ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 8 (483)

УДК 515.143

Э.А. МИРЗАХАНЯН

ПОСТРОЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Введение

Данная работа посвящена бесконечномерной алгебраической топологии, а именно, построению бесконечномерных относительных гомотопических групп пунктированных пар подмножеств вещественного (не обязательно сепарабельного) гильбертова пространства H.

Для построения бесконечномерной алгебраической топологии вещественного гильбертова пространства H класс всех непрерывных отображений подмножеств H оказывается слишком широким. Выход из этого положения заключается в том, что следует ограничить класс допустимых отображений, т. е. рассматривать не все непрерывные отображения, а лишь более узкий класс отображений.

К сожалению, класс Q всех отображений вида $\lambda I + A$, где I — тождественное отображение H, λ — действительное число, а A — вполне непрерывное отображение, оказывается слишком узким. Попытки расширения класса Q были предприняты в работах С.С. Рышкова, В.Г. Болтянского, Р.Л. Фрум-Кеткова. Следуя идеям Лере и Шаудера, в 1970 г. В.Г. Болтянский построил [1] допустимый класс K_0 непрерывных отображений подмножеств вещественного сепарабельного гильбертова пространства, приемлемый для построения бесконечномерной алгебраической топологии в гильбертовом пространстве. Отображения рассматриваемого класса K_0 локально (т. е. в окрестности каждой точки x_0) напоминают по своим свойствам отображения вида $\lambda I + A$, где, однако, λ зависит от точки x_0, следовательно, K_0 значительно шире класса Q.

Еще один важный элемент в построении бесконечномерной алгебраической топологии — это теория степени отображения, изложенная в работе Лере и Шаудера и нашедшая свое дальнейшее развитие и приложение в работах Браудера, М.А. Красносельского, Р.Л. Фрум-Кеткова и многих других авторов, например, [2], [3] (см. также [4]–[15]).

В совместной работе В.Г. Болтянского и Э.А. Мирзаханяна [4] показано, что идеи Лере и Шаудера позволяют распространить понятие степени отображения на некоторый подкласс класса K_0.

Положив в основу класс K_0, автор статьи построил бесконечномерные абсолютные гомотопические группы двух типов (некомпактного и компактного) подмножеств сепарабельного гильбертова пространства, доказал целый ряд важных свойств этих групп и класса K_0, в частности, получил K_0-аналоги классических теорем Брауэра, Борсука и других [7]–[10].

В дальнейшем автор рассматривал класс K_0 и его естественное расширение K в произвольном (не обязательно сепарабельном) вещественном гильбертовом пространстве H. Оказалось, что и в общем случае почти все полученные ранее результаты и проведенные построения остаются справедливыми и для класса K_0, и частично для K.

В данной статье в основе всех построений лежат допустимые классы $K_0 \subset K$. В п. 1 даны определения допустимых классов K_0 и K, а также некоторые сведения об отображениях, принадлежащих этим классам. Ряд основных свойств этих классов, в частности, содержится в [1]–[6]. В п. 2 описывается первый подход к построению бесконечномерных относительных гомотопических групп пар подмножеств из H, называемых K_0- (соответственно K-) бесконечномерными гомотопическими группами. В целях более эффективных приложений, наложив на сфероиды и их гомотопии некоторые условия типа компактности, также определяем так называемые K_0- (соответственно K-) бесконечномерные гомотопические группы компактного типа. В п. 3 для сепарабельного пространства H описывается второй подход к построению бесконечномерных гомотопических групп некомпактного и компактного типов, основанный на понятии ортонормированного базиса пространства H.

Согласно теореме 3 рассматриваемые два подхода эквивалентны, т. е. приводят к изоморфным группам.

1. Допустимые отображения

Как уже отмечалось во введении, во всех построениях допустимыми отображениями будут непрерывные отображения, принадлежащие специальным классам K_0 и K, а также целому ряду классов, построенных посредством K_0 и K.

Зафиксируем вещественное гильбертово пространство H.

Определение 1. Пусть G — открытое подмножество пространства H, $f : G \to H$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что f принадлежит классу K или является K-отображением (относительно H), если выполнено условие

a) для любой точки $x_0 \in G$ и любого вещественного числа $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U = U(x_0, \varepsilon) \subset G$ точки x_0, конечномерное (линейное) подпространство $L = L(x_0, \varepsilon)$ пространства H и действительное число λ такие, что если точки $x, y \in H$ и вектор $(x - y)$ ортогонален L, то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leq \varepsilon\|x - y\|.$$

Далее будем говорить, что K-отображение $f : G \to H$ принадлежит классу K_0 или является K_0-отображением, если выполнено

b) (локальное условие Липшица) для любой точки $x_0 \in G$ существуют такие числа $r = r(x_0)$ и $c = c(x_0)$, что при $x, y \in G$, $\|x - x_0\| < r$, $\|y - y_0\| < r$ выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Фигурирующее в а) действительное число λ можно выбрать так, чтобы оно определялось только точкой x_0 и было пригодно для любого числа $\varepsilon > 0$. Получающаяся таким образом действительная функция $\lambda(x) = \lambda_f(x)$, заданная на G, непрерывна и единственна [6]; она называется терминальной производной отображения f. Отметим, что композиция двух K_0-отображений есть K_0-отображение, но композиция K-отображений не всегда есть K-отображение.

Пусть теперь X — произвольное (не обязательно открытое) подмножество из H. Будем говорить, что непрерывное отображение $f : X \to H$ является K_0- (соответственно K-) отображением, если существуют открытое в H подмножество $G \supset X$ и K_0- (соответственно K-) отображение $\overline{f} : G \to H$ такие, что $\overline{f}(x) = f(x)$ для каждой точки $x \in X$.

Если X и Y — подмножества из H и $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, то f будем называть K_0- (соответственно K-) отображением X в Y, если отображение $f : X \to H$, т. е. композиция $i \circ f : X \to H$, где $i : Y \to H$ — вложение, является K_0- (соответственно K-) отображением.

