (0; 0; 0), C(0; 1; 0), P (0,5; 1; 0,5).
3.Составим уравнение плоскости AB_1C по формуле (уравнение плоскости в отрезках).

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1,$$

$$x+y+z-1=0.$$

4. Найдем расстояние от точки до плоскости по формуле

$$\rho(P;(AB_1C))=\frac{|1\cdot 0{,}5+1\cdot 1+1\cdot 0{,}5-1|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Слайд№4

Расстояния в пространстве

Расстояние между двумя точками А и В	$AB=\sqrt{(X_B-X_A)^2+(Y_B-Y_A)^2+(Z_B-Z_A)^2}$
Расстояние от точки А до плоскости α	$\rho(A;\alpha)=\frac{\lvert AX_0+AY_0+AZ_0\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, *где* $\vec{n}(A,B,C)$, $A(x_0;y_0;z_0)$
Расстояние от точки М до прямой а	1. *Задать* $\vec{MK}\perp a$, *где K – основание перпендику ляра* 2. *Найти координаты K, используя условие :* $\vec{MK}\cdot\vec{a}=0$. 3. $\lvert\vec{MK}\rvert=\rho(M;a)=\sqrt{(X_M-X_K)^2+(Y_M-Y_K)^2+(Z_M-Z_K)^2}$
Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми а и в	1. *Найти координаты некоторой точки* $A\in a$. 2. *Определить плоскость* $\alpha \parallel a$, $в\subset\alpha$. 3. $\rho(A;\alpha)=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.
Расстояние между параллельными плоскостями α и β	$\alpha:\ Ax+By+Cz+D_1=0$ $\beta:\ Ax+By+Cz+D_2=0$ $\rho(\alpha;\beta)=\frac{\lvert D_2-D_1\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, *где* $\vec{n_\alpha}=\vec{n_\beta}=\vec{n}$, $\vec{n}(A;B;C)$

Слайд№5

Углы в пространстве

Угол между прямыми a и в	$\cos\varphi = \dfrac{\lvert a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \rvert}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$, *где* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$
Угол между прямой a и плоскостью α	1. *Найти координаты направляющего вектора прямой* $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ 2. *Написать уравнение плоскости и определить координаты* $\vec{n}(A, B, C)$ 3. $\sin\varphi = \dfrac{\lvert a_1A + a_2B + a_3C \rvert}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
Угол между плоскостями α и β	1. *Написать уравнения плоскостей* α *и* β. 2. *Определить координаты* $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)$; $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ 3. $\cos\varphi = \dfrac{\lvert A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 \rvert}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

Заключение

Метод координат является необходимой составляющей при изучении геометрии в школе. Этот метод позволяет упростить процесс и сократить ход решения задачи, помогает учащимся при сдаче ЕГЭ, а, в дальнейшем, и при изучении математики в высших учебных заведениях.

В данной дипломной работе:

- проанализированы учебники геометрии 10-11 классов;
- рассмотрен основной теоретический материал, необходимый для усвоения данного метода;
- рассмотрены метод координат, виды и этапы решения задач данным методом;
- выделены основные умения, необходимые для овладения методом координат;
- разработана система уроков для изучения данного метода.

Можно сделать вывод, что цель работы достигнута - доказано, что метод координат:

- является одним из основных методов при решении задач;
- имеет больше достоинств, чем недостатков;
- дает учащимся эффективный способ решения задач и доказательств:
- показывает тесную связь алгебры и геометрии;
-способствует развитию вычислительной и графической культуры учащихся.

Литература

1. А.А Гусак Справочник по высшей математике / А.А Гусак, Г.М.Гусак, Е.А. Бричикова. – 9-е изд. – Минск: ТеатрСистема, 2009. - 640с.
2. Л.С.Атанасян Геометрия: Учеб.для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. / Л.С.Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б Кадомцев и др. - 13-е изд. – М.:Просвещение, 2004. – 255с.
3. Погорелов А. В. Геометрия 10-11 кл. / Погорелов А. В. - М:Просвещение 2005. – 324.
4. А.Д.Александров Геометрия / А.Д.Александров, А.Л. Вернер, В.И.Рыжик – М:Просвещение, 1999. – 271с.
5. И.М.Смирнова Геометрия / И.М.Смирнова, В.Ф.Смирнов – М,2008. – 201с.
6. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 10-11 классы. Учебник для общеобразовательных учебных заведений. / Шарыгин И.Ф. - М:Дрофа, 1999. - 208с.
7. Конева Г.П. Использование метода координат в пространстве для решения заданий С-2 Единого гоударственного экзамена по математике [Электронный ресурс] / Конева Г.П., Опубликовано 12.01.2013 - 6:51 / http://nsportal.ru/shkola/geometriya/library/ispolzovanie-metoda-koordinat-v-prostranstve-dlya-resheniya-zadaniy-s-2
8. Использование метода координат в пространстве для решения заданий С-2 Единого государственного экзамена [Электронный ресурс] / http://nsportal.ru/shkola/geometriya/library/ispolzovanie-metoda-koordinat-v-prostranstve-dlya-resheniya-zadaniy-s-2
9. ФИПИ [Электронный ресурс] / http://www.fipi.ru/view/sections/228/docs/660.html
10. Гельфанд И. М. Метод координат / Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А., - МЦНМО, 2009. - 189с.

11. Мельникова Н. Б. Геометрия: векторы и координаты в пространстве / Мельникова Н. Б., Литвиненко В. Н., Безрукова Г. К. - М:Просвещение, 2007. – 120с.

12. Вольфсон Б. Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9: учимся решать задачи / Вольфсон Б. И., Резницкий Л. И. - Легион, 2011 г. – 129с.

13. Малкова А. Г. Подготовка к ЕГЭ по математике [Электронный ресурс] / Малкова А. Г. / Study ru.

14. Шарыгин И.Ф. Математика для поступающих в вузы: учебное пособие / И.Ф.Шарыгин. - М.: Дрофа, 2006. – 479 с.

15. Ященко И.В. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену / И.В.Ященко – М.: Айрис-прес, 2003. – 432 с.

16. Смоляков А. Н. ЕГЭ по математике: задания группы С / Смоляков А. Н., Сидельников В. И. - Москва , 2013. – 205 с.

17. Семенова А.В. ЕГЭ – 2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под редакцией А.В. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2011. – 192 с.

18. Титаренко А.М. Новейший полный справочник школьника 5-11 классы. Математика. / А.М.Титаренко, А.М. Роганин. - «Эксмо», 2008. – 304 с.

19. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Учебник для Вузов. Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника / Беклемишев Д. В. - М.: Физматлит, 2009. - 309 с.

20. Шафаревич И. Р. Линейная алгебра и геометрия. [Электронный ресурс] / Шафаревич И. Р. , М.: Физматлит, 2009. - 509 с./ http://www.biblioclub.ru/book/68387/

Подпись автора_____

Дата_____

Квалификационная работа допущена к защите

Назначен рецензент В.В. Бандеров, к.ф.-м.н.,доцент кафедры Анализа данных и исследования операций Института вычислительной математики и информационных технологий

Заведующий кафедрой _____

Дата _____

Защита в ГАК с оценкой

«_____»

Дата _____

Секретарь ГАК _____