ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 8 (483)

УДК 517.518

А.Б. СЕКЕРИН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАЗНОСТЬЮ ШТЕЙНЕРОВСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Обозначения. Для $x, y \in \mathbb{R}^m$ полагаем $\langle x, y\rangle = \sum x_j y_j$, dx — стандартная мера Лебега в $\mathbb{R}^m$, S^{m-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^m$, $d\sigma$ — элемент площади на сфере, $B^m(x,R)$ — открытый шар с центром в x радиуса R. Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ через $\mathcal{D}(\Omega)$ обозначается пространство гладких действительнозначных функций, носители которых — компакты в Ω. Для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ через $\widehat{\varphi}(t,w)$ обозначается преобразование Радона ([1], с. 16). Символом Δ обозначается оператор Лапласа.

В. Бляшке ([2], с. 187) поставил задачу описания класса центрально-симметричных выпуклых компактов в $\mathbb{R}^m$, $m > 2$, опорная функция которых допускает представление

$$H_K(x) = \int\limits_{S^{m-1}} |\langle x, w\rangle| d\nu(w), \tag{1}$$

где ν — положительная мера, заданная на сфере. Другими словами, была поставлена задача описания выпуклых компактов, которые представляют собой линейную комбинацию (в том числе "непрерывную") отрезков с положительными коэффициентами. Впоследствии компакты, входящие в данный класс, получили название штейнеровских компактов [3]–[6], для которых получено несколько эквивалентных описаний.

Опорную функцию (1) штейнеровского компакта будем называть штейнеровской. В связи с этим можно ввести класс функций, допускающих более общее интегральное представление.

Определение. Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция в $\mathbb{R}^m$. Будем называть функцию $u(x)$ штейнеровским потенциалом, если на $[0,\infty)\times S^{m-1}$ существует положительная борелевская мера $\mu(t,w)$ такая, что для любого $R > 0$ в шаре $B^m(0,R)$ верно

$$u(x) = \int\limits_{[0,R]\times S^{m-1}} |t - \langle x, w\rangle| d\mu(t,w) + H_R(x), \tag{2}$$

где $H_R(x)$ — гармоническая в $B^m(0,R)$ функция.

В [7] доказано необходимое и достаточное условие представимости заданной субгармонической функции $u(x)$ штейнеровским потенциалом, состоящее в том, что обобщенный лапласиан функции $u(x)$ должен быть неотрицателен на всех основных функциях с неотрицательным преобразованием Радона. Если при выполнении этого условия функция $u(x)$, кроме того, однородна порядка 1, то она является штейнеровской.

Как известно, в случае $m = 2$ любая выпуклая в $\mathbb{R}^m$ четная однородная функция является штейнеровской, для $m \geq 3$ класс штейнеровских функций существенно у́же класса четных выпуклых однородных функций. Соответственно класс субгармонических в $\mathbb{R}^m$ функций не совпадает с классом штейнеровских потенциалов. В данной работе доказывается, что любая гладкая функция в $\mathbb{R}^m$ представляется разностью штейнеровских потенциалов.

Работа выполнена по гранту Министерства образовнаия Российской Федерации по исследованиям в области фундаментального естествознания (проект № 97-01.6-116).

Теорема. *Пусть $u(x)$ — гладкая действительнозначная функция в $\mathbb{R}^m$. Тогда существуют гладкие штейнеровские потенциалы $u_1(x)$ и $u_2(x)$ такие, что всюду в $\mathbb{R}^m$ верно*

$$u(x) = u_1(x) - u_2(x).$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что любой положительной мере $\mu(t, w)$, заданной на $[0, \infty) \times S^{m-1}$, можно сопоставить штейнеровский потенциал в $\mathbb{R}^m$, т. е. справедлив аналог теоремы Вейерштрасса для субгармонических функций ([8], с. 78). Положим

$$u_\mu(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{[0,\infty)\times S^{m-1}} (|t - \langle x, w\rangle| - (t - \langle x, w\rangle))\, d\mu(t, w). \tag{3}$$

Для любого $R > 0$ при выполнении условия $|x| \le R$ интеграл (3) может быть записан в виде

$$u_\mu(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{[0,R]\times S^{m-1}} (|t - \langle x, w\rangle| - (t - \langle x, w\rangle))\, d\mu(t, w),$$

поэтому функция $u_\mu(x)$ является выпуклой (и, в частности, непрерывной) в $\mathbb{R}^m$. Для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ для некоторого $R > 0$ верно $\varphi(x) \in \mathcal{D}(B^m(0, R))$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} u_\mu(x) \Delta\varphi(x) dx = \frac{1}{2} \int\limits_{[0,R]\times S^{m-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |t - \langle x, w\rangle| \Delta\varphi(x) dx \right) d\mu(t, w).$$

Далее воспользуемся равенством [7]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} |t - \langle x, w\rangle| \Delta\varphi(x) dx = 2\widehat{\varphi}(t, w),$$

где $\widehat{\varphi}(t, w)$ — преобразование Радона функции φ. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} u_\mu(x) \Delta\varphi(x) dx = \int\limits_{[0,R]\times S^{m-1}} \widehat{\varphi}(t, w) d\mu(t, w).$$

Так как при этом $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B^m(0, R)$, то $\widehat{\varphi}(t, w) = 0$ для $t > R$ (при условии $|w| = 1$). Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} u_\mu(x) \Delta\varphi(x) dx = \int\limits_{[0,\infty)\times S^{m-1}} \widehat{\varphi}(t, w) d\mu(t, w). \tag{4}$$

Отсюда следует, что $u_\mu(x)$ является штейнеровским потенциалом, соответствующая мера μ которого связана с ним соотношением (4).