Через $K_0(M)$ (соответственно $K(M)$) будем обозначать класс всех K_0- (соответственно K-) отображений относительно гильбертова пространства M.

2. Некоторые типы бесконечномерных гомотопических групп

В этом пункте снова будем полагать зафиксированным действительное гильбертово пространство H.

Напомним, что (линейное) подпространство M пространства H называется подпространством конечной коразмерности (или дефекта) $q \geq 0$, если ортогональное дополнение к M в H имеет размерность q. Если q — отрицательное целое число, то гильбертово пространство M будем называть по отношению к H надпространством коразмерности q, если M содержит H в качестве своего подпространства коразмерности $(-q)$.

Условимся через $B(M)$, $B^*(M)$ и $S(M)$ обозначать соответственно единичные замкнутый, открытый шары и единичную сферу подпространства или надпространства M пространства H.

Дадим определение класса K_q^*, $q \in \mathbb{Z}$. При $q = 0$ определим K_0^* как множество всех отображений $\varphi : H \to H$, принадлежащих классу $K_0(H)$. Если $q > 0$, то под K_q^* будем понимать множество всех отображений $\varphi : M \to H$, принадлежащих классу $K_0(H)$, где $M \subset H$ — подпространство коразмерности q. При $q < 0$ под K_q^* будем понимать множество всех отображений $\varphi : M \to H$, принадлежащих классу K_0 относительно гильбертова пространства M, являющегося надпространством коразмерности q пространства H.

Пусть M — некоторое зафиксированное подпространство или надпространство конечной коразмерности $q \in \mathbb{Z}$ пространства H. Выберем некоторый единичный вектор $e \in M$ и обозначим через M_e подпространство M, ортогональное прямой L_e, проходящей через e. Далее положим

$$J^e(M) = \{x \in M : (x, e) \geq 0,\ x \notin L_e \times B^*(M_e)\} \cup \{x \in M \setminus B^*(M) : (x, e) \leq 0\}. \tag{1}$$

Пусть (X, A, x_0) — тройка, состоящая из произвольного множества $X \subseteq H$, его подмножества $A \subseteq X$ и точки $x_0 \in A$.

Определение 2. Отображение $\varphi : (M, M \setminus B^*(M),\ J^e(M)) \to (X, A, x_0)$, принадлежащее классу K_q^*, будем называть (относительным) K_0-сфероидом коразмерности $q \in \mathbb{Z}$ пары (X, A) в точке x_0 или тройки (X, A, x_0).

Обозначим через $F_q^{M,e}(X, A, x_0)$ множество всех K_0-сфероидов коразмерности q тройки (X, A, x_0) и введем в нем операцию сложения. Выберем некоторый единичный вектор $a \in M_e$ и для $\varphi, \psi \in F_q^{M,e}(X, A, x_0)$ положим

$$h(x) = \begin{cases} \varphi(2x + a) & \text{при } (x, a) \leq 0; \\ \psi(2x - a) & \text{при } (x, a) \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Так как отображения $x \to 2x + a$ и $x \to 2x - a$ принадлежат классу K_0, то $h \in F_q^{M,e}(X, A, x_0)$. K_0-сфероид h будем называть суммой сфероидов φ и ψ и обозначать $h = \varphi + \psi$.

Определим теперь понятие гомотопности в $F_q^{M,e}(X, A, x_0)$. Обозначим через R числовую прямую, а через I — отрезок $[0, 1]$. Декартово произведение $M' = R \times M$ можно рассматривать как гильбертово пространство, для которого M является подпространством коразмерности 1. В случае $q > 0$ следует за R принять любую содержащуюся в H прямую, проходящую через точку 0 и ортогональную $M \subset H$.

Определение 3. Сфероиды $\varphi, \psi \in F_q^{M,e}(X, A, x_0)$ будем называть K_0-гомотопными и записывать $\varphi \simeq \psi$, если существует отображение $\Phi : I \times M \to X$, обладающее свойствами

1. Φ принадлежит классу K_0 относительно гильбертова пространства $M' \cup H$;
2. для любого $t \in I$ отображение $\varphi_t : M \to X$, определяемое равенством $\varphi_t(x) = \Phi(t, x)$, $x \in M$, принадлежит множеству $F_q^{M,e}(X, A, x_0)$;
3. $\varphi_0 = \varphi$ и $\varphi_1 = \psi$.

При этом отображение Φ, а также семейство (φ_t) будем называть K_0-гомотопией сфероидов, соединяющей φ и ψ. Ясно, что так определяемое понятие гомотопности является отношением эквивалентности, только в данном случае нужно каждый раз показывать принадлежность отображений классу K_0. Множество всех получаемых гомотопических классов будем обозначать через $\Pi_q^{M,e}(X, A, x_0)$. Введенная выше операция сложения сфероидов порождает сложение гомотопических классов по представителям в множестве $\Pi_q^{M,e}(X, A, x_0)$ по формуле $[\varphi] + [\psi] = [\varphi + \psi]$.

Можно показать, что это сложение определено корректно, т. е. из $(\varphi \sim \varphi')$ и $(\psi \sim \psi')$ следует, что $(\varphi + \psi) \sim (\varphi' + \psi')$. В самом деле, соответствующую K_0-гомотопию получим, положив

$$h_t(x) = \begin{cases} \varphi_t(2x + a) & \text{при } (x, a) \le 0; \\ \psi_t(2x - a) & \text{при } (x, a) \ge 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *При любом целом q множество $\Pi_q^{M,e}(X, A, x_0)$ относительно операции сложения $[\varphi] + [\psi] = [\varphi + \psi]$ является коммутативной группой.*

Доказательство. Пусть α, β, γ — произвольные элементы из $\Pi_q^{M,e}(X, A, x_0)$, $\alpha = [\varphi_1]$, $\beta = [\varphi_2]$ и $\gamma = [\varphi_3]$. Положим $\varphi = \varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3)$ и $\psi = (\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3$.

