ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 10 (485)

УДК 517.968:519.6

Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ

РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ БОГОЛЮБОВА–КРЫЛОВА

Введение

В конце двадцатых – начале тридцатых годов двадцатого столетия для решения граничных интегральных уравнений Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым (см., напр., в [1]) был предложен оригинальный прямой метод. В последующие годы этот метод широко применялся и продолжает применяться для решения различных классов интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Краткий обзор соответствующих исследований и изложение ряда полученных результатов имеется, например, в [2]–[7].

Несмотря на простоту метода и его широкое применение на практике, до сих пор нет его строгого теоретического обоснования. Доказательство же сходимости метода, предложенное его авторами — академиками Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым для граничных интегральных уравнений, пригодно лишь при очень жестких ограничениях на исходные данные.

Ниже предлагается строгое теоретико-функциональное обоснование метода Н.Н. Боголюбова–Н.М. Крылова для операторных уравнений второго рода в нормированных пространствах. При этом существенным образом используются общая теория приближенных методов академика Л.В. Канторовича и приближения сплайнами минимальных степеней. Полученные общие результаты применяются к различным классам регулярных и сингулярных интегральных уравнений.

1. Общая операторная схема метода Боголюбова–Крылова и ее обоснование

Пусть $M = M[a,b]$ и $C[a,b]$ — пространства всех ограниченных и соответственно непрерывных на сегменте $[a,b]$ функций с нормами

$$\|\varphi\|_M = \sup_{a\le t\le b}|\varphi(t)|,\quad \varphi\in M;\qquad \|f\|_C = \max_{a\le t\le b}|f(t)|,\quad f\in C.$$

На $[a,b]$ введем системы узлов

$$t_k = a + k\frac{b-a}{n},\qquad k=\overline{0,n},\quad n\in\mathbb{N},\tag{1.1}$$

$$\overline{t}_k = a + \left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n},\quad k=\overline{1,n}.\tag{1.2}$$

Обозначим через $\psi_k(t)=\psi_{k,n}(t)$, $k=\overline{1,n}$, фундаментальные сплайны нулевой степени по сетке узлов (1.1):

$$\begin{aligned}&\psi_k(t) = \{1 \text{ при } t\in[t_{k-1},t_k);\ \ 0 \text{ при } t\notin[t_{k-1},t_k)\},\quad k=\overline{1,n-1};\\ &\psi_n(t) = \{1 \text{ при } t\in[t_{n-1},t_n];\ \ 0 \text{ при } t\notin[t_{n-1},t_n]\}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Рассмотрим линейное операторное уравнение вида

$$Ax \equiv x(t) - B(x;t) = y(t)\quad (x,y\in M),\tag{1.4}$$

где $B : M \to C$ — непрерывный оператор. Его приближенное решение будем искать в виде сплайна нулевой степени

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \psi_k(t), \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \le t \le b, \tag{1.5}$$

коэффициенты которого будем определять из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\alpha_j - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, B(\psi_k; \bar{t}_j) = y(\bar{t}_j), \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.6}$$

Кроме функции (1.5), за приближенное решение уравнения (1.4) будем использовать также функцию

$$\overline{x}_n(t) = y(t) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, B(\psi_k; t), \quad a \le t \le b, \tag{1.7}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — решение СЛАУ (1.6).

Следует отметить, что в случае, когда B есть интегральный оператор Фредгольма, например,

$$B(x; t) = \int_a^b h(t, \tau) x(\tau) \, d\tau, \quad x \in M, \tag{1.8}$$

причем функции $y(t) \in C^{(2)}[a, b]$, $h(t, \tau) \in C^{(2)}[a, b]^2$ и являются периодическими по каждой из переменных с периодом $b - a$, вычислительная схема (1.1)–(1.3), (1.6)–(1.8) является схемой метода Боголюбова–Крылова для интегрального уравнения Фредгольма второго рода (см., напр., [2], с. 143–148); более подробно об этом речь будет идти ниже.

Приведем теоретическое обоснование метода (1.1)–(1.7) в смысле ([8], гл. 14 и [9], гл. 1).

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия*:

а) $y \in C[a, b]$, *а* $B : M[a, b] \to C[a, b]$ — *вполне непрерывный оператор*;

б) *уравнение* (1.4) *имеет единственное решение* $x^* \in M$ *при любой правой части* $y \in M$.

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$, *начиная с некоторого* $n_0 \in \mathbb{N}$ (n_0 *определяется свойствами оператора* B), *СЛАУ* (1.6) *имеет единственное решение* $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$. *Приближенные решения*

$$x_n^*(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* \, \psi_k(t), \qquad a \le t \le b, \tag{1.5*}$$

$$\overline{x}_n^*(t) = y(t) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* \, B(\psi_k; t), \quad a \le t \le b, \tag{1.7*}$$

сходятся к точному решению $x^*(t)$ *в пространствах соответственно* $M[a, b]$ *и* $C[a, b]$ *со скоростями*

$$\|x^* - x_n^*\|_M = O\{\|x^* - P_n x^*\|_M\}, \tag{1.9}$$

$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_C = O\{\|B(x^* - P_n x^*)\|_C\}, \tag{1.10}$$

где

$$P_n(\varphi; t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\bar{t}_k) \, \psi_k(t), \quad \varphi \in C[a, b]. \tag{1.11}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в условиях теоремы решение $x^* \in M$ уравнения (1.4) удовлетворяет условию $x^* \in C$, поэтому в формулах (1.9) и (1.10) сплайн $P_n(x^*;t)$ согласно (1.11) имеет смысл; кроме того, функция $\overline{x}_n(t)$ из (1.7), а следовательно, и функция $\overline{x}_n^*(t)$ (в случае разрешимости СЛАУ (1.6)) являются непрерывными на сегменте $[a,b]$.

Положим $X = M[a,b]$ и обозначим через X_n множество всех сплайнов вида (1.5). Ясно, что $X_n \subset X$ и $\dim X_n = n < \infty$. Тогда СЛАУ (1.6) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv x_n - P_n B x_n = P_n y \quad (x_n, P_n y \in X_n), \tag{1.12}$$

где оператор P_n определяется по формуле (1.11).

