ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 5 (420)

УДК 517.929

Н.Н. ЛИХАЧЕВА

ТЕОРЕМА ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv x^{(n)}(t) + \int_a^b x(s)d_sR(t,s) = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$x^{(i)}(a) = 0, \quad i = \overline{0, n-k-1}; \quad x^{(j)}(b) = 0, \quad j = \overline{0, k-1}; \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \tag{2}$$

где $R : [a,b] \times [a,b] \to R^1$ — измеримая функция, полная вариация $\bigvee_{s=a}^b R(t,s)$ и функция $f(t)$ суммируемы на $[a,b]$.

Как известно [1], частными случаями уравнения (1) являются уравнения с отклоняющимся аргументом, интегро-дифференциальные уравнения и их "гибриды".

Обозначим через W^n банахово пространство таких функций $x : [a,b] \to R^1$, которые имеют абсолютно непрерывную производную $x^{(n-1)}(t)$,

$$\|x\|_{W^n} = \int_a^b |x^{(n)}(s)|ds + \sum_{i=1}^{n-1} |x^{(i)}(a)|.$$

Решением уравнения (1) будем называть функцию $x \in W^n$, удовлетворяющую уравнению почти всюду на $[a,b]$.

Различные вопросы об уравнении (1) и задаче (1), (2) изучались в работах [2], [3], [4]. Рассмотрим вопрос об условиях сохранения знака функции Грина задачи (1), (2).

Как известно [1], если задача (1), (2) однозначно разрешима при любой суммируемой функции $f(t)$, то ее решение имеет представление

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds, \tag{3}$$

где ядро $G(t,s)$ называется функцией Грина этой задачи. Из представления (3) следует, что функция $G(t,s)$ определяется неоднозначно, т. к. при фиксированном $t \in [a,b]$ изменение значений $G(t,\cdot)$ на множестве нулевой меры не меняет значения $\int_a^b G(t,s)f(s)ds$. Поэтому утверждение о знаке функции $G(t,s)$ следует понимать так: класс эквивалентных ядер $G(t,s)$ содержит функцию, удовлетворяющую этому условию.

1. Пусть k — нечетное число. Функцию $R(t,s)$, имеющую при почти всех $t \in [a,b]$ ограниченное изменение, представим в виде разности

$$R(t,s) = R^+(t,s) - R^-(t,s), \tag{4}$$

где $R^+(t,s)$, $R^-(t,s)$ не убывают по s при почти всех $t \in [a,b]$.

В дальнейшем будем предполагать, что $R^+(t,s)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\text{mes}\{t \in [a,b] : R^+(t,a) \neq R^+(t,a+0)\} = 0, \\ &\text{mes}\{t \in [a,b] : R^+(t,b) \neq R^+(t,b-0)\} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Исходное уравнение (1) можно записать следующим образом:

$$x^{(n)}(t)-\int_a^b x(s)d_sR^-(t,s)=-\int_a^b x(s)d_sR^+(t,s)+f(t). \tag{6}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{gathered}(\mathcal{L}^-x)(t)\equiv x^{(n)}(t)-\int_a^b x(s)d_sR^-(t,s)=y(t),\quad t\in[a,b],\\ x^{(i)}(a)=0,\quad i=\overline{0,n-k-1};\quad x^{(j)}(b)=0,\quad j=\overline{0,k-1}.\end{gathered} \tag{7}$$

В случае однозначной разрешимости задачи (7) ее функцию Грина будем обозначать $G^-(t,s)$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия*

1) *краевая задача* (7) *однозначно разрешима и* $G^-(t,s)<0$ *на* $(a,b)\times(a,b)$*;*
2) *спектральный радиус* $\rho(F_1^+)$ *оператора* $F_1^+:C\to C$*, действующего в пространстве непрерывных на* $[a,b]$ *функций и определяемого равенством*

$$(F_1^+x)(t)=-\int_a^b\left\{G^-(t,s)\int_a^b x(\tau)d_\tau R^+(s,\tau)\right\}ds, \tag{8}$$

меньше единицы.