Для равенства $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ нужно показать, что $\varphi \sim \psi$. Согласно формуле (2) сложения сфероидов будем иметь

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(2x + a) & \text{при } (x, a) \le 0; \\ \varphi_2(4x - a) & \text{при } 0 \le (x, a) \le 1/2; \\ \varphi_3(4x - 3a) & \text{при } (x, a) \ge 1/2, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(4x + 3a) & \text{при } (x, a) \le -1/2; \\ \psi_2(4x + a) & \text{при } -1/2 \le (x, a) \le 0; \\ \psi_3(2x - a) & \text{при } (x, a) \ge 0. \end{cases}$$

Построим гомотопию

$$\chi_t(x) = \begin{cases} \varphi_1[(1 + t)2x + (2t + 1)a] & \text{при } (x, a) \le -t/2; \\ \varphi_2[4x - (1 - 2t)a] & \text{при } -t/2 \le (x, a) \le 1/2 - t/2; \\ \varphi_3[(2 - t)2x - (3 - 2t)a] & \text{при } (x, a) \ge 1/2 - t/2. \end{cases}$$

Семейство (χ_t) является K_0-гомотопией, соединяющей сфероиды φ и ψ. Обозначим через θ постоянный сфероид тройки (X, A, x_0), который обладает свойством $\theta(M) = \{x_0\}$. Покажем, что класс сфероида θ служит нулевым элементом. Для этого нужно показать, что для любого сфероида φ тройки (X, A, x_0) выполнено $\varphi \sim \varphi + \theta$. Полагая $\Phi(t, x) = \varphi((1 + t)x + ta)$; $t \in I$, $x \in M$, непосредственно проверяем, что $\Phi : I \times M \to X$ устанавливает K_0-гомотопность $\varphi \sim \varphi + \theta$.

Покажем теперь существование противоположного элемента. Пусть α — произвольный элемент множества $\Pi_q^{M,e}(X, A, x_0)$ и φ — некоторый сфероид из класса α. Пусть далее $\psi = \varphi \circ \sigma \in F_q^{M,e}(X, A, x_0)$ — сфероид тройки (X, A, x_0), симметричный сфероиду φ относительно гиперплоскости Γ_0 в M, определяемой уравнением $(x, a) = 0$, где σ — симметрия относительно гиперплоскости Γ_0, т. е. $\varphi(x) = \psi(y)$ при выполнении условий $x + y \in \Gamma_0$, $x - y \in \Gamma_0$. Покажем, что класс $\beta = [\psi]$ является противоположным элементом для α. Для этого нужно показать, что $(\varphi + \psi) \sim \theta$.

Положим

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} \varphi(2x + (1 - 2t)a) & \text{при } (x, a) \le 0; \\ \psi(2x - (1 - 2t)a) & \text{при } (x, a) \ge 0, \end{cases}$$

где $x \in M$, $t \in I$. Отображение $\Phi : I \times M \to X$ является K_0-гомотопией, соединяющей K_0-сфероиды $\varphi + \psi$ и θ. Наконец, остается доказать коммутативность операции сложения. Пусть $\alpha, \beta \in \Pi_q^{M,e}(X, A, x_0)$, $\alpha = [\varphi]$ и $\beta = [\psi]$. Для доказательства $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ нужно установить, что $(\varphi + \psi) \sim (\psi + \varphi)$. С этой целью выберем единичный вектор $b \in M_e$, ортогональный вектору a и положим

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} \varphi(2x + a\cos\pi t + b\sin\pi t) & \text{при } (x, a\cos\pi t + b\sin\pi t) \le 0; \\ \psi(2x - a\cos\pi t - b\sin\pi t) & \text{при } (x, a\cos\pi t + b\sin\pi t) \ge 0. \end{cases}$$

Отображение Φ является K_0-гомотопией, соединяющей сфероиды $\varphi + \psi$ и $\psi + \varphi$. □

В построенной группе $\Pi_q^{M,e,a}(X, A, x_0)$ участвуют три элемента выбора, а именно, подпространство или надпространство M коразмерности q пространства H, единичный вектор $e \in M$ и единичный вектор $a \in M_e$. Докажем три предложения, из которых будет следовать независимость этой группы от элементов выбора.

Предложение 1. *При любом целом q группы $\Pi_q^{M,e,a}(X, A, x_0)$ и $\Pi_q^{M,e,a'}(X, A, x_0)$, построенные посредством различных единичных векторов $a, a' \in M_e$, изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть L — линейная оболочка векторов a, a' и M_1 — ортогональное дополнение к L в подпространстве M_e. Выберем в M_1 произвольный ортонормированный базис (e_j), $j \in J$, и достроим его векторами e, a, b и e, a', b' соответственно до ортонормированных базисов в M.

Пусть $\omega : M \to M$ — ортогональное преобразование, задаваемое равенствами $\omega(e) = e$, $\omega(a') = a$, $\omega(b') = b$, $\omega(e_j) = e_j$, $j \in J$. Преобразование ω отображает тройку $(M, M \setminus B^*(M),\ J^e(M))$ в себя и принадлежит классу K_0 относительно M при $q < 0$ и относительно H при $q \geq 0$.