Покажем, что уравнения (1.12) аппроксимируют точное уравнение (1.4) в смысле ([9], гл. 1). Для их правых частей в силу условия $y \in C$ имеем (см., напр., [10])

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\|_X \le \omega\left(y; \frac{b-a}{2n}\right) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{1.13}$$

где $\omega(\varphi;\delta)$ — модуль непрерывности функции $\varphi \in C[a,b]$ с шагом $\delta \in (0, b-a]$.

Из (1.4) и (1.12) для любого $x_n \in X_n, x_n \ne 0$, находим

$$\begin{aligned} \|Ax_n - A_n x_n\|_X &= \|Bx_n - P_n B x_n\|_X = \|x_n\|_X \|Bz_n - P_n B z_n\|_X \le \\ &\le \|x_n\|_X \sup_{z_n \in X_n, \|z_n\| \le 1} \|Bz_n - P_n B z_n\|_X \le \|x_n\|_X \sup_{z \in X, \|z\| \le 1} \|Bz - P_n B z\|_X \le \varepsilon_n' \, \|x_n\|_X, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где

$$\varepsilon_n' = \sup_{\varphi \in BS(0,1)} \|\varphi - P_n \varphi\|_X, \quad z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, \quad S(0,1) = \{x \in X : \|x\| \le 1\}. \tag{1.15}$$

В силу (1.13) операторы $P_n : C \to M$ сильно сходятся к оператору вложения $\widetilde{E} : C \to M$, а в силу условия а) теоремы множество $BS(0,1)$ является компактным в пространстве $C[a,b]$. А тогда по теореме И.М. Гельфанда (см., напр., [8], с. 274–276) из (1.13)–(1.15) находим

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to X} \le \varepsilon_n' \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.16}$$

В условиях теоремы оператор A непрерывно обратим в пространстве X. Поэтому в силу (1.13), (1.15) и (1.16) для уравнений (1.4) и (1.12) выполнены все условия теоремы 7 ([9], гл. 1), согласно которой при всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что

$$q_n \equiv \|A^{-1}\| \, \varepsilon_n \le \|A^{-1}\| \, \varepsilon_n' < 1, \tag{1.17}$$

уравнение (1.12), а следовательно, и эквивалентная ему СЛАУ (1.6) однозначно разрешимы, при этом

$$\|A_n^{-1}\| \le \|A^{-1}\| \, (1 - q_n)^{-1} = O(1), \qquad n \to \infty, \tag{1.18}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_X = \|A^{-1}y - A_n^{-1} P_n y\|_X = O(\varepsilon_n + \delta_n) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.19}$$

Тогда в силу ([9], гл. 1, следствие 2 теоремы 6) для погрешности приближенной формулы $x^*(t) \approx x_n^*(t)$ справедливы тождества

$$x^* - x_n^* = (E - A^{-1} P_n A)(x^* - \widetilde{x}_n) = (E + A_n^{-1} P_n B)(x^* - P_n x^*), \tag{1.20}$$

где $\widetilde{x}_n$ — произвольный элемент из X_n, а E — единичный оператор пространства X. Поэтому из (1.18) и (1.20) находим

$$\|x^* - x_n^*\|_X \le \left(1 + \|A_n^{-1} P_n B\|_{X \to X}\right) \|x^* - P_n x^*\|_X = O\{\|P_n\|_{C \to M} \|x^* - P_n x^*\|_X\}. \tag{1.21}$$

Легко показать, что операторы $P_n : C \to M$, определенные согласно (1.11), ограничены по норме в совокупности, точнее,

$$\|P_n\|_{C \to M} = 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.22}$$

Из соотношений (1.19)–(1.22) следует оценка (1.9).

В силу (1.4), (1.12) и (1.7*) справедливы тождества

$$x^* \equiv y + Bx^*, \quad x_n^* \equiv P_n y + P_n B x_n^*, \quad \overline{x}_n^* \equiv y + Bx_n^*. \tag{1.23}$$

Из (1.23) находим

$$x^* - \overline{x}_n^* = B(x^* - x_n^*) = B(x^* - P_n x^*) + B(P_n x^* - x_n^*). \tag{1.24}$$

Из тождества (1.20) видно, что

$$P_n x^* - x_n^* = A_n^{-1} P_n B(x^* - P_n x^*). \tag{1.25}$$

Из (1.24) и (1.25) следует

$$x^* - \overline{x}_n^* = B(x^* - P_n x^*) + BA_n^{-1} P_n B(x^* - P_n x^*) = (E + BA_n^{-1} P_n)\, B(x^* - P_n x^*). \tag{1.26}$$

Из соотношений (1.18), (1.22) и (1.26) находим оценку (1.10)

$$\begin{aligned}\|x^* - \overline{x}_n^*\|_C \le \|E + BA_n^{-1} P_n\|_{C\to C} \|B(x^* - P_n x^*)\|_C \le \\ \le \left\{1 + \|B\|_{X\to X}\, \|A_n^{-1}\|_{X_n\to X_n}\, \|P_n\|_{C\to M}\right\} \|B(x^* - P_n x^*)\|_C = \\ = O(1)\|B(x^* - P_n x^*)\|_C = O\{\|B(x^* - P_n x^*)\|\}. \quad \square\end{aligned}$$

Как видно из хода доказательства теоремы 1.1, СЛАУ (1.6) разрешима, а следовательно, формулы (1.5*), (1.7*) имеют смысл лишь при $n > n_0$, где $n_0 \in \mathbb{N}$ определяется как наименьшее из решений первой части неравенств (1.17). Этого недостатка лишена следующая

Теорема 1.2. *Если*

$$\|B\|_{M\to C} \le q < 1, \tag{1.27}$$

то как точное уравнение (1.4), *так и аппроксимирующая его СЛАУ* (1.6) *при любых* $n \in \mathbb{N}$ *однозначно разрешимы. Для погрешности метода* (1.1)–(1.7) *при любых* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки*

$$\|x^* - x_n^*\|_M \le \frac{\|x^* - P_n x^*\|_M}{1 - q}, \tag{1.28}$$

$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_C \le \frac{\|B(x^* - P_n x^*)\|_C}{1 - q}. \tag{1.29}$$