Тогда однозначно разрешима задача (1), (2)*, и ее функция Грина* $G(t,s)<0$ *на* $(a,b)\times(a,b)$*.*

Доказательство. Из представления (6) видно, что задача (1), (2) эквивалентна уравнению

$$x(t)=(F_1^+x)(t)+z(t) \tag{9}$$

в пространстве C непрерывных на $[a,b]$ функций, где оператор F_1^+ определен равенством (8),

$$z(t)=\int_a^b G^-(t,s)f(s)ds.$$

Необходимо отметить, что уравнение (9) мы рассматриваем в пространстве C, а решение задачи (1), (2) — элемент пространства W^n. Тем не менее утверждение об эквивалентности верно, т. к. в силу свойств функции Грина значение оператора F_1^+ на непрерывной функции является элементом из W^n.

Так как $\rho(F_1^+)<1$, то уравнение (9), а следовательно, и задача (1), (2) однозначно разрешимы, т.е. решение задачи (1), (2) имеет вид (3), причем

$$x=z+F_1^+z+(F_1^+)^2z+\cdots,$$

где F_1^+ — изотонный оператор в силу того, что $G^-(t,s)<0$ на $(a,b)\times(a,b)$, и функция $R^+(t,s)$ при почти всех $t\in[a,b]$ не убывает по второму аргументу на $[a,b]$.

Таким образом, для любой суммируемой функции $f(t)$ такой, что $f(t)\geq 0$, $f(t)\not\equiv 0$, $t\in[a,b]$ имеем $x(t)\leq z(t)$. Отсюда

$$\int_a^b(G(t,s)-G^-(t,s))f(s)ds=x(t)-z(t)\leq 0.$$

Следовательно, $G(t,s)\leq G^-(t,s)<0$ в квадрате $(a,b)\times(a,b)$. □

Для применений леммы 1 требуются эффективные условия, гарантирующие изотонность оператора F_1^+ и выполнение неравенства $\rho(F_1^+)<1$. Такие условия можно получить на основе следующих лемм 2 и 3.

Введем обозначение

$$l_ix=\begin{cases}x^{(i-1)}(a), & \text{если } 1\leq i\leq n-k;\\ (-1)^{i-n+k-1}x^{(i-n+k-1)}(b), & \text{если } n-k+1\leq i\leq n.\end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия*

1) *краевая задача* (7) *однозначно разрешима и* $G^-(t,s) < 0$ *на* $(a,b)\times(a,b)$*;*
2) *существует такая функция* $v \in W^n$*, что* $v(t) \geq 0$*,* $t\in[a,b]$*,* $(\mathcal{L}v)(t) = \psi(t) \leq 0$ *почти всюду на* $[a,b]$*,* $l_i v = \alpha_i \geq 0$*,* $i=\overline{1,n}$*, причем решение задачи*

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}^- x)(t) = 0, \quad t\in[a,b],\\ &l_i x = \alpha_i, \quad i=\overline{1,n}, \end{aligned} \tag{10}$$

не принимает отрицательных значений на (a,b) *и* $\sum_{i=1}^n \alpha_i - \int_a^b \psi(s)ds > 0$*.*

Тогда $\rho(F_1^+) < 1$*.*

Доказательство. Функция $v(t)$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}x)(t) = \psi(t), \quad t\in[a,b],\\ &l_i x = \alpha_i, \quad i=\overline{1,n}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $v(t)$ удовлетворяет равенству

$$v(t) = (F_1^+ v)(t) + g(t),$$

где оператор F_1^+ определен равенством (8), $g(t) = \int_a^b G^-(t,s)\psi(s)ds + z(t)$, $z(t)$ — решение краевой задачи

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}^- x)(t) = 0, \quad t\in[a,b],\\ &l_i x = \alpha_i, \quad i=\overline{1,n}. \end{aligned}$$