Пусть $\alpha \in \Pi_q^{M,e,a}(X, A, x_0)$ и $\alpha = [\varphi]$. Положим $\varphi' = \varphi \circ \omega : (M, M \setminus B^*(M),\ J^e(M)) \to (X, A, x_0)$, $\varphi' \in F_q^{M,e}(X, A, x_0)$, и пусть $\alpha' = [\varphi'] \in \Pi_q^{M,e,a'}(X, A, x_0)$. Элемент α' не зависит от выбора представителя φ. В самом деле, пусть $\alpha = [\psi]$, т.е. $\varphi \sim \psi$, и пусть (χ_t) — некоторая K_0-гомотопия, соединяющая сфероиды φ и ψ. Тогда, положив $\chi'_t = \chi_t \circ \omega$, $t \in I$, получим K_0-гомотопию (χ'_t), соединяющую сфероиды φ' и ψ'. Таким образом, отображение ω порождает биективное отображение $\omega_* : \Pi_q^{M,e,a}(X, A, x_0) \to \Pi_q^{M,e,a'}(X, A, x_0)$, задаваемое по формуле $\omega_*(\alpha) = \alpha'$. Отображение ω_* есть гомоморфизм группы $\Pi_q^{M,e,a}(X, A, x_0)$ на группу $\Pi_q^{M,e,a'}(X, A, x_0)$. Действительно, если $\alpha = [\varphi]$, $\beta = [\psi]$, то легко проверить соотношение $(\varphi + \psi) \circ \omega = \varphi \circ \omega + \psi \circ \omega$. Здесь сложение сфероидов выполняется согласно формуле (2), причем в левой части — посредством вектора a, в правой части — посредством вектора a'. Наконец, поскольку ω_* биективно, то оно есть изоморфизм. $\square$

В силу предложения 1 запись $\Pi_q^{M,e,a}(X, A, x_0)$ можно сократить до $\Pi_q^{M,e}(X, A, x_0)$.

Предложение 2. *При любом целом q группы $\Pi_q^{M,e}(X, A, x_0)$ и $\Pi_q^{M,e'}(X, A, x_0)$, построенные посредством различных единичных векторов $e, e' \in M$, изоморфны.*

Доказательство. Выберем произвольно единичные векторы $a \in M_e$ и $a' \in M_{e'}$. В подпространстве $M_0 = M_e \cap M_{e'}$ возьмем некоторый ортонормированный базис (e_j), $j \in J$, и достроим его векторами e, a и соответственно e', a' до ортонормированных базисов в M. Рассмотрим ортогональное преобразование $\omega : M \to M$, задаваемое равенствами $\omega(e') = e$, $\omega(a') = a$ и $\omega(e_j) = e_j$ при $j \in J$. Отображение ω переводит тройку $(M, M \setminus B^*(M),\ J^{e'}(M))$ в тройку $(M, M \setminus B^*(M),\ J^e(M))$ (см. (1)) и принадлежит классу K_0 относительно M при $q < 0$ и относительно H при $q \geq 0$. Сопоставляя сфероиду $\varphi \in F_q^{M,e}(X, A, x_0)$ сфероид $\varphi' = \varphi \circ \omega \in F_q^{M,e'}(X, A, x_0)$, получим биективное отображение $F_q^{M,e}(X, A, x_0)$ на $F_q^{M,e'}(X, A, x_0)$. Более того, если $\varphi \sim \psi$, то $\varphi' \sim \psi'$, ибо, если (χ_t) соединяет φ и ψ, то $(\chi_t \circ \omega)$ будет соединять φ' и ψ'. В результате получаем биективное отображение $\omega_* : \Pi_q^{M,e}(X, A, x_0) \to \Pi_q^{M,e'}(X, A, x_0)$. Далее, повторяя рассуждения, аналогичные приведенным в конце доказательства предложения 1, убеждаемся, что ω_* есть изоморфизм группы $\Pi_q^{M,e,a}(X, A, x_0) = \Pi_q^{M,e}(X, A, x_0)$ на группу $\Pi_q^{M,e',a'}(X, A, x_0) = \Pi_q^{M,e'}(X, A, x_0)$. $\square$

В силу предложения 2 можно обозначение $\Pi_q^{M,e}(X, A, x_0)$ сократить до $\Pi_q^{M}(X, A, x_0)$.

Предложение 3. *Пусть M_1 и M_2 — два различных подпространства или надпространства пространства H одной и той же коразмерности $q \in \mathbb{Z}$. Тогда группы $\Pi_q^{M_1}(X, A, x_0)$ и $\Pi_q^{M_2}(X, A, x_0)$ изоморфны между собой.*

Доказательство. Случай $q=0$ очевиден. Если $q>0$, то $M_0 = M_1 \cap M_2$ имеет одинаковую конечную коразмерность $r>0$ в M_1 и M_2. Выберем в M_0 произвольный ортонормированный базис $\sigma = (a_j)$, $j \in J$, и дополним его посредством систем $e = b_1, b_2, \ldots, b_r$ и $e' = c_1, c_2, \ldots, c_r$ до ортонормированных базисов в M_1 и M_2 соответственно. Определим линейное обратимое отображение $\omega : M_2 \to M_1$ формулами $\omega(c_i) = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, и $\omega(a_j) = a_j$, $j \in J$. Изометрическое отображение ω принадлежит классу $K_0(H)$ и переводит тройку $(M_2, M_2 \setminus B^*(M_2),\ J^{e'}(M_2))$ в тройку $(M_1, M_1 \setminus B^*(M_1),\ J^2(M_1))$. Более того, оно порождает биективное отображение множества $F_q^{M_1,e}(X,A,x_0)$ на $F_q^{M_2,e'}(X,A,x_0)$ посредством $\varphi \to \varphi' = \varphi \circ \omega$, причем с сохранением K_0-гомотопии, т.е. из $\varphi \sim \psi$ следует $\varphi' \sim \psi'$. Тем самым порождается биективное отображение $\omega_* : \Pi_q^{M_1,e}(X,A,x_0) \to \Pi_q^{M_2,e'}(X,A,x_0)$. Выберем некоторый элемент $a \in \sigma$. Тогда $a \in (M_1)_e \cap (M_2)_{e'}$ и потому в силу предложений 1 и 2 будем иметь $\Pi_q^{M_1}(X,A,x_0) = \Pi_q^{M_1,e,a}(X,A,x_0)$ и $\Pi_q^{M_2}(X,A,x_0) = \Pi_q^{M_2,e',a}(X,A,x_0)$. Повторяя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательствах предложений 1 и 2, можно убедиться, что ω_* есть требуемый изоморфизм.