Доказательство. В силу (1.27) оператор $A : M \to M$ непрерывно обратим и

$$\|A^{-1}\| \le (1 - q)^{-1}, \quad A : X \to X. \tag{1.30}$$

С другой стороны, благодаря (1.12), (1.22) и (1.27) для любых $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|P_n B\|_{X_n \to X_n} \le \|B\|_{X\to X} \le q < 1. \tag{1.31}$$

Поэтому операторы $A_n : X_n \to X_n$ непрерывно обратимы при любых $n \in \mathbb{N}$ и

$$\|A_n^{-1}\| \le (1 - q)^{-1}, \quad A_n : X_n \to X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.32}$$

В силу (1.30) и (1.32) первая часть теоремы доказана. Для доказательства второй ее части воспользуемся формулами (1.20), (1.22), (1.26), (1.27), (1.30)–(1.32). Тогда последовательно находим оценки соответственно (1.28) и (1.29)

$$\|x^* - x_n^*\|_M \le (1 + \|A_n^{-1}\|\,\|P_n\|\,\|B\|)\,\|x^* - P_n x^*\|_M \le$$
$$\le \left(1 + \frac{q}{1-q}\right)\|x^* - P_n x^*\|_M = \frac{\|x^* - P_n x^*\|_M}{1-q};$$
$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_C \le \|E + BA_n^{-1}P_n\|_{C\to C}\|B(x^* - P_n x^*)\|_C \le$$
$$\le \left(1 + \frac{q}{1-q}\right)\|B(x^* - P_n x^*)\|_C = \frac{\|B(x^* - P_n x^*)\|_C}{1-q}. \quad \square$$

Теоремы 1.1 и 1.2 несколько дополняет

Теорема 1.3. *Пусть $Y \subset BM$ — такое линейное нормированное пространство, что операция вложения $\widetilde{E} : Y \to C$ является непрерывной. Тогда в условиях любой из теорем* 1.1 *и* 1.2 *метод Боголюбова–Крылова* (1.1)–(1.4), (1.6), (1.7), (1.7*) *сходится в пространстве Y со скоростью*

$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_Y = O\{\|x^* - P_n x^*\|_M\} = O\left\{\omega\left(x^*; \frac{b-a}{2n}\right)\right\}. \tag{1.33}$$

Доказательство. В условиях теоремы 1.1 (при любых $n \ge n_0 \in \mathbb{N}$) и теоремы 1.2 (при любых $n \in \mathbb{N}$) справедливо тождество (1.26), согласно которому

$$x^* - \overline{x}_n^* = B(E + A_n^{-1}P_n B)(x^* - P_n x^*) \in Y. \tag{1.34}$$

Из (1.34) и неравенств, полученных в ходе доказательства теорем 1.1 и 1.2, находим оценки (1.33)

$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_Y \le \|B\|_{X\to Y}\|E + A_n^{-1}P_n B\|_{X\to X}\|x^* - P_n x^*\|_X =$$
$$= O(\|x^* - P_n x^*\|_M) = O\left\{\omega\left(x^*; \frac{b-a}{2n}\right)\right\}. \quad \square$$

В заключение параграфа приведем одно из возможных обобщений метода Боголюбова–Крылова.

Пусть $X = \{x\}$ — полное линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим в нем линейное операторное уравнение

$$Ax \equiv x - Bx = y \quad (x, y \in X). \tag{1.35}$$

Его приближенное решение будем искать в виде элемента

$$\overline{x}_n = y + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k B\varphi_k, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{1.36}$$

неизвестные коэффициенты $\alpha_k \in \mathbb{R}$ будем определять из СЛАУ

$$\alpha_j - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_j(B\varphi_k) = f_j(y), \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.37}$$

где $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — полная линейно независимая система элементов из X, а $\{f_j\}_1^\infty$ — биортогональная к ней система линейно независимых функционалов.

Для вычислительной схемы (1.35)–(1.37) справедлива

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия*:

а) B — *вполне непрерывный оператор в* X;
б) *уравнение* (1.35) *однозначно разрешимо в B-пространстве* X;
в) *в X существует полная линейно независимая система элементов* $\{\varphi_k\}_1^\infty$.

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого, СЛАУ (1.37) имеет единственное решение $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$; приближенные решения

$$\overline{x}_n^* = y + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* B\varphi_k \in X, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.36*}$$

сходятся к решению $x^* \in X$ уравнения (1.35) со скоростью

$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_X = O\{\|B(x^* - P_n x^*)\|_X\}, \tag{1.38}$$

где

$$P_n f = \sum_{j=1}^{n} f_j(f)\varphi_j, \quad f \in X, \ f_j \in X^*. \tag{1.39}$$

Доказательство. Пусть X_n — линейная оболочка, натянутая на элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Тогда $X_n \subset X$ и $\dim X_n = n \in \mathbb{N}$. Оператор проектирования X на X_n введем по формуле (1.39). Тогда СЛАУ (1.37) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv x_n - P_n B x_n = P_n y \quad (x_n, P_n y \in X_n) \tag{1.40}$$

в подпространстве $X_n \subset X$. Очевидно, $P_n^2 = P_n$ и $P_n \to E$, $n \to \infty$, сильно в пространстве линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$. Поэтому из ([8], гл. 14, § 1, теорема 6) с учетом условий а)–в) получим, что операторы $A_n : X_n \to X_n$ линейно обратимы, а обратные операторы ограничены по норме в совокупности:

$$\|A_n^{-1}\| = O(1), \quad A_n^{-1} : X_n \to X_n; \tag{1.41}$$

кроме того, элементы $x_n^* = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^* \varphi_k \to x^*$, $n \to \infty$, в пространстве X со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{\|x^* - P_n x^*\|_X\}. \tag{1.42}$$

Поскольку в силу (1.35) и (1.36*) имеем $x^* - \overline{x}_n^* = B(x^* - x_n^*)$, то из (1.40)–(1.42) и условий теоремы находим требуемое утверждение, в том числе оценку (1.38). □

2. Решение интегральных уравнений с непрерывными и гладкими ядрами методом Боголюбова–Крылова

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$Ax \equiv x(t) - \int_a^b h(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = y(t), \quad a \le t \le b, \tag{2.1}$$

где $x(t)$ — искомая функция, $y(t)$ — известная непрерывная функция, а ядро $h(t,\tau)$ таково, что порождаемый им интегральный оператор $B : M \to C$ из (1.8) является либо малым по норме (тогда применима теорема 1.2), либо вполне непрерывным (тогда применима доказанная выше теорема 1.1). Например, из теоремы 1.1 легко выводится

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия*:

а) *функции $h(t,\tau) \in C[a,b]^2$ и $y(t) \in C[a,b]$*;

б) *уравнение* (2.1) *однозначно разрешимо в пространстве $M[a,b]$*.