Отметим, что оператор $F_1^+ : C \to C$ вполне непрерывен как произведение вполне непрерывного оператора Грина, действующего из пространства суммируемых функций в пространство C, на ограниченный оператор $\int_a^b x(s)d_s R^+(t,s)$, который действует из пространства C в пространство суммируемых функций; и оператор F_1^+ изотонен. К оператору F_1^+ применима теорема Г.Г.Исламова [5]. Эту теорему применительно к оператору F_1^+ можно сформулировать как

Предложение 1. *Пусть выполнены условия* (5) *и существует такая функция* $v\in C$*, что* $v(t)\geq 0$ *и* $g(t) = v(t) - (F_1^+ v)(t) > 0$*,* $t\in(a,b)$*. Тогда* $\rho(F_1^+) < 1$*.*

Действительно, если $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, то имеем $g(t) = \int_a^b G^-(t,s)\psi(s)ds > 0$ на (a,b) в силу неравенства $\sum_{i=1}^n \alpha_i - \int_a^b \psi(s)ds > 0$; если $\sum_{i=1}^n \alpha_i > 0$, то $g(t) \geq z(t) > 0$ на (a,b). Следовательно, по теореме Г.Г. Исламова $\rho(F_1^+) < 1$. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть краевая задача* (1), (2) *однозначно разрешима, и* $G(t,s) < 0$ *на* $(a,b)\times(a,b)$*. Тогда существует такая функция* $v\in W^n$*, что* $v(t)\geq 0$*,* $t\in[a,b]$*,* $(\mathcal{L}v)(t) = \psi(t) \leq 0$ *почти всюду на* $[a,b]$*,* $l_i v = \alpha_i \geq 0$*,* $i=\overline{1,n}$*, причем решение задачи* (10) *не принимает отрицательных значений на* (a,b) *и* $\sum_{i=1}^n \alpha_i - \int_a^b \psi(s)ds > 0$*.*

Доказательство. В качестве $v(t)$ возьмем решение краевой задачи

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}x)(t) = \psi(t), \quad t\in[a,b],\\ &l_i x = 0, \quad i=\overline{1,n}, \end{aligned}$$

при условии $\psi(t) \leq 0$ и $\int_a^b \psi(s)ds < 0$. □

Доказанные леммы 1–3 позволяют сформулировать теорему типа теоремы Валле-Пуссена [6] для краевой задачи (1), (2).

Теорема 1. *Пусть краевая задача* (7) *однозначно разрешима, причем* $G^-(t,s) < 0$ *на* $(a,b)\times(a,b)$*. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *существует такая функция* $v \in W^n$, *что* $v(t) \geq 0$, $t \in [a,b]$, $(\mathcal{L}v)(t) = \psi(t) \leq 0$ *почти всюду на* $[a,b]$, $l_i v = \alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, *причем решение задачи* (10) *не принимает отрицательных значений на* (a,b) *и* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \int_a^b \psi(s)ds > 0$*;*
2) *задача* (1), (2) *однозначно разрешима и* $G(t,s) < 0$ *на* $(a,b) \times (a,b)$*;*
3) $\rho(F_1^+) < 1$.

Доказательство. Импликация 1) $\longrightarrow$ 3) следует из леммы 2, импликация 3) $\longrightarrow$ 2) — из леммы 1, 2) $\longrightarrow$ 1) — из леммы 3. $\square$

Приведем достаточные условия однозначной разрешимости задачи (7) и выполнения неравенства $G^-(t,s) < 0$ на $(a,b) \times (a,b)$. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}_0 x)(t) \equiv x^{(n)}(t) = z(t), \quad t \in [a,b], \\ &x^{(i)}(a) = 0, \quad i = \overline{0, n-k-1}; \quad x^{(j)}(b) = 0, \quad j = \overline{0, k-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Эта задача однозначно разрешима, и ее функция Грина $G_0(t,s)$ удовлетворяет неравенству $(-1)^k G_0(t,s) > 0$ на $(a,b) \times (a,b)$. При рассматриваемом нечетном k имеем $G_0(t,s) < 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