Пусть теперь $q<0$ и $\sigma = (a_j)$, $j \in J$, — ортонормированный базис H. Дополним этот базис посредством систем $b_1, b_2, \ldots, b_{|q|}$ и $c_1, c_2, \ldots, c_{|q|}$ до ортонормированных базисов в M_1 и M_2 соответственно. Далее, положив $\omega(c_i) = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, |q|$, и $\omega(a_j) = a_j$ при $j \in J$, получим принадлежащее классу K_0 линейное обратимое (изометрическое) отображение $\omega : M_2 \to M_1$. Повторяя такие же рассуждения, которые были приведены в первой части доказательства, получим биективное отображение $\omega_* : \Pi_q^{M_1}(X,A,x_0) \to \Pi_q^{M_2}(X,A,x_0)$. Наконец, выбирая вектор $a \in \sigma$ для сложения сфероидов, как и выше, убеждаемся, что ω_* есть требуемый изоморфизм. $\square$

Таким образом, при $q \in \mathbb{Z}$ с точностью до изоморфизма группа $\Pi_q^M(X,A,x_0)$ не зависит от выбора M. Поэтому ее можно обозначить через $\Pi_q(X,A,x_0)$. Построенную группу $\Pi_q(X,A,x_0)$ будем называть бесконечномерной (относительной) K_0-гомотопической группой (некомпактного типа) коразмерности $q \in \mathbb{Z}$ множества X в точке x_0 относительно подмножества A или пары (X,A) в точке x_0. В случае $A = \{x_0\}$ она называется (абсолютной) K_0-гомотопической группой коразмерности q множества X в точке x_0 и обозначается через $\Pi_q(X,x_0)$. В последнем случае K_0-сфероиды суть K_0-отображения $\varphi : (M, M \setminus B(M)) \to (X, x_0)$.

Перейдем к определению бесконечномерных K_0-гомотопических групп компактного типа.

Определение 4. K_0-сфероид $\varphi : (M, M \setminus B^*(M),\ J^e(M)) \to (X,A,x_0)$ коразмерности $q \in \mathbb{Z}$ пары (X,A) точки x_0 будем называть K_0-сфероидом компактного типа (короче K_0^c-сфероидом), если выполнено условие

c) для любого компактного множества $C \subset (X \setminus \{x_0\})$ множество $\varphi^{-1}(C) \cap B(M)$ компактно, и если оно непусто, то на нем терминальная производная $\lambda_\varphi(x)$ отображения φ отлична от нуля всюду.

Аналогично определяются K_0-гомотопия сфероидов $\Phi : I \times M \to X$ компактного типа (короче K_0^c-гомотопия сфероидов) и K_0^c-гомотопность двух K_0^c-сфероидов.

Все описанные выше конструкции проходят и в том случае, когда K_0-сфероиды и их K_0-гомотопии заменяются K_0^c-сфероидами и K_0^c-гомотопиями сфероидов соответственно. В результате строятся новые группы, которые будем называть бесконечномерными K_0-гомотопическими группами компактного типа (короче K_0^c-гомотопическими группами) и обозначать через $\Pi_q^c(X,A,x_0)$.

Наконец, если во всех вышеприведенных определениях и конструкциях вместо класса K_0 взять класс K, то получим группы другого типа, которые будем называть соответственно бесконечномерными K-гомотопическими группами и K-гомотопическими группами компактного типа пары (X,A) в точке x_0 и обозначать через $K\Pi_q(X,A,x_0)$ и $K\Pi_q^c(X,A,x_0)$ соответственно.

Замечание 1. Для полной ясности можно было бы группу $\Pi_q(X,A,x_0)$ обозначать через $\Pi_q(X,A,x_0;H)$. В этой связи отметим, что если гильбертово пространство H является подпространством конечной коразмерности $n \geq 0$ пространства H^*, то будем иметь $\Pi_q(X,A,x_0;H) \cong \Pi_{q+n}(X,A,x_0;H^*)$ при любом $q \in \mathbb{Z}$. Далее, если гильбертовы пространства H_1 и H_2 таковы, что пространство $H \subset H_1 \cap H_2$ имеет одну и ту же конечную коразмерность относительно H_1 и H_2 и $X \subset H$, то при любом $q \in \mathbb{Z}$ будем иметь $\Pi_q(X, A, x_0; H_1) \cong \Pi_q(X, A, x_0; H_2)$. Приведенные соотношения справедливы и для упомянутых выше гомотопических групп других типов.

3. Случай сепарабельного гильбертова пространства

В этом пункте гильбертово пространство H предполагается сепарабельным.

Пусть $\sigma = (e_n)$ — произвольный ортонормированный базис в H, а $S^q_\sigma, T^q_\sigma : H \to H$ — линейные ограниченные операторы, определяемые по формулам

$$S^q_\sigma(e_n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 1, 2, \dots, q; \\ e_{n-q} & \text{при } n = q+1, q+2, \dots, \end{cases} \tag{3}$$

$$T^q_\sigma(e_n) = e_{n+q} \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \dots \tag{4}$$

Ни одно из этих отображений не принадлежит классу K_0, но их композиции принадлежат. С помощью класса K_0 построим ряд других классов $K^{(q)}_\sigma$ (q — любое целое число) отображений подмножеств из H.

Определение 5. Пусть G открыто в H, а $f : G \to H$ — непрерывное отображение. Класс $K^{(q)}_\sigma$ при $q \geq 0$ будет состоять из таких f, которые можно представить в виде $f = \varphi \circ T^q_\sigma$, где φ определено на $T^q_\sigma(G)$ и принадлежит классу $K_0(H)$. При $q \leq 0$ $f \in K^{(q)}_\sigma$, если f можно представить в виде $f = S^{-q}_\sigma \circ \psi$, где $\psi \in K_0(H)$.

Сохраним некоторые обозначения п. 2, в частности, $B(H) = B$, $B^*(H) = B^*$ суть единичный замкнутый и открытый шар в H соответственно и

$$J^{e_1}(H) = \{x \in H : (x, e_1) \geq 0,\ x \notin L_{e_1} B^*(H_{e_1})\} \cup \{x \in H \setminus B^*(H) : (x_1, e_1) \leq 0\}.$$

Пусть снова (X, A, x_0) — фиксированная пунктированная пара подмножеств из H.