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что

$$q_n \equiv \|A^{-1}\|\,\omega_t\Big(h; \frac{b-a}{2n}\Big)\,(b-a) < 1, \tag{2.2}$$

СЛАУ метода Боголюбова–Крылова

$$\alpha_j - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} h(\overline{t}_j, \tau)\, d\tau = y(\overline{t}_j), \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.3}$$

имеет единственное решение $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$. *Приближенные решения*

$$x_n^*(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* \psi_k(t), \quad a \le t \le b, \tag{2.4}$$

$$\overline{x}_n^*(t) = y(t) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* \int_{t_{k-1}}^{t_k} h(t, \tau)\, d\tau \tag{2.5}$$

сходятся к точному решению $x^* = A^{-1} y \in C$ *со скоростями соответственно*

$$\|x^* - x_n^*\|_M = O\{\|x^* - P_n x^*\|_M\} = O\Big\{\omega_t\Big(h; \frac{b-a}{2n}\Big) + \omega\Big(y; \frac{b-a}{2n}\Big)\Big\}, \tag{2.6}$$

$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_C = O\{\|B(x^* - P_n x^*)\|_C\} = O\Big\{\omega_t\Big(h; \frac{b-a}{2n}\Big) + \omega\Big(y; \frac{b-a}{2n}\Big)\Big\}, \tag{2.7}$$

где $\omega_t(h; \delta)$ — *частный модуль непрерывности функции* $h(t, \tau)$ *по переменной* $t \in [a, b]$ *с шагом* $\delta \in (0, b-a]$ *равномерно относительно* $\tau \in [a, b]$.

Следствие. Если функции h (по t) и $y \in \mathrm{Lip}\, \alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$, то

$$\|x^* - x_n^*\|_M = O\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big), \quad \|x^* - \overline{x}_n^*\|_C = O\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big);$$

если же существуют ограниченные производные $\frac{\partial h(t,\tau)}{\partial t}$ и $\frac{dy(t)}{dt}$, то

$$\|x^* - x_n^*\|_M = O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \|x^* - \overline{x}_n^*\|_C = O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Доказательство. В рассматриваемом случае оператор $B : M \to C$ является вполне непрерывным, а решение уравнения (2.1) удовлетворяет условию

$$x^*(t) = y(t) + \int_a^b h(t, \tau) x^*(\tau)\, d\tau \in C[a, b]. \tag{2.8}$$

Поэтому в силу (1.13) находим (при $\delta = \frac{b-a}{2n}$)

$$\|x^* - P_n x^*\|_M \le \omega(x^*; \delta) \le \omega(y; \delta) + \omega\Big(\int_a^b h(t, \tau) x^*(\tau)\, d\tau; \delta\Big) \le$$

$$\le \omega(y; \delta) + (b-a)\, \omega_t(h; \delta)\, \|x^*\|_C = O\Big\{\omega\Big(y; \frac{b-a}{2n}\Big) + \omega_t\Big(h; \frac{b-a}{2n}\Big)\Big\}. \tag{2.9}$$

Из (1.9) и (2.9) следуют оценки (2.6), а из (1.10) и (2.6), (2.8) — оценки (2.7). Утверждение следствия легко выводится из неравенств (2.6), (2.7) и свойств модулей непрерывности. □

Из теоремы 2.1 и ее следствия видно, что при одинаковых исходных данных методы сплайн–коллокации нулевого порядка и Боголюбова–Крылова обладают одинаковыми аппроксимативными свойствами, но последний метод сходится в более сильной норме. При более “хороших” исходных данных метод Боголюбова–Крылова позволяет получить также новые, более сильные результаты. Это следует из результатов теории приближения сплайнами [10]–[12] и из следующих теорем.

Из теорем 2.1 и 1.3 легко выводится

Теорема 2.2. *Пусть существуют непрерывные производные* $\frac{\partial^r h(t,\tau)}{\partial t^r}$ ($r \in \mathbb{N}$; $a \le t, \tau \le b$). *Тогда в условиях теоремы* 2.1 *метод Боголюбова–Крылова* (1.1)–(1.3), (2.3), (2.5) *сходится в пространстве* $C^{(r)}[a,b]$ *со скоростью*

$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_{C^{(r)}} = \sum_{i=0}^{r} \left\| \frac{d^i (x^*(t) - \overline{x}^*(t))}{dt^i} \right\|_C = O\big(\|x^* - P_n x^*\|_M\big).$$

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия*:

а) *существуют непрерывные производные* $\frac{\partial h(t,\tau)}{\partial t}$, $\frac{\partial h(t,\tau)}{\partial \tau}$ *и* $\frac{dy(t)}{dt}$;
б) *уравнение* (2.1) *однозначно разрешимо в пространстве* M.

Тогда метод (2.1), (2.3)–(2.5) *сходится со скоростью, определяемой формулами*

$$\|x^* - x_n^*\|_M = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2.10}$$

$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_C = \frac{1}{n} O\left\{ \frac{1}{n} + \omega_t\left(h_t'; \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\omega_\tau\left(h_\tau'; \frac{1}{n}\right) + \omega\left(y'; \frac{1}{n}\right) \right\}. \tag{2.11}$$

Следствие. Если h_t' (по t), h_τ' (по τ) и $y' \in \operatorname{Lip} \alpha$, то

$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_C = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right); \tag{2.12}$$

если же существуют ограниченные вторые производные h_{t^2}'', h_{τ^2}'', y'', то

$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_C = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{2.13}$$

Доказательство. Теорема 2.3 доказывается с помощью теорем 1.1, 2.1 и приводимых ниже лемм.

