ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 3 (478)

УДК 512.554

Н.А. КОРЕШКОВ

ЭЛЕМЕНТЫ КАЗИМИРА $\mathbb{Z}$-ФОРМ МОДУЛЯРНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Для полупростых алгебр Ли над полем нулевой характеристики известно, что любой элемент центра универсальной обертывающей алгебры является обобщенным элементом Казимира. Для конечномерных алгебр Ли над полем положительной характеристики в [1] выдвинута гипотеза о том, что любой нетривиальный центральный элемент является обобщенным элементом Казимира. Л.П. Бедратюк [2] доказал это утверждение при некоторых ограничениях для кольца инвариантов симметрической алгебры алгебры Ли. С использованием его метода в данной статье получена аналогичная теорема для произвольной алгебры.

Пусть G — алгебра над полем k, M — векторное пространство над тем же полем. Предположим, что существует гомоморфизм векторных пространств $\varphi : G \to \mathrm{End}(M)$. Обозначим через $A_M(G)$ ассоциативную алгебру, порожденную операторами φ_x. Так как M является левым $A_M(G)$-модулем, то будем говорить, что M — левый G-модуль. В частности, если $M = G$, а φ_x — оператор левого умножения, то будем называть M присоединенным G-модулем (по аналогии с алгебрами Ли).

Продолжим оператор левого умножения $L_x : y \to xy$, $x, y \in G$, до дифференцирования D_x, $x \in G$, симметрической алгебры $S(G)$ алгебры G. Определим алгебру инвариантов $S(G)^G$ как совокупность всех элементов из $S(G)$, аннулируемых операторами D_x. Если $\mathrm{char}\, k = p > 0$, то обозначим $S_p(G) = \{y^p \mid y \in S(G)\}$. Очевидно, $S_p(G) \subset S(G)^G$. Элементы из $S_p(G)$ будем называть тривиальными инвариантами.

Пусть D — ассоциативная алгебра, порожденная дифференцированиями D_x, а D_L — соответствующая ей алгебра Ли. Алгебру $S(G)$ можно рассматривать как левый D-модуль (или D_L-модуль). Предположим, что в $S(G)$ существуют два контраградиентных D_L-модуля P, P^* и их базисы $\{u_i\}$, $\{u_i^*\}$ дуальные. Тогда элемент $\Delta = \sum\limits_i u_i u_i^*$ принадлежит $S(G)^G$ и называется обобщенным элементом Казимира. В этом случае будем говорить, что инвариант $\Delta = \Delta(P, P^*)$ определяется модулями P, P^*.

Теорема. *Пусть z — однородный инвариант из $S(G)^G$, $\deg z > 1$, $\dim_k G < \infty$. Тогда*

1) *если $\mathrm{char}\, k = 0$, то z — обобщенный элемент Казимира $z = \Delta(P, P^*)$ и P — G-подмодуль присоединенного модуля;*
2) *если $\mathrm{char}\, k = p > 0$ и $\deg z \not\equiv 0 \pmod p$, то $z = \Delta(P, P^*)$, $P \subseteq G$.*

Доказательство теоремы разобьем на ряд шагов. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис алгебры G, а G' — изоморфная копия G с базисом $h_1, \dots, h_n$. Изоморфизм φ между ними задается соответствием $\varphi(h_i) = e_i$, $i = 1, \dots, n$. Обозначим через $\widetilde{S}$ прямое дополнение к $G' \otimes 1$ в тензорном произведении G-модулей $G' \underset{k}{\otimes} S(G)$, где действие G на G' определяется условиями $e_i \circ h_j = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ijk} h_k$, c_{ijk} — структурные константы алгебры G. Действие алгебры G на $G' \underset{k}{\otimes} S(G)$, определенное правилом:

$$g \circ (g' \otimes s) = (g \circ g') \otimes s + g' \otimes (g \circ s),$$

$g \in G$, $g' \in G'$, $s \in S(G)$, позволяет ввести на $\widetilde{S}$ структуру G-модуля. Алгебру инвариантов G-модуля $\widetilde{S}$, т. е. совокупность всех элементов из $\widetilde{S}$, аннулируемых элементами из G, обозначим $\widetilde{S}^G$. Элемент $\Delta \in \widetilde{S}(G)^G$ назовем обобщенным элементом Казимира, если $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{r} f_i \otimes B_i$, $F = \langle f_1, \ldots, f_r\rangle$ — G-подмодуль в присоединенном G-модуле G размерности r, $B = \langle B_1, \ldots, B_r\rangle$ — G-подмодуль в $S(G)$, контраградиентный к F, т. е. $\dim B = r$ и, если A_x — матрица, отвечающая элементу x в модуле F, то $A_x^* = -A_x^t$ (t — транспонирование), где A_x^* — матрица, отвечающая элементу x в модуле B.