Определение 6. Отображение $f : (H, H \setminus B^*,\ J^{e_1}(H)) \to (X, A, x_0)$, принадлежащее классу $K^{(q)}_\sigma$, будем называть K_0-сфероидом второго рода коразмерности $q \in \mathbb{Z}$ пары (X, A) в точке x_0.

Множество всех таких сфероидов обозначим через $F^{\sigma,e}_q(X, A, x_0)$ и в нем введем операцию сложения, определив сумму $f + g$ по формуле

$$(f+g)(x) = \begin{cases} f(2x + e_2) & \text{при } (x, e_2) \leq 0; \\ g(2x - e_2) & \text{при } (x, e_2) \geq 0. \end{cases}$$

Далее, в $F^{\sigma,e_1}_q(X, A, x_0)$ введем отношение гомотопности. Пусть R — числовая прямая, I — ее единичный отрезок. В гильбертовом пространстве $H^* = R \times H$ рассмотрим ортонормированный базис $\sigma^* = (e_0, e_1, \dots, e_n, \dots)$, где $e_0 = (1, 0)$, а $\sigma = (e_n)$ — рассматриваемый выше базис в H.

Определение 7. Сфероиды $f, g \in F^{\sigma,e_1}_q(X, A, x_0)$ будем называть K_0-гомотопными и писать $f \simeq g$, если существует непрерывное отображение $F : I \times H \to X$, обладающее следующими свойствами:

1) F принадлежит классу $K^{(q)}_{\sigma^*}$;
2) для любого $t \in I$ отображение $f_t : H \to X$, определяемое равенством $f_t(x) = F(t, x)$, $x \in H$, принадлежит множеству $F^{\sigma,e_1}(X, A, x_0)$;
3) $f_0 = f$ и $f_1 = g$.

Отображение F, а также соответствующее семейство (f_t) называются K_0-гомотопией сфероидов второго рода, соединяющей f и g.

Отношение $f \simeq g$ есть отношение эквивалентности и, следовательно, $F_q^{\sigma,e_1}(X,A,x_0)$ разбивается на классы эквивалентности (гомотопические классы), множество которых обозначим через $\Pi_q^\sigma(X,A,x_0)$. Оказывается, что если $f \simeq f'$ и $g \simeq g'$, а (f_t) и (g_t) — K_0-гомотопии сфероидов, соединяющие f с f' и g с g' соответственно, то $(f_t + g_t)$ будет K_0-гомотопией сфероидов, соединяющей $f+g$ с $f'+g'$. Это означает, что операцию сложения сфероидов можно корректно перенести на гомотопические классы, положив $[f]+[g]=[f+g]$.

Теорема 2. *Множество $\Pi_q^\sigma(X,A,x_0)$ относительно операции сложения $[f]+[g]=[f+g]$ образует коммутативную группу.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Отметим лишь, что нулевым элементом также служит гомотопический класс постоянного сфероида, а противоположным элементом для $[f]$ служит класс $[\overline{f}]$, где $\overline{f} \in F_q^{\sigma,e_1}(X,A,x_0)$ — сфероид, симметричный сфероиду f относительно гиперплоскости Γ_0, определяемой уравнением $xe_1=0$, т. е. $f(x)=\overline{f}(y)$ при выполнении условий $(x+y)\in\Gamma_0$, $(x-y)\perp\Gamma_0$.

Группу $\Pi_q^\sigma(X,A,x_0)$ будем называть бесконечномерной K_0-гомотопической группой второго рода пары (X,A) в точке x_0.

Пусть $M^* = R^q \times H_1$, $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_q^*)$ — канонический базис в евклидовом пространстве R^q и $\sigma^* = (e_1^*, \dots, e_q^*, e_1, \dots, e_n, \dots)$, где $\sigma = (e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ — рассматриваемый выше ортонормированный базис в H. Ясно, что σ^* — ортонормированный базис в M^*. Рассмотрим линейные ограниченные операторы $S_{\sigma^*}^q, T_{\sigma^*}^q : M^* \to M^*$, определенные в базисе σ^* по формулам (3) и (4).

Лемма. *Для того чтобы отображение $f : H \to H$ при $q<0$ имело вид $f = S_\sigma^{-q}\circ\varphi$, где $\varphi \in K_0(H)$, необходимо и достаточно, чтобы f можно было представить в виде $f=\varphi^*\circ S_{\sigma^*}^{-q}$, где $\varphi^*\in K_0(M^*)$.*

Доказательство. Необходимость. Так как для каждой точки $x \in H$ $(T_{\sigma^*}^{-q}\circ S_{\sigma^*}^{-q})(x) = x$, то $f = S_\sigma^{-q}\circ\varphi = S_\sigma^{-q}\circ\varphi\circ T_{\sigma^*}^{-q}\circ S_{\sigma^*}^{-q} = \varphi^*\circ S_{\sigma^*}^{-q}$, где $\varphi^* = S_\sigma^{-q}\circ\varphi\circ T_{\sigma^*}^{-q}$. Покажем, что отображение $\varphi^* : M \to H$ принадлежит $K_0(M^*)$.