Ясно, что интегрирование сплайна (1.11) приводит к квадратурной формуле средних прямоугольников

$$\int_a^b f(t)\, dt \approx \int_a^b P_n(f;t)\, dt = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{t}_k), \quad f \in C, \tag{2.14}$$

где узлы $\overline{t}_k$ определены в (1.2).

В следующих двух леммах приводятся аппроксимативные свойства формулы (2.14). Из соотношений (1.13) и (2.14) следует

Лемма 2.1. *Для любой функции* $f \in C[a,b]$ *и любых* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки*

$$|R_n(f)| = \left| \int_a^b f(t)\, dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{t}_k) \right| \le 2n \int_0^{\frac{b-a}{2n}} \omega(f;t)\, dt \le (b-a)\, \omega\left(f; \frac{b-a}{2n}\right). \tag{2.15}$$

Следствие. Если $f \in \operatorname{Lip}_{K_0} \alpha$ ($0 < \alpha \le 1$, $0 < K_0 = \text{const} < \infty$), то

$$|R_n(f)| \le \frac{K_0\, (b-a)^{1+\alpha}}{(1+\alpha)\, 2^\alpha} \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{2.16}$$

если же $f(t)$ имеет на $[a,b]$ ограниченную постоянной $K_1 \in \mathbb{R}^+$ первую производную $f'(t)$, то

$$|R_n(f)| \le \frac{K_1\, (b-a)^2}{4} \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

С помощью (2.15)–(2.17), формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и теорем о среднем интегрального исчисления легко доказывается

Лемма 2.2. *Если существует $f'(t) \in C[a,b]$, то*

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^2}{8n}\omega\left(f'; \frac{b-a}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.18}$$

Следствие. Если $f' \in \mathrm{Lip}_{K_1}\,\alpha$ ($0 < \alpha \le 1$, $K_1 > 0$), то

$$|R_n(f)| \le \frac{K_1\,(b-a)^{2+\alpha}}{8}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\,, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{2.19}$$

если же существует вторая ограниченная постоянной $K_2 \in \mathbb{R}^+$ производная $f''(t)$, то

$$|R_n(f)| \le \frac{K_2\,(b-a)^3}{8}\frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.20}$$

Возвращаясь к доказательству теоремы 2.3, заметим, что мы находимся в условиях применимости второй части следствия из теоремы 2.1, откуда и следует оценка (2.10).

Докажем оценку (2.11), пользуясь при этом леммой 2.2 и полученной в теореме 2.1 оценкой

$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_C = O\big(\|B(x^* - P_n x^*)\|_C\big), \tag{2.21}$$

где интегральный оператор B определен в (1.8).

Из (1.1), (1.2), (1.8) и (1.11) находим

$$\begin{aligned} B(x^* - P_n x^*; t) &= \int_a^b h(t,\tau)[x^*(\tau) - P_n(x^*;\tau)]\,d\tau = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} h(t,\tau)[x^*(\tau) - x^*(\bar{t}_k)]\,d\tau = \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} F_k(t,\tau)\,d\tau, \end{aligned} \tag{2.22}$$

где $F_k(t,\tau) = h(t,\tau)[x^*(\tau) - x^*(\bar{t}_k)]$, $a \le t \le b$, $t_{k-1} \le \tau \le t_k$, $k = \overline{1,n}$. Интегралы в (2.22) преобразуем на основе малой формулы средних прямоугольников ([2], с. 143–148) с использованием леммы 2.2.

В условиях доказываемой теоремы функции $x^*(t) \in C[a,b]$ и $F_k(t,\tau) \in C[a,b;t_{k-1},t_k]$ (по переменной $\tau \in [t_{k-1},t_k]$ равномерно относительно переменной $t \in [a,b]$) имеют непрерывные производные. Поэтому к каждому из интегралов в (2.22) применима лемма 2.2 при $n = 1$, согласно которой равномерно относительно $t \in [a,b]$ имеем

$$\begin{aligned} |B(x^* - P_n x^*; t)| &= \left|\sum_{k=1}^{n} R_1^{\tau}\{F_k(t,\tau)\}\right| \le \\ &\le \sum_{k=1}^{n}\frac{(t_k - t_{k-1})^2}{8}\,\omega_\tau(F'_{k\tau}; t_k - t_{k-1}) = \frac{(b-a)^2}{8n^2}\sum_{k=1}^{n}\omega_\tau\left(F'_{k\tau}; \frac{b-a}{n}\right). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Найдем оценки сверху для $\omega_\tau(F'_{k\tau};\delta)$ при $0 < \delta \le t_k - t_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ ($k = \overline{1,n}$). Поскольку в области $a \le t \le b$; $t_{k-1} \le \tau \le t_k$ ($k = \overline{1,n}$)

$$\frac{\partial F_k(t,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial h(t,\tau)}{\partial \tau}[x^*(\tau) - x^*(\bar{t}_k)] + h(t,\tau)\frac{dx^*(\tau)}{d\tau}, \tag{2.24}$$

то для всех $\delta \in (0, \frac{b-a}{n}]$ имеем

$$\omega_\tau(F'_{k\tau};\delta) \le \omega_\tau(h'_\tau;\delta) \max_{t_{k-1}\le\tau\le t_k} |x^*(\tau) - x^*(\overline{t}_k)| + \\ + \max_{a\le t\le b,\ t_{k-1}\le\tau\le t_k} |h'_\tau(t,\tau)|\omega(x^*;\delta) + \omega_\tau(h;\delta) \max_{t_{k-1}\le\tau\le t_k} |x^{*\prime}(\tau)| + \\ + \max_{a\le t\le b,\ t_{k-1}\le\tau\le t_k} |h(t,\tau)|\omega(x^{*\prime};\delta) \le \frac{b-a}{2n}\|x^{*\prime}\|_{C[a,b]}\omega_\tau(h'_\tau;\delta) + \\ + \|h'_\tau(t,\tau)\|_{C[a,b]^2}\delta\|x^{*\prime}\|_{C[a,b]} + \omega_\tau(h;\delta)\|x^{*\prime}\|_{C[a,b]} + \\ + \|h(t,\tau)\|_{C[a,b]^2}\omega(x^{*\prime};\delta), \quad 0<\delta\le\frac{b-a}{n}, \quad k=\overline{1,n}. \tag{2.25}$$