Пусть теперь $u(x)$ — гладкая функция в $\mathbb{R}^m$. Тогда [9] существует функция $v(s, w)$, заданная и непрерывная на $\mathbb{R} \times S^{m-1}$, бесконечно дифференцируемая по s на $(-\infty, \infty)$ и такая, что

$$u(x) = \int\limits_{S^{m-1}} v(\langle x, w\rangle, w) d\sigma(w). \tag{5}$$

При этом функцию $v(s, w)$ можно считать четной. Интегральный оператор в правой части (5) называется дуальным преобразованием Радона. Равенство (5) означает, что любая гладкая функция в $\mathbb{R}^m$ является образом дуального преобразования Радона некоторой функции, заданной на $\mathbb{R} \times S^{m-1}$. Из равенства (5) для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} u(x) \Delta\varphi(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{S^{m-1}} v(s, w) \widehat{\Delta\varphi}(s, w) ds\, d\sigma(w), \tag{6}$$

где $\widehat{\Delta\varphi}(s,w)$ — преобразование Радона функции $\Delta\varphi(x)$. Так как [1]

$$\widehat{\Delta\varphi}(s,w) = \frac{\partial^2 \widehat{\varphi}}{\partial s^2}(s,w),$$

где $\widehat{\varphi}(s,w)$ — преобразование Радона исходной функции $\varphi(x)$, то из (6) получаем, учитывая, что обе подинтегральные функции в правой части четные,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} u(x)\Delta\varphi(x)dx = 2\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{S^{m-1}} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t,w)\widehat{\varphi}(t,w)dt\,d\sigma(w). \tag{7}$$

Пусть $v_1(s,w)$ и $v_2(s,w)$ — непрерывные на $\mathbb{R}\times S^{m-1}$, гладкие по s, четные, положительные функции такие, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(s,w) = v_1(s,w) - v_2(s,w). \tag{8}$$

Положим

$$u_j(x) = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{S^{m-1}} \left(|t-\langle x,w\rangle| - (t-\langle x,w\rangle)\right) v_j(t,w)dt\,d\sigma(w), \quad j=1,2.$$

Тогда согласно (4) для любой функции $\varphi(x)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} (u_1(x)-u_2(x))\Delta\varphi(x)dx = 2\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{S^{m-1}} \widehat{\varphi}(t,w)(v_1(t,w)-v_2(t,w))dt\,d\sigma(w).$$

Отсюда, а также из (8) и (7) следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} (u_1(x)-u_2(x))\Delta\varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} u(x)\Delta\varphi(x)dx.$$

Это означает, что функция $u(x)$ с точностью до гармонической функции совпадает с разностью $u_1(x)-u_2(x)$. Из равенства (8) следует, что для $j=1,2$

$$\Delta u_j(x) = \int\limits_{S^{m-1}} v_j(\langle x,w\rangle,w)d\sigma(w).$$

Поэтому функции $\Delta u_j(x)$, а также $u_j(x)$ являются гладкими. $\square$

Замечание. Условие гладкости (бесконечной дифференцируемости) представляемой функции $u(x)$ можно несколько ослабить, требуя наличия только конечного числа непрерывных производных. Для этого вместо результата работы [9] можно воспользоваться вещественным аналогом конструктивного построения решения интегрального уравнения вида (5)(указанный метод для комплексного преобразования Радона предложен в [10]). Соответственно при этом потенциалы $u_j(x)$ также будут иметь меньшую гладкость.

Литература

1. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. *Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.* – М.: Наука, 1962. – 656 с.
2. Бляшке В. *Круг и шар.* – М.: Наука, 1967. – 232 с.
3. Bolker E.D. *A class of convex bodies* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – V. 145. – P. 323–346.
4. Залгаллер В.А., Решетняк Ю.Г. *О спрямляемых кривых, аддитивных вектор-функциях и смещении отрезков* // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1954. – № 2. – С. 45–67.
5. Herz C.S. *A class of negative definite functions* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – V. 14. – P. 670–676.

6. Choquet G. *Mesures coniques et affines invariants par isométries. Zonoformes, zonoèdres et fonctions de type negatif* // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1968. – V. 266. – P. 619–621.
7. Секерин А.Б. *Преобразование Радона и зоноиды* // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59. – № 2. – С. 254–260.
8. Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих переменных.* – М.: Наука, 1971. – 430 с.
9. Hertle A. *On the range of the Radon transform and its dual* // Math. Ann. – 1984. – V. 267. – № 1. – P. 91–99.
10. Секерин А.Б. *Представление бесконечно дифференцируемой функции разностью плюрисубгармонических* // Матем. заметки. – 1986. – Т. 40. – № 5. – С. 598–607.

Орловский государственный
университет

Поступила
09.01.2001