Пусть x_0^* — произвольная точка из M^* и $\varepsilon > 0$. Положим $x_0 = T_{\sigma^*}^{-q}(x_0^*)$; в силу $\varphi \in K_0(H)$ существуют окрестность U точки x_0 в H, конечномерное подпространство $L_n \subset H$, натянутое на первые n векторов базиса σ, и числа λ такие, что если $x,y\in U$ и $x-y\perp L_n$, то

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)-\lambda(x-y)\| \le \varepsilon\|x-y\|. \tag{5}$$

Положим $U^* = S_{\sigma^*}^{-q}(U)$ и $L^* = S_{\sigma^*}^{-q}(L_n)\cup L'$, где L' — подпространство M^*, натянутое на первые $2q$ векторов базиса σ^*. Ясно, что U^* — окрестность точки x_0 в M^*. Пусть $x^*, y^* \in U^*$ такие, что $x^*-y^*\perp L^*$. Тогда

$$\begin{gathered}\|\varphi^*(x^*)-\varphi^*(y^*)-\lambda(x^*-y^*)\| = \\ = \|(S_\sigma^{-q}\circ\varphi\circ T_{\sigma^*}^{q})(x^*) - (S_\sigma^{-q}\circ\varphi\circ T_{\sigma^*}^{-q})(y^*) - \lambda[(S_{\sigma^*}^{-q}\circ T_{\sigma^*}^{-q})(x^*) - (S_{\sigma^*}^{-q}\circ T_{\sigma^*}^{-q})(y^*)]\| = \\ = \|(S_\sigma^{-q}\circ\varphi\circ T_{\sigma^*}^{-q})(x^*) - (S_\sigma^{-q}\circ\varphi\circ T_{\sigma^*}^{-q})(y^*) - S_\sigma^{-q}[\lambda(T_{\sigma^*}^{-q}(x^*) - T_{\sigma^*}^{-q}(y^*))]\| \le \\ \le \|\varphi(T_{\sigma^*}^{-q}(x)) - \varphi(T_{\sigma^*}^{-q}(y^*)) - \lambda(T_{\sigma^*}^{-q}(x^*) - T_{\sigma^*}^{-q}(y^*))\| \le \varepsilon\|T_{\sigma^*}^{-q}(x^*) - T_{\sigma^*}^{-q}(y^*)\| = \varepsilon\|x^*-y^*\|.\end{gathered}$$

Здесь принято во внимание (5) и то, что $T_{\sigma^*}^{-q}(x^*), T_{\sigma^*}^{-q}(y^*) \in U$ и $(T_{\sigma^*}^{-q}(x^*) - T_{\sigma^*}^{-q}(y^*))\perp L_n$. Итак, условие a) принадлежности φ^* к $K_0(M^*)$ выполнено. Выполнение же условия b) следует из того, что φ^* есть композиция трех отображений, локально удовлетворяющих условию Липшица.

Достаточность. Пусть теперь $f = \varphi^*\circ S_{\sigma^*}^{-q}$, где $\varphi^* : M^* \to H$ принадлежит $K_0(M^*)$. Так как $S_\sigma^{-q}\circ T_\sigma^{-q} = \mathrm{id}_H$, то $f = S_\sigma^{-q}\circ T_\sigma^{-q}\circ\varphi\circ S_{\sigma^*}^{-q} = S_\sigma^{-q}\circ\varphi$, где $\varphi = T_\sigma^{-q}\circ\varphi^*\circ S_{\sigma^*}^{-q}$. Повторяя рассуждения, аналогичные предыдущим, докажем, что $\varphi\in K_0(H)$. $\square$

Теорема 3. *В случае сепарабельного гильбертова пространства H оба подхода к построению бесконечномерных K_0-относительных гомотопических групп равносильны, т. е. для любого $q \in \mathbb{Z}$ и каждой пунктированной пары (X, A, x_0) из H группы $\Pi_q^\sigma(X, A, x_0)$ и $\Pi_q^M(X, A, x_0)$ изоморфны между собой при любом выборе ортонормированного базиса σ и подпространства (соответственно надпространства) M коразмерности q пространства H.*

Доказательство. Рассмотрим случай $q \geq 0$. Пусть $\sigma = (e_n)$, а $\widetilde{M}$ — подпространство, натянутое на векторы $e_{q+1}, e_{q+2}, \ldots, e_{q+n}, \ldots$ Так как $T_\sigma^q : (H, H \setminus B^*,\ J^{e_1}(H)) \cong (\widetilde{M}, \widetilde{M} \setminus B^*(\widetilde{M}),\ J^{e_{q+1}}(\widetilde{M}))$ и $S_\sigma^q : (\widetilde{M}, \widetilde{M} \setminus B^*(\widetilde{M}),\ J^{e_{q+1}}(\widetilde{M})) \cong (H, H \setminus B^*,\ J^{e_1}(H))$, то соответствия $\varphi \to \varphi \circ T_\sigma^q$ и $\varphi \circ T_\sigma^q \to (\varphi \circ T_\sigma^q) \circ S_\sigma^q = \varphi$ порождают взаимно обратные отображения (обозначаемые теми же символами $(T_\sigma^q,\ S_\sigma^q)$

$$T_\sigma^q : F_q^{\widetilde{M}, e_{q+1}}(X, A, x_0) \to F_q^{\sigma, e_1}(X, A, x_0)$$

и

$$S_\sigma^q : F_q^{\sigma, e_1}(X, A, x_0) \to F_q^{\widetilde{M}, e_{q+1}}(X, A, x_0).$$

При этих отображениях сохраняется гомотопность сфероидов, т. е. $(\varphi \simeq \psi) \Leftrightarrow (\varphi \circ T_\sigma^q \simeq \psi \circ T_\sigma^q)$. В результате возникают взаимно обратные отображения $(T_\sigma^q)_* : \Pi_q^{\widetilde{M}, e_{q+1}}(X, A, x_0) \to \Pi_q^{\sigma, e_1}(X, A, x_0)$ и $(S_\sigma^q)_* : \Pi_q^{\sigma, e_1}(X, A, x_0) \to \Pi_q^{\widetilde{M}, e_{q+1}}(X, A, x_0)$. Для операции сложения сфероидов, выбрав соответственно векторы e_{q+2} и e_2, можем убедиться в том, что отображения $(T_\sigma^q)_*$ и $(S_\sigma^q)_*$ являются взаимно обратными изоморфизмами, т. е. $(T_\sigma^q)_* : \Pi_q^{\widetilde{M}}(X, A, x_0) = \Pi_q^{\widetilde{M}, e_{q+1}, e_{q+2}}(X, A, x_0) \cong \Pi_q^\sigma(X, A, x_0) = \Pi_q^{\sigma, e_1, e_2}(X, A, x_0)$ есть изоморфизм.