Так как

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} + \int_a^b \frac{\partial h(t,\tau)}{\partial t} x^*(\tau)\,d\tau \in C[a,b], \tag{2.26}$$

то последовательно имеем

$$\|x^{*\prime}\|_{C[a,b]} \le \|y'\|_{C[a,b]} + (b-a)\|h'_t(t,\tau)\|_{C[a,b]^2}\|x^*\|_{C[a,b]} \le \\ \le \|y'\|_{C[a,b]} + (b-a)\|h'_t\|_{C[a,b]^2}\|A^{-1}\|_{M\to M}\|y\|_{C[a,b]} \le c_1 < \infty; \tag{2.27}$$

$$\omega(x^*;\delta) \le \delta\|x^{*\prime}\|_{C[a,b]} \le c_1\delta, \quad 0<\delta\le b-a; \tag{2.28}$$

$$\omega(x^{*\prime};\delta) \le \omega(y';\delta) + (b-a)\omega_t(h'_t;\delta)\|A^{-1}\|_{M\to M}\|y\|_{C[a,b]} \le \\ \le c_2\{\omega(y';\delta) + \omega_t(h'_t;\delta)\}, \quad 0<\delta\le b-a. \tag{2.29}$$

Из соотношений (2.24)–(2.29) находим

$$\omega_\tau(F'_{k\tau};\delta) \le c_3\Big\{\delta + \omega_t(h'_t;\delta) + \frac{1}{n}\omega_\tau(h'_\tau;\delta) + \omega(y';\delta)\Big\}, \quad 0<\delta\le\frac{b-a}{n}, \quad k=\overline{1,n}, \tag{2.30}$$

где c_i (здесь и далее) — вполне определенные положительные постоянные, не зависящие от $\delta \in (0, \frac{b-a}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$ и $k = \overline{1,n}$.

Из неравенств (2.23) и (2.30) при $\delta = \frac{b-a}{n}$ получим оценку

$$\|B(x^* - P_n x^*)\|_{C[a,b]} \le \frac{c_4}{n}\Big\{\frac{1}{n} + \omega_t\Big(h'_t;\frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{n}\omega_\tau\Big(h'_\tau;\frac{1}{n}\Big) + \omega\Big(y';\frac{1}{n}\Big)\Big\}. \tag{2.31}$$

Из соотношений (2.21) и (2.31) следует оценка (2.11). Оценки (2.12) и (2.13) легко выводятся из (2.11) или же из (2.21) и (2.19), (2.20). □

Из теоремы 1.3 и второй части следствия теоремы 2.3 выводится

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия:*

а) *существуют ограниченные производные*

$$\frac{\partial^{r+2}h(t,\tau)}{\partial t^{r+2}}, \quad \frac{\partial^{r+2}h(t,\tau)}{\partial t^r\partial\tau^2}, \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} \quad (r\in\mathbb{N}; \quad a\le t,\tau\le b);$$

б) *уравнение* (2.1) *однозначно разрешимо в пространстве* $M[a,b]$.

Тогда метод Боголюбова–Крылова (1.1)–(1.3), (2.3), (2.5) *сходится в том смысле, что*

$$\Big\|\frac{d^r}{dt^r}[x^*(t) - \overline{x}^*_n(t)]\Big\|_M = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \quad r\in\mathbb{N}. \tag{2.32}$$

В заключение этого параграфа отметим, что установленные в теоремах 2.1–2.4 оценки погрешности метода сплайн-коллокации и метода Боголюбова–Крылова являются неулучшаемыми по порядку. Такое утверждение следует из теории приближения функций, в том числе из теории поперечников множеств в функциональных пространствах [10]–[13]. С другой стороны, ни при каком дальнейшем улучшении дифференциальных свойств функций $h(t,\tau)$ и $y(t)$ оценки (2.13) и (2.32) не могут быть усилены по порядку, т. е. метод Боголюбова–Крылова обладает свойством насыщения [14].

3. Решение сингулярных интегральных уравнений методом Боголюбова–Крылова

Рассмотрим слабосингулярное интегральное уравнение

$$Ax \equiv x(t) - \int_a^b h(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = y(t), \quad a \le t \le b, \tag{3.1}$$

с правой частью $y(t) \in C[a,b]$ и с ядром

$$h(t,\tau) = h_0(t,\tau)\frac{\ln^m|\tau - t|}{|\tau - t|^\alpha} \quad (a \le t,\tau \le b), \tag{3.2}$$

где $m+1 \in \mathbb{N}$, $0 \le \alpha < 1$, $m + \alpha > 0$, а $h_0(t,\tau) \in C[a,b]^2$.

Интегральный оператор $B : M \to C$ из (3.1)–(3.2) является вполне непрерывным; это утверждение следует из неравенств (см., напр., [15])

$$\|B(\varphi;t)\|_C \le d_1\|\varphi\|_M \quad (\varphi \in M), \tag{3.3}$$

$$\omega(B\varphi;\delta) \le d_2\|\varphi\|_M\{\omega_t(h_0;\delta) + \delta^{1-\alpha}(1 + |\ln\delta|^m)\}, \tag{3.4}$$

где d_1 и d_2 – положительные постоянные, не зависящие от $\delta \in (0, b-a]$ и $\varphi \in M$.

Соотношения (3.2)–(3.4) позволяют применить теоремы 1.1 и 1.2 к интегральному уравнению (3.1) не только с непрерывными, но и с полярно-логарифмическими ядрами. При этом коэффициенты $B(\psi_k;\bar{t}_j)$ СЛАУ (1.6) примут вид

$$a_{jk} \equiv B(\psi_k;\bar{t}_j) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} h_0(\bar{t}_j,\tau)\frac{\ln^m|\tau - \bar{t}_j|}{|\tau - \bar{t}_j|^\alpha}d\tau, \tag{3.5}$$

и для их вычисления могут быть использованы предложенные в [15]–[17] точные и приближенные методы, в частности, справедливы следующие соотношения:

$$a_{jk} = B(\psi_k;\bar{t}_j) = h_0(\bar{t}_j,\xi_k)\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\ln^m|\tau - \bar{t}_j|}{|\tau - \bar{t}_j|^\alpha}d\tau \equiv h_0(\bar{t}_j,\xi_k)b_{j-k}, \tag{3.6}$$