1) *спектральный радиус* $\rho(F_1^-)$ *оператора* $F_1^- : C \to C$, *определяемого равенством*

$$(F_1^- x)(t) = \int_a^b \left\{ G_0(t,s) \int_a^b x(\tau) d_\tau R^-(s,\tau) \right\} ds, \tag{12}$$

меньше единицы;

2) *для любого* $s \in (a,b)$ *выполнено неравенство*

$$[F_1^- G_0(\cdot, s)](t) + G_0(t,s) < 0, \quad t \in (a,b).$$

Тогда краевая задача (7) *однозначно разрешима и* $G^-(t,s) < 0$ *на* $(a,b) \times (a,b)$.

Доказательство. Краевая задача (7) эквивалентна уравнению

$$x(t) = (F_1^- x)(t) + g(t) \tag{13}$$

в пространстве C, где оператор $F_1^- : C \to C$ определен равенством (12), $g(t) = \int_a^b G_0(t,s) y(s) ds$. В силу условия $\rho(F_1^-) < 1$ уравнение (13), а следовательно, и задача (7) однозначно разрешимы. Значит, решение задачи (7) имеет представление

$$x(t) = \int_a^b G^-(t,s) y(s) ds.$$

При любом фиксированном $s \in (a,b)$ функция $g^-(t) = G^-(t,s)$ является решением “импульсной” задачи [1]

$$\begin{gathered} x^{(n)}(t) = \int_a^b x(s) d_s R^-(t,s), \quad t \in [a,b], \\ x^{(i)}(a) = 0, \quad i = \overline{0, n-k-1}; \quad x^{(j)}(b) = 0, \quad j = \overline{0, k-1}; \quad x^{(n-1)}(s) - x^{(n-1)}(s-0) = 1; \end{gathered}$$

в пространстве функций $x : [a,b] \to R^1$, имеющих на $[a,s)$ и $[s,b]$ абсолютно непрерывную производную $(n-1)$-го порядка. Эта задача эквивалентна уравнению

$$x(t) = (F_1^- x)(t) + g_0(t) \tag{14}$$

в пространстве C, где $g_0(t)$ — решение "импульсной" задачи

$$x^{(n)}(t) = 0, \quad t \in [a,b]$$
$$x^{(i)}(a) = 0, \quad i = \overline{0, n-k-1}; \quad x^{(j)}(b) = 0, \quad j = \overline{0, k-1};$$
$$x^{(n-1)}(s) - x^{(n-1)}(s-0) = 1.$$

Для доказательства неравенства $G^-(t,s) < 0$ на $(a,b) \times (a,b)$ остается воспользоваться теоремой об уравнении с антитонным оператором из [1], [7]. Сформулируем ее применительно к оператору F_1^-, как

Предложение 2. *Пусть антитонный оператор $F_1^- : C \to C$ вполне непрерывен. Пусть, далее, $g_0(t) \le 0$ ($g_0(t) \ge 0$), $(F_1^- g_0)(t) + g_0(t) \le 0$ ($(F_1^- g_0)(t) + g_0(t) \ge 0$), $t \in (a,b)$. Тогда уравнение* (14) *имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее неравенствам $g_0(t) \le x(t) \le (F_1^- g_0)(t) + g_0(t)$ ($(F_1^- g_0)(t) + g_0(t) \le x(t) \le g_0(t)$).*