Лемма 1. *Любой однородный инвариант из $\widetilde{S}^G$ является обобщенным элементом Казимира.*

Доказательство. Пусть $z = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i \otimes B_i \in \widetilde{S}^G$. Если $x \in G$ и $x \circ e_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j$, $n = \dim G$, то $x \circ h_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij} h_j$ и из условия $x \circ z = 0$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} h_j \otimes B_i + \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes D_x B_i = 0.$$

Следовательно, $D_x B_i = -\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ji} B_j$, т. е. $B = \langle B_1, \ldots, B_n\rangle_k$ — G-модуль. Пусть $B_1, \ldots, B_r$ — базис G-модуля B. Тогда $z = \sum\limits_{i=1}^{r} f_i \otimes B_i$, где $f_i \equiv h_i \ (\mathrm{mod}\langle h_{r+1}, \ldots, h_n\rangle)$, $i = 1, \ldots, r$. Если $D_x B_i = \sum\limits_{j=1}^{r} \mu_{ij} B_j$, то опять, используя условие $x \circ z = 0$, имеем $x \circ f_i = -\sum\limits_{j=1}^{r} \mu_{ji} f_j$, т. е. G-модули $F = \langle f_1, \ldots, f_r\rangle$ и $B = \langle B_1, \ldots, B_r\rangle$ контраградиентны. $\square$

Изоморфизм $\varphi : G' \to G$ продолжим до гомоморфизма $\varphi : \widetilde{S} \to S(G)$, полагая $\varphi(h_i) = e_i$, $\varphi(e_i) = e_i$.

Лемма 2. 1) *Гомоморфизм φ является гомоморфизмом G-модулей $\widetilde{S}$ и $S(G)$.*

2) *Если $z \in \widetilde{S}^G$, то $\varphi(z) = \Delta(P, P^*)$ — обобщенный элемент Казимира, причем P — G-модуль присоединенного модуля.*

Доказательство утверждния 1) достаточно привести для мономов. Пусть $x \in G$, $h_i \otimes e^\alpha \in \widetilde{S}$, где $e^\alpha = e_1^{\alpha_1} \ldots e_n^{\alpha_n}$. Тогда

$$\varphi(x \circ (h_i \otimes e^\alpha)) = \varphi(L_x h_i \otimes e^\alpha + h_i \otimes D_x e^\alpha) = \varphi\Bigl(\sum_j \lambda_{ij}(x) h_j \otimes e^\alpha + h_i \otimes D_x e^\alpha\Bigr) =$$
$$= \sum_j \lambda_{ij}(x) e_j e^\alpha + e_i(D_x e^\alpha) = x \circ e_i e^\alpha = x \circ \varphi(h_i \otimes e^\alpha).$$

Докажем 2). Если $z \in \widetilde{S}^G$, то z — обобщенный элемент Казимира по лемме 1, т. е. $z = \sum\limits_{i=1}^{r} f_i \otimes B_i$ и G-модули $F = \langle f_1, \ldots, f_r\rangle$ и $B = \langle B_1, \ldots, B_r\rangle$ контраградиентны. Но $\varphi(z) = \sum\limits_{i=1}^{r} \varphi(f_i)\varphi(B_i)$ и $\varphi F \cong F$, $\varphi B \cong B$, т. к. $\varphi|_{G'}$ и $\varphi|_{S(G)}$ — изоморфизмы. Следовательно, $\varphi(z)$ — обобщенный элемент Казимира, а $\varphi(F)$ — G-модуль присоединенного модуля. $\square$

Отождествляя симметрическую алгебру $S(G)$ и кольцо многочленов $k[e_1, \ldots, e_n]$, обозначим через ∂_i частную производную по e_i кольца многочленов. Тогда для любого $w \in S(G)$ положим

$$\gamma(w) = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes \partial_i(w).$$

Лемма 3. 1) *Отображение γ является гомоморфизмом G-модулей $S(G)$ и $\widetilde{S}$.*

2) *Если* $\operatorname{char} k = 0$, *то* $\ker\gamma = k$. *Если* $\operatorname{char} k = p$, *то* $\ker\gamma = k[e_1^p, \ldots, e_n^p]$.