где $t_{k-1} < \xi_k < t_k$, а интегралы

$$b_{j-k} = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\ln^m|\tau - \bar{t}_j|}{|\tau|^\alpha}d\tau = \int\limits_{(k-j-1/2)\delta}^{(k-j+1/2)\delta}\frac{\ln^m|\tau|}{|\tau|^\alpha}d\tau = b_{k-j}, \quad \delta = \frac{b-a}{n}, \tag{3.7}$$

вычисляются точно. Поэтому, полагая для определенности $\xi_k = \frac{t_{k-1}+t_k}{2} = \bar{t}_k$, СЛАУ метода Боголюбова–Крылова для уравнения (3.1) приводим к удобному для приложений виду

$$\alpha_j - \sum_{k=1}^{n} h(\bar{t}_j,\bar{t}_k)b_{j-k}\alpha_k = y(\bar{t}_j), \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.8}$$

Для вычислительной схемы (3.1)–(3.8) справедлива

Теорема 3.1. *Пусть уравнение* (3.1)–(3.2) *однозначно разрешимо в пространстве* $M[a,b]$. *Тогда при всех* $n \ge n_0 \in \mathbb{N}$ *СЛАУ* (3.8) *имеет единственное решение* $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$. *Приближенные решения*

$$\overline{x}_n^*(t) = y(t) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^*\, h(t, \overline{t}_k) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\ln^m |\tau - t|}{|\tau - t|^\alpha} d\tau, \quad a \le t \le b, \tag{3.9}$$

равномерно сходятся к точному решению $x^*(t)$ *со скоростью*

$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_{C[a,b]} = O\Big\{ \frac{\ln^m n}{n^{1-\alpha}} + \omega_t\Big(h; \frac{1}{n}\Big) + \omega_\tau\Big(h; \frac{1}{n}\Big) + \omega\Big(y; \frac{1}{n}\Big) \Big\}. \tag{3.10}$$

Доказательство. Ввиду излишней громоздкости вычислений приведем лишь основные этапы доказательства.

1°. По схеме получения результатов по сплайн-методам решения интегральных уравнений, изложенных в [15]–[19], показано, что при всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что

$$q_n = d_3 \Big\{ \frac{\ln^m n}{n^{1-\alpha}} + \omega_t\Big(h; \frac{1}{n}\Big) + \omega_\tau\Big(h; \frac{1}{n}\Big) \Big\} < 1, \tag{3.11}$$

СЛАУ (3.8) имеет единственное решение $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$, причем сплайны

$$x_n^*(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* \psi_k(t) \tag{3.12}$$

сходятся к решению $x^*(t)$ уравнения (3.1)–(3.2) со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_M = O\Big\{ q_n + \omega\Big(y; \frac{1}{n}\Big) \Big\}. \tag{3.13}$$

2°. С помощью формул (1.1), (1.2), (1.24), (3.1)–(3.7), (3.9)–(3.13) находим оценку (3.10)

$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_{C[a,b]} = \|B(x^* - x_n^*)\|_{C[a,b]} \le \|B\|_{M \to C} \|x^* - x_n^*\|_M =$$
$$= O\Big\{ \frac{\ln^m n}{n^{1-\alpha}} + \omega_t\Big(h; \frac{1}{n}\Big) + \omega_\tau\Big(h; \frac{1}{n}\Big) + \omega\Big(y; \frac{1}{n}\Big) \Big\}.$$

Эта теорема гарантирует применимость метода Боголюбова–Крылова к уравнению (3.1)–(3.2) лишь при $n \ge n_0$, причем $n_0 \in \mathbb{N}$ определяется как минимальное решение неравенства (3.11), где d_3 — вполне определяемая положительная постоянная, не зависящая от n. В зависимости от функции $h(t,\tau)$ номер $n_0 \in \mathbb{N}$ может оказаться достаточно большим. В то же время если определяемая в неравенстве (3.3) постоянная $d_1 < 1$, то $n_0 = 1$. Поскольку это требование может оказаться слишком жестким, то для приложений может представить интерес следующая

Теорема 3.2. *Пусть вещественные функции* $y(t) \in C[a,b]$ *и* $h_0(t,\tau) = -h_0(\tau,t) \in C[a,b]^2$, *где* $a = -b$. *Тогда справедливы утверждения*:

а) *уравнение* (3.1)–(3.2) *имеет единственное решение* $x^*(t) \in C[a,b]$ *при любой правой части* $y(t) \in C[a,b]$;

б) *СЛАУ* (3.8) *имеет единственное решение* $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^* \in \mathbb{R}$ *при любых* $n \in \mathbb{N}$ *и любых правых частях*;

в) *приближенные решения* (3.9) *равномерно сходятся на* $[a,b]$ *к* $x^*(t)$ *со скоростью* (3.10).

Доказательство. Обозначим через $L_2 = L_2(a,b)$ пространство квадратично суммируемых по Лебегу функций на $[a,b]$ с обычными скалярным произведением и нормой соответственно

$$(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt, \quad \|f\| = \Big\{ \int_a^b |f(t)|^2 dt \Big\}^{1/2} \quad (f, g \in L_2).$$

Уравнение (3.1)–(3.2) будем рассматривать как операторное уравнение вида

$$Ax \equiv x - Bx = y \quad (x, y \in L_2), \tag{3.14}$$

где интегральный оператор B с ядром (3.2) является вполне непрерывным в пространстве L_2. Поскольку $h(t,\tau)$ — кососимметричное ядро, то в силу (3.14) для любой $x \in L_2$ имеем $(Ax, x) = (x, x) - (Bx, x) = \|x\|^2$. Поэтому $\|Ax\| \geq \|x\|$, $x \in L_2$, следовательно, оператор $A : L_2 \to L_2$ имеет левый линейный обратный A_l^{-1} и $\|A_l^{-1}\| \leq 1$. Отсюда и из теорем Фредгольма для уравнений второго рода [8] следует, что оператор A имеет двусторонний обратный A^{-1} и

$$\|A^{-1}\| \leq 1, \quad A^{-1} : L_2 \to L_2. \tag{3.15}$$

В силу (3.14) и (3.15) уравнение (3.1)–(3.2) имеет единственное решение $x^* = A^{-1}y \in L_2$ при любой правой части $y \in L_2$. Отсюда и из тождества $x^*(t) \equiv y(t) + B(x^*; t)$ с учетом $y \in C[a, b]$ найдем $x^* \in C[a, b]$. Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения СЛАУ (3.8) представим в эквивалентном операторном виде

$$\overline{A}\overline{x} \equiv \overline{x} - \overline{B}\overline{x} = \overline{y} \quad (\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n) \tag{3.16}$$