Условия предложения 2 для уравнения (14) выполнены: F_1^- вполне непрерывен; антитонен: из $x_1 \ge x_2$ следует $F_1^- x_1 \le F_1^- x_2$; неравенство $(F_1^- g_0)(t) + g_0(t) < 0$ выполнено; $g_0(t) < 0$ при $t \in (a,b)$, т.к. $g_0(t) = G_0(t,s)$ при фиксированном $s \in (a,b)$ и определяется равенствами

$$g_0(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} - \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{n-1}^i \dfrac{(t-a)^{n-1-i}(b-s)^{n-1-i}(b-t)^i (s-a)^i}{(n-1)!\,(b-a)^{n-1}}, & \text{если } a \le s \le t \le b; \\ -\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{n-1}^i \dfrac{(t-a)^{n-1-i}(b-s)^{n-1-i}(b-t)^i (s-a)^i}{(n-1)!\,(b-a)^{n-1}}, & \text{если } a \le t < s \le b, \end{cases}$$

где C_n^k — число сочетаний из n элементов по k элементов.

Следовательно, для любого фиксированного $s \in (a,b)$ решение $g^-(t)$ уравнения (14) удовлетворяет неравенствам $g_0(t) \le g^-(t) < 0$ при $t \in (a,b)$. Таким образом, $G^-(t,s) < 0$ на $(a,b) \times (a,b)$, причем $G^-(t,s) \ge G_0(t,s)$. $\square$

Приведем достаточные условия неотрицательности решения задачи (10).

Теорема 3. *Если при $t \in (a,b)$ выполнено неравенство $(F_1^- y)(t) + y(t) \ge 0$, где $y(t)$ — решение краевой задачи*

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}_0 x)(t) \equiv x^{(n)}(t) = 0, \quad t \in [a,b], \\ &l_i x = \alpha_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{15}$$

то решение задачи (10) *не принимает отрицательных значений на (a,b).*

Доказательство. Краевая задача (10) эквивалентна уравнению

$$x(t) = (F_1^- x)(t) + y(t), \tag{16}$$

в котором $y(t)$ есть решение краевой задачи (15), оператор $F_1^- : C \to C$ определен равенством (12). Для уравнения (16) выполнены условия предложения 2: F_1^- вполне непрерывен и антитонен; решение $y(t)$ задачи (15) является многочленом и в силу неравенств $\alpha_i \ge 0$, $i = \overline{1,n}$, если $\sum_{i=1}^n \alpha_i \ne 0$, то $y(t) > 0$ на (a,b); если $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, то $y(t) = 0$ на (a,b); неравенство $(F_1^- y)(t) + y(t) \ge 0$ выполнено. Следовательно, задача (10) имеет решение, удовлетворяющее неравенствам

$$(F_1^- y)(t) + y(t) \le x(t) \le y(t). \ \square$$

В качестве примера, иллюстрирующего возможности применения изложенных результатов, рассмотрим задачу (1), (2) при $k = 1$

$$x^{(n)}(t) + \int_a^b x(s)\,d_s R(t,s) = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{17}$$

$$x^{(i)}(a) = 0, \quad i = \overline{0, n-2}, \quad x(b) = 0. \tag{18}$$

Сформулируем утверждения, вытекающие из теорем 2 и 3.

Утверждение 1. *Если выполнено неравенство*

$$\int_a^b [R^-(\eta,b) - R^-(\eta,a)]d\eta \le \frac{(n-1)!}{(b-a)^{n-1}}, \tag{19}$$

то краевая задача $(\mathcal{L}^- x)(t) = f(t)$, $x^{(i)}(a) = 0$, $i = \overline{0, n-2}$, $x(b) = 0$, *однозначно разрешима, и ее функция Грина* $G^-(t,s) < 0$ *на* $(a,b) \times (a,b)$.

Утверждение 2. *Если выполнено неравенство* (19), *то решение задачи*

$$(\mathcal{L}^- x)(t) = 0, \quad x^{(i)}(a) = 0, \quad i = \overline{0, n-3}, \quad x^{(n-2}(a) = \alpha \ge 0, \quad x(b) = \beta \ge 0,$$

не принимает отрицательных значений на (a,b).