3) *Для любого однородного $w \in S(G)$ имеет место $\varphi(\gamma(w)) = \deg w \cdot w$.*

Доказательство. 1) Достаточно обосновать случай, когда w — моном. Пусть $w = e^\alpha$, $x \in G$, $x \circ e_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(x) e_j$. Тогда

$$D_x e^\alpha = \sum_{i,j} \alpha_i \lambda_{ij}(x) e^{\alpha - \varepsilon_i + \varepsilon_j},$$

где $\varepsilon_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$, $\partial_i e^\alpha = \alpha_i e^{\alpha - \varepsilon_i}$. Действие γ удобно записать в виде

$$\gamma(e^\alpha) = \sum_i h^{\varepsilon_i} \otimes \partial_i(e^\alpha).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\gamma(x \circ e^\alpha) &= \gamma\biggl(\sum_{i,j} \alpha_i \lambda_{ij}(x) e^{\alpha-\varepsilon_i+\varepsilon_j}\biggr) = \\
&= \sum_{i,j,k} \alpha_i \lambda_{ij}(x)(\alpha_k - \delta_{ik} + \delta_{jk}) h^{\varepsilon_k} \otimes e^{\alpha-\varepsilon_i+\varepsilon_j-\varepsilon_k} = \\
&= \sum_{i,j,k} \alpha_i \lambda_{ij}(x)(\alpha_k - \delta_{ik}) h^{\varepsilon_k} \otimes e^{\alpha-\varepsilon_i+\varepsilon_j-\varepsilon_k} + \sum_{i,k} \alpha_i \lambda_{ik}(x) h^{\varepsilon_k} \otimes e^{\alpha-\varepsilon_i} = \\
&= \sum_{i,j,k} \alpha_k \lambda_{ij}(x)(\alpha_i - \delta_{ik}) h^{\varepsilon_k} \otimes e^{\alpha-\varepsilon_i+\varepsilon_j-\varepsilon_k} + \sum_{i,k} \alpha_i \lambda_{ik}(x) h^{\varepsilon_k} \otimes e^{\alpha-\varepsilon_i} = \\
&= \sum_k \alpha_k h^{\varepsilon_k} \otimes D_x e^{\alpha-\varepsilon_k} + \sum_i \alpha_i (L_x h^{\varepsilon_i}) \otimes e^{\alpha-\varepsilon_i} = \\
&= x \circ \biggl(\sum_i \alpha_i h^{\varepsilon_i} \otimes e^{\alpha-\varepsilon_i}\biggr) = x \circ \gamma(e^\alpha).
\end{aligned}$$

При доказательстве использовалось то, что $\alpha_i(\alpha_k - \delta_{ik}) = \alpha_k(\alpha_i - \delta_{ik})$. Утверждение 2) очевидно.

3) Пусть $w \in S(G)$ и w однороден. Тогда

$$\gamma(w) = \sum_i h^{\varepsilon_i} \otimes \partial_i w, \quad \varphi(\gamma(w)) = \sum_i e_i \partial_i(w).$$

По теореме Эйлера об однородных функциях последнее выражение равно $\deg w \cdot w$.

Доказательство теоремы. 1) Пусть z — нетривиальный инвариант $\deg z > 1$. Тогда по лемме 3 $\gamma(z) \neq 0$ и $\gamma(z) \in \widetilde{S}^G$. По лемме 2 $\varphi(\gamma(z))$ является обобщенным элементом Казимира. Но $z = \frac{1}{\deg z}\varphi(\gamma(z))$. Следовательно, $z = \Delta(P, P^*)$ — также обобщенный элемент Казимира и P — G-подмодуль присоединенного модуля.

2) В силу условия $\deg z \not\equiv 0 \pmod p$ случай характеристики $p > 0$ рассматривается аналогично случаю характеристики 0.

Следствие 1. Если в условиях теоремы присоединенный G-модуль неприводим, то $z = \Delta(G, G^*)$.

Пусть L — алгебра Ли, определенная над простым полем F_p. Обозначим через G свободный $\mathbb{Z}$-модуль такой, что $L \cong F_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} G$. Определим в G умножение $*$, полагая $1_{F_p} \otimes g_1 * g_2 = [1 \otimes g_1, 1 \otimes g_2]$ $\forall g_1, g_2 \in G$. Алгебру G назовем $\mathbb{Z}$-формой алгебры Ли L.

Следствие 2. Пусть L — простая алгебра Ли, определенная над F_p, а G — ее $\mathbb{Z}$-форма. Тогда любой нетривиальный однородный инвариант $z \in S(G)^G$, $\deg z > 1$, является обобщенным элементом Казимира, причем $z = \Delta(G, G^*)$.

Доказательство. Простота алгебры L гарантирует неприводимость присоединенного G-модуля. Тогда последнее утверждение вытекает из следствия 1, если использовать переход к алгебре $Q \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} G$.

Литература

1. Джумадильдаев А.С. *Обобщенные элементы Казимира* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1985. – Т. 49. – № 5. – С. 1107–1117.
2. Бедратюк Л.П. *Симметрические инварианты модулярных алгебр Ли*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – М., 1995. – 81 с.

Казанский государственный университет

Поступила 26.10.1998