в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с обычными определениями скалярного произведения и нормы; здесь $\overline{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\overline{y} = (y(\overline{t}_1), y(\overline{t}_2), \ldots, y(\overline{t}_n))$, $\overline{B}\overline{x} = \overline{z} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\beta_j = \sum\limits_{k=1}^{n} h_0(\overline{t}_j, \overline{t}_k) b_{j-k} \alpha_k$, $j = \overline{1, n}$. Поскольку $b_{j-k} = b_{k-j}$, а $h_0(\overline{t}_j, \overline{t}_k) = -h_0(\overline{t}_k, \overline{t}_j)$, то для любого $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ в силу (3.16) имеем $(\overline{A}\overline{x}, \overline{x}) = (\overline{x}, \overline{x}) - (\overline{B}\overline{x}, \overline{x}) = \|\overline{x}\|^2$. Поэтому существует двусторонний обратный оператор $\overline{A}^{-1}$ и

$$\|\overline{A}^{-1}\| \leq 1, \quad \overline{A}^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{3.17}$$

Отсюда и следует второе утверждение теоремы.

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться теоремой 3.1 и только что доказанными утверждениями а) и б), в том числе оценками (3.15) и (3.17). □

В заключение рассмотрим хотя бы вкратце применение метода Боголюбова–Крылова к сингулярному интегральному уравнению

$$Ax \equiv x(t) - \lambda \int_a^b \frac{h(t,\tau)}{\tau - t} x(\tau) d\tau = y(t), \quad a < t < b, \tag{3.18}$$

где $y(t) \in C[a, b]$ и $h(t, \tau) \in C[a, b]^2$ — известные вещественные функции, $x(s) \in L_2(a, b)$ — искомая функция, λ — произвольный вещественный параметр, а сингулярный интеграл $B(x; t)$ понимается в смысле главного значения по Коши–Лебегу. Его приближенное решение ищем в виде сплайна (1.5*), коэффициенты $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ которого будем определять из СЛАУ

$$\alpha_j - \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h(\overline{t}_j, \overline{t}_k) \ln \left| \frac{2j - 2k - 1}{2j - 2k + 1} \right| = y(\overline{t}_j),\ j = \overline{1, n}. \tag{3.19}$$

Теорема 3.3. *Пусть симметричное ядро $h(t, \tau) = h(\tau, t)$, где $b = -a$, таково, что оператор $B : L_2 \to L_2$ ограничен. Тогда*

α) *при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $y \in L_2$ уравнение* (3.18) *имеет единственное решение $x^* \in L_2$ и $\|x^*\| \leq \|y\|$;*

β) *при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ СЛАУ* (3.19) *имеет единственное решение $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^* \in \mathbb{R}$ и*

$$\|x_n^*\|_{L_2} = \left\{ \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k^*|^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} |y(\overline{t}_k)|^2 \right\}^{1/2}.$$

Теорема 3.4. *Пусть в условиях теоремы* 3.3 *функции* $h(t,\tau)$ *и* $y(t)$ *таковы, что решение уравнения* (3.18) *удовлетворяет условию* $x^* \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$. *Тогда метод* (3.18)–(3.19), (1.5^*), (1.1)–(1.3) *сходится в пространстве* L_2 *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\| = O(n^{-\alpha}).$$

Доказательство этих теорем ведется по схеме, предложенной автором в ([5], гл. 4, § 1, п. 1.6), ввиду громоздкости конкретные выкладки здесь не приводятся.

Литература

1. Крылов Н.М. *Избранные труды.* Т. 1.1. – Киев: Изд-во АН УССР, 1961. – 266 с.
2. Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа.* – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
3. Цецохо В.А. *Численное решение задач дифракции методом потенциалов*: Дис. ... д-ра физ.-матем. наук. – Новосибирск, 1987. – 38 с.
4. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений* I *рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
5. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
6. Мелешко И.Н. *Приближенные методы решения краевых задач теории теплопроводности на основе специальных формул для интегралов*: Дис. ... д-ра физ.-матем. наук. – Минск, 2002. – 264 с.
7. Самойлова Э.Н. *Сплайновые приближения решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 11. – С. 35–45.
8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
9. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
10. Корнейчук Н.П. *Сплайны в теории приближения.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.
11. Корнейчук Н.П. *Экстремальные задачи теории приближения.* – М.: Наука, 1976. – 320 с.
12. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* – М.: Наука, 1987. – 424 с.
13. Тихомиров В.М. *Некоторые вопросы теории приближений.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
14. Бабенко К.И. *Основы численного анализа.* – М.: Наука, 1986. – 744 с.
15. Габдулхаев Б.Г., Горлов В.Е. *О сходимости полигонального метода решения слабо сингулярных интегральных уравнений* / Функциональный анализ и его приложения. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1975. – С. 60–72.
16. Габдулхаев Б.Г., Ахметов С.М. *О методе сплайн-коллокации для интегральных уравнений* / Приложения функционального анализа к приближенным вычислениям. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1974. – С. 7–14.
17. Габдулхаев Б.Г., Душков П.Н. *О полигональном методе решения интегральных уравнений со слабой особенностью* / Приложения функционального анализа к приближенным вычислениям. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1974. – С. 37–57.
18. Габдулхаев Б.Г., Жечев Й.И. *Полигональный метод решения линейных уравнений* // Научни Трудове Висш. педаг. ин-та, г. Пловдив. – 1971. – № 1. – С. 9–26.
19. Габдулхаев Б.Г. *Аппроксимация полиномами и сплайнами решений слабо сингулярных интегральных уравнений* // Теория приближения функций. – М.: Наука, 1977. – С. 89–93.

Казанский государственный университет

Поступила
01.06.02