Используя их, получим вытекающие из теоремы 1 для задачи (17), (18)

Следствие 1. Если выполнено неравенство (19), то эквивалентны утверждения

1) существует такая функция $v \in W^n$, что $v(t) \ge 0$, $t \in [a,b]$, $(\mathcal{L}v)(t) = \psi(t) \le 0$ почти всюду на $[a,b]$, $v^{(i)}a = 0$, $i = \overline{0, n-3}$, $v^{(n-2)}(a) \ge 0$, $v(b) \ge 0$ и $v^{(n-2)}(a) + v(b) - \int_a^b \psi(s)ds > 0$;
2) задача (17), (18) однозначно разрешима и $G(t,s) < 0$ на $(a,b) \times (a,b)$;
3) $\rho(F_1^+) < 1$.

С помощью следствия 1 можно получать эффективные условия однозначной разрешимости краевой задачи (17), (18) и сохранения знака ее функции Грина, а также и других эквивалентных утверждений. Например,

Следствие 2. Если выполнено неравенство (19) и $\int_a^b (s-a)^{n-1}(b-s)d_s R(t,s) < n!$ почти всюду на $[a,b]$, то краевая задача (17), (18) однозначно разрешима, и ее функция Грина $G(t,s) < 0$ на $(a,b) \times (a,b)$.

Лемма 1 и теорема 2 также позволяют получить эффективные достаточные условия однозначной разрешимости краевой задачи (17), (18) и отрицательности функции Грина.

Следствие 3. Если выполнено неравенство (19) и

$$\int_a^b [R^+(\eta,b) - R^+(\eta,a)]d\eta \le \frac{2^{2(n-1)}(n-1)!}{(b-a)^{n-1}},$$

то краевая задача (17), (18) однозначно разрешима, и ее функция Грина $G(t,s) < 0$ на $(a,b) \times (a,b)$.

Сформулированные эффективные признаки однозначной разрешимости задачи (17), (18) и отрицательности ее функции Грина обобщают результаты С.М.Лабовского [8] и уточняют результаты В.П.Плаксиной [2].

Как отмечалось выше, частным случаем задачи (17), (18) является краевая задача для уравнения с сосредоточенным отклонением аргумента

$$\begin{aligned} &x^{(n)}(t) + p(t)x_h(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \\ &x^{(i)}(a) = 0, \quad i = \overline{0, n-2}, \quad x(b) = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

где $p, f : [a,b] \to R^1$ — суммируемые функции,

$$x_h(t) = \begin{cases} x(h(t)), & \text{если } h(t) \in [a,b]; \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [a,b], \end{cases}$$

$h : [a,b] \to R^1$ — измеримая функция, обладающая свойством "независания":

$$\text{mes}\{t \in [a,b] : h(t) = h(a)\} = 0,$$

$$\operatorname{mes}\{t \in [a,b] : h(t) = h(b)\} = 0.$$

Представим функцию $p(t)$ в виде разности $p(t) = p_1(t) - p_2(t)$, где $p_1(t) \geq 0$, $p_2(t) \geq 0$ при почти всех $t \in [a,b]$ и введем обозначение

$$\sigma_h(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } h(t) \in [a,b]; \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [a,b]. \end{cases}$$

Тогда следствия 2 и 3 для задачи (20) примут следующий вид.

Следствие 4. Пусть выполнены неравенства

$$\int_a^b p_2(t)\sigma_h(t)dt \leq \frac{(n-1)!}{(b-a)^{n-1}},$$
$$p(t)\sigma_h(t)(b-h(t))(h(t)-a)^{n-1} < n!\,,$$

тогда задача (20) однозначно разрешима и ее функция Грина $G(t,s) < 0$ на $(a,b) \times (a,b)$.