Пусть теперь $q < 0$ и пусть $M^* = R^{|q|} \times H$ и $\sigma^* = (e_1^*, \ldots, e_{|q|}^*, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ — ортонормированный базис в M^*, получаемый дополнением базиса σ, а $T_{\sigma^*}^{-q}, S_{\sigma^*}^{-q} : M^* \to M^*$ — линейные операторы, определенные в базисе σ^* по формулам (3), (4). Принимая во внимание доказанную выше лемму и повторяя рассуждения, аналогичные приведенным выше, убеждаемся в том, что операторы $T_{\sigma^*}^{-q}$, $S_{\sigma^*}^{-q}$ порождают взаимно обратные изоморфизмы между группами $\Pi_q^{M^*}(X, A, x_0)$ и $\Pi_q^\sigma(X, A, x_0)$.

Пусть теперь базис σ и подпространство (соответственно надпространство) M коразмерности $q \in \mathbb{Z}$ пространства H произвольны и $q \geq 0$. Обозначим через $\widetilde{M}$ подпространство, натянутое на базисные векторы $e_{q+1}, e_{q+2}, \ldots, e_{q+n}, \ldots$ Тогда по доказанному будем иметь $\Pi_q^\sigma(X, A, x_0) \cong \Pi_q^{\widetilde{M}}(X, A, x_0)$, а в силу предложения 3 имеет место изоморфизм $\Pi_q^{\widetilde{M}}(X, A, x_0) \cong \Pi_q^M(X, A, x_0)$.

Если же $q < 0$, то аналогично будем иметь $\Pi_q^\sigma(X, A, x_0) \cong \Pi_q^{M^*}(X, A, x_0) \cong \Pi_q^M(X, A, x_0)$. $\square$

Следствие. При любом $q \in \mathbb{Z}$ группа $\Pi_q^\sigma(X, A, x_0)$ с точностью до изоморфизма не зависит от выбора ортонормированного базиса σ пространства H.

В самом деле, пусть σ_1 и σ_2 — два ортонормированных базиса в H и M — произвольное подпространство (соответственно надпространство) коразмерности q пространства H. В силу теоремы 3 имеют место изоморфизмы

$$\Pi_q^{\sigma_1}(X, A, x_0) \cong \Pi_q^M(X, A, x_0) \cong \Pi_q^{\sigma_2}(X, A, x_0).$$

В случае сепарабельного гильбертова пространства H каждую из изоморфных групп $\Pi_q^\sigma(X, A, x_0)$ и $\Pi_q^M(X, A, x_0)$ будем называть бесконечномерной K_0-гомотопической группой коразмерности $q \in \mathbb{Z}$ пары (X, A) в точке x_0.

Замечание 2. Как и в п. 2, строятся бесконечномерные K_0-гомотопические группы второго рода компактного типа, а также бесконечномерные K-гомотопические группы второго рода как некомпактного, так и компактного типов.

Замечание 3. Теорема 3 остается справедливой и для бесконечномерных K_0-гомотопических групп второго рода компактного типа, а также для бесконечномерных K-гомотопических групп второго рода как для некомпактного, так и для компактного типов.

Литература

1. Болтянский В.Г. *Об одном классе отображений подмножеств гильбертова пространства* // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. – 1974. – Т. 9. – № 2. – С. 107–120.
2. Крейн М.Н. *Полудифференцируемые фредгольмовы отображения* // В кн. "Уравнения на многообразиях". – Воронеж: Изд-во Воронежск. ун-та, 1982. – С. 115–118.
3. Крейн М.Н. *Полудифференцируемые отображения и их топологические свойства.* – Воронежск. ун-т. – Воронеж, 1979. – Деп. в ВИНИТИ 18.06.79, № 2177-79.
4. Болтянский В.Г., Мирзаханян Э.А. *Построение степени отображения в гильбертовом пространстве* // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. – 1974. – Т. 9. – № 5. – С. 374–386.
5. Мирзаханян Э.А. *О свойствах одного класса отображений подмножеств гильбертова пространства* // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. – 1980. – Т. 15. – № 5. – С. 349–356.
6. Мирзаханян Э.А. *О некоторых классах непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства.* I // Учен. зап. Ереванск. ун-та. – 1990. – № 3. – С. 21–28.
7. Мирзаханян Э.А. *О некоторых классах непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства.* II // Учен. зап. Ереванск. ун-та. – 1991. – № 1. – С. 3–9.
8. Мирзаханян Э.А. *Модифицированные ретракты в гильбертовом пространстве* // Изв. Национал. АН Армении. Сер. матем. – 1998. – Т. 33. – № 6. – С. 10–28.
9. Мирзаханян Э.А. *Построение бесконечномерных гомотопических групп* // Изв. АН АрмССР. – 1973. – Т. 8. – № 3. – С. 212–225.
10. Мирзаханян Э.А. *О некоторых свойствах бесконечномерных гомотопических групп подмножеств гильбертова пространства* // ДАН АрмССР. – 1984. – Т. 79. – № 1. – С. 15–17.
11. Мирзаханян Э.А. *Об одном бесконечномерном обобщении теоремы Брауэра о неподвижной точке* // Учен. зап. Ереванск. ун-та. – 1987. – № 1. – С. 14–17.
12. Мирзаханян Э.А. *О бесконечномерных аналогах для гильбертова пространства некоторых классических теорем Борсука* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 3. – С. 29–34.
13. Рышков С.С. *Об одном классе непрерывных отображений некоторых бесконечномерных множеств* // ДАН СССР. – 1957. – Т. 114. – № 5. – С. 961–963.
14. Фрум-Кетков Р.Л. *Об отображениях в гильбертовом пространстве* // ДАН СССР. – 1970. – Т. 192. – № 6. – С. 1231–1234.
15. Лерей Ж., Шаудер Ю. *Топология и функциональные уравнения* // УМН. – 1946. – Т. 1. – Вып. 3–4. – С. 71–95.

Ереванский государственный университет

Поступила 16.06.2000