Следствие 5. Пусть выполнены условия

$$\int_a^b p_1(t)\sigma_h(t)dt \leq \frac{2^{2(n-1)}(n-1)!}{(b-a)^{n-1}},$$
$$\int_a^b p_2(t)\sigma_h(t)dt \leq \frac{(n-1)!}{(b-a)^{n-1}},$$

тогда задача (20) однозначно разрешима, и ее функция Грина $G(t,s) < 0$ на $(a,b) \times (a,b)$.

2. Рассмотрим краевую задачу (1), (2) при четном k. Пользуясь представлением функции $R(t,s)$ в виде разности (4), запишем уравнение (1) в виде

$$x^{(n)}(t) + \int_a^b x(s)d_sR^+(t,s) = \int_a^b x(s)d_sR^-(t,s) + f(t).$$

Наряду со вспомогательной задачей (11) рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}(\mathcal{L}^+x)(t) \equiv x^{(n)}(t) + \int_a^b x(s)d_sR^+(t,s) = z(t), \quad t \in [a,b], \\ x^{(i)}(a) = 0, \quad i = \overline{0, n-k-1}, \quad x^{(j)}(b) = 0, \quad j = \overline{0, k-1},\end{gathered} \tag{21}$$

функцию Грина которой обозначим $G^+(t,s)$. Заменяя $R^+(t,s)$ на $R^-(t,s)$, $G^+(t,s)$ на $G^-(t,s)$ и повторяя приведенные выше рассуждения, получим следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть k — четное число, краевая задача* (21) *однозначно разрешима и $G^+(t,s) >$ > 0 на $(a,b) \times (a,b)$. Пусть, далее,*

$$\operatorname{mes}\{t \in [a,b] : R^-(t,a) \neq R^-(t,a+0)\} = 0,$$
$$\operatorname{mes}\{t \in [a,b] : R^-(t,b) \neq R^-(t,b-0)\} = 0,$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) *существует такая функция $v \in W^n$, что $v(t) \geq 0$, $t \in [a,b]$, $(\mathcal{L}v)(t) = \psi(t) \geq 0$ почти всюду на $[a,b]$, $l_iv = \alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, причем решение задачи $(\mathcal{L}^+x)(t) = 0$, $t \in [a,b]$, $l_ix = \alpha_i$, $i = \overline{1,n}$, не принимает отрицательных значений на (a,b) и $\sum_{i=1}^n \alpha_i + \int_a^b \psi(s)ds > 0$;*
2) *задача* (1), (2) *однозначно разрешима и $G(t,s) > 0$ на $(a,b) \times (a,b)$;*
3) *спектральный радиус оператора $F_2^- : C \to C$, определяемого равенством*

$$(F_2^-x)(t) = \int_a^b \left\{G^+(t,s)\int_a^b x(\tau)d_\tau R^-(s,\tau)\right\}ds,$$

меньше единицы.

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 278 с.
2. Плаксина В.П. *Условия знакопостоянства функции Грина одной двухточечной краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения n-го порядка.* – Пермь, 1989. – 43 с. – Деп. в ВИНИТИ 16.05.89, № 3280–В89.
3. Schwabik S. *Generalized ordinary differential equations.* – Singapore: World Scientific, 1995. – 382 p.
4. Schwabik S., Tvrdý M., Veivoda O. *Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints.* – Praha: Academia, 1979. – 245 p.
5. Исламов Г.Г. *Об оценке сверху спектрального радиуса* // Докл. РАН. – 1992. – Т. 322. – № 5. – С.836–838.
6. de la Vallée Poussin Ch. *Sur l'equation differentielle lineare du second ordre* // J. math. pures et appl. – 1929. – V. 8. – P.125–144.
7. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. *К вопросу о функционально-дифференциальных неравенствах и монотонных операторах* // Функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1986. – С. 3–9.
8. Лабовский С.М. *О сохранении знака вронскиана фундаментальной системы, функции Коши и функции Грина двухточечной краевой задачи для уравнения с запаздывающим аргументом* // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11. – № 10. – С. 1780–1789.

Пермский государственный
технический университет

Поступила
28.06.1996