ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 8 (447)

УДК 517.518

В.С. КЛИМОВ

О СИММЕТРИЗАЦИИ АНИЗОТРОПНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

В статье известный принцип Полиа–Сеге ([1], с. 203) распространяется на анизотропные интегральные функционалы. Намечены приложения к теоремам вложения и оценкам емкостей конденсаторов.

1. Ниже $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел, $x \cdot y = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ и $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ и евклидова норма вектора x соответственно; $\mathrm{Kv}(\mathbb{R}^n)$ — совокупность непустых выпуклых и компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$, R^n — часть $\mathrm{Kv}(\mathbb{R}^n)$, состоящая из симметричных относительно $\theta = (0, \dots, 0)$ множеств. Используются обозначения $f^* : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — функция, сопряженная по Юнгу к функции $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ([2], с. 120); $\mathrm{dom}\, f = \{p \in \mathbb{R}^n,\ f(p) < \infty\}$; $\mathrm{epi}\, f = \{(p, h),\ p \in \mathrm{dom}\, f,\ h \in \mathbb{R},\ h \geq f(p)\}$; индикаторная и опорная функции множества K из $\mathrm{Kv}(\mathbb{R}^n)$ обозначаются символами δ_K и δ_K^* соответственно,

$$\delta_K(p) = \begin{cases} 0, & p \in K; \\ \infty, & p \notin K, \end{cases} \qquad \delta_K^* = \max\{p \cdot q,\ p \in K\}.$$

Выпуклую и четную функцию $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ назовем функцией Юнга, если $f(\theta) = 0$ и при любом $h > 0$ нижнее лебегово множество $\lambda_h(f) = \{p \in \mathbb{R}^n,\ f(p) \leq h\}$ функции f есть замкнутое ограниченное тело в $\mathbb{R}^n$. Если f — функция Юнга, то и сопряженная к ней также будет функцией Юнга ([2], с. 144; [3]); в частности, при любом $N > 0$ множество $Q_N = \lambda_N(f^*)$ есть замкнутое ограниченное тело в $\mathbb{R}^n$. Положим $k_N(p) = \max\{p \cdot q,\ q \in Q_N\}$, $f_N(p) = \sup\{p \cdot q - f^*(q),\ q \in Q_N\}$. Из определения функций k_N, f_N вытекают неравенства $f_N(p) \leq k_N(p)$, $k_N(p) - N \leq f_N(p) \leq f(p)$. Установим равенство

$$\sup_{N>0}\{k_N(p) - N\} = \sup_{N>0} f_N(p) = f(p). \tag{1}$$

Действительно, если $q \in \mathrm{dom}\, f^*$, $N = f^*(q^*)$, то $k_N(p) - N \geq p \cdot q - f^*(q)$, поэтому $\sup\limits_{N>0}\{k_N(p) - N\} \geq \sup\{p \cdot q - f^*(q),\ q \in \mathrm{dom}\, f^*\} = f(p)$, что и доказывает равенство (1). Функции Юнга k_N, f_N не уменьшаются с ростом N; справедливы оценки

$$0 \leq f_N(p) \leq k_N(p) \leq \rho_N |p|, \tag{2}$$

где $\rho_N = \max\{|q|,\ q \in Q_N\}$.

Пусть $H = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n),\ x_n = 0\}$ — координатная гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $P_H : \mathbb{R}^n \to H$ — оператор ортогонального проектирования, $l(x)$ — прямая, проходящая через точку x и ортогональная H, A — такое множество в $\mathbb{R}^n$, что для любого x из $P_H(A)$ пересечение $A \cap l(x)$ ограничено. Симметризацией Штейнера множества A относительно гиперплоскости H называется ([4], с. 232) множество

$$S_H(A) = \bigcup_{x \in P_H(A)} (A \cap l(x))^s,$$

где $(A\cap l(x))^s$ — принадлежащий $l(x)$ отрезок с центром в точке x, длина которого равна внешней одномерной лебеговой мере множества A. В дальнейшем удобно точку $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ из $\mathbb{R}^n$ записывать в виде $x = (x', x_n)$, где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, так что $P_H x = (x', 0)$.

Лемма 1. *Пусть $K \in \mathrm{Kv}(\mathbb{R}^n)$, δ^*_K, $\delta^*_{K^s}$ — опорные функции множеств K и $K^s = \sigma_H(K)$. Тогда*

$$\delta^*_K(a,1) + \delta^*_K(b,-1) \geq \delta^*_{K^s}(a+b,2) \tag{3}$$

для любых a, b из $\mathbb{R}^{n-1}$.

Доказательство. Пусть $K' = P_H(K)$ — проекция K на гиперплоскость H, отождествляемую с пространством $\mathbb{R}^{n-1}$; $h, g : K' \to \mathbb{R}$ — такие функции, что $K = \{(x', x_n),\ x' \in K',\ h(x') \leq x_n \leq -g(x')\}$. Тогда $K^s = S_H(K) = \{(x', x_n),\ x' \in K',\ h(x') + g(x') \leq 2x_n \leq -h(x') - g(x')\}$. Из определения опорной функции вытекают равенства

$$\begin{aligned}\delta^*_K(a,1) = \max\{a\cdot x' + x_n,\ (x',x_n)\in K\} = \max\{a\cdot x' + x_n,\ x'\in K',\ h(x') \leq x_n \leq -g(x')\} =\\ = \max\{a\cdot x' - g(x'),\ x' \in K'\}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом доказываются равенства

$$\begin{aligned}\delta^*_K(b,-1) &= \max\{b\cdot x' - h(x'),\ x'\in K'\},\\ \delta^*_{K^s}(a+b,2) &= \max\{(a+b)\cdot x' - g(x') - h(x'),\ x' \in K'\}.\end{aligned}$$

Последние три равенства очевидным образом влекут неравенство (3). □

Пусть $H \times \mathbb{R}$ — гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Если $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — функция Юнга, то $\operatorname{epi} f$ есть выпуклое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Симметризация $\operatorname{epi} f$ относительно $H \times \mathbb{R}$ совпадает с надграфиком некоторой функции Юнга $f^s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, называемой симметризацией f относительно H в возрастающем порядке. Из определения f^s вытекает соотношение $\lambda_N(f^s) = S_H(\lambda_N(f))$, означающее, что нижние лебеговы множества функции f^s совпадают с симметризациями соответствующих лебеговых множеств функции f.

Если $K \in R^n$, k — опорная функция компакта K, то k^* — индикаторная функция компакта K, $k^{*s} = (k^*)^s$ — индикаторная функция компакта K^s, $k^{*s*} = (k^{*s})^*$ — опорная фуункция компакта K^s. Поэтому (3) эквивалентно неравенству

$$k(a,1) + k(b,-1) \geq k^{*s*}(a+b,2). \tag{4}$$

Выведем вариант неравенства (4) для произвольной функции Юнга f. Заменяя в определяющих функции k_N, f_N соотношениях множества $Q_N = \lambda_N(f^*)$ их симметризациями $Q^s_N = \lambda_N(f^{*s})$, приходим к равенствам

$$\begin{gathered}k^{*s*}_N(p) = \max\{p\cdot q,\ q \in Q^s_N\},\ \ f^{*s*}_N(p) = \sup\{p\cdot q - f^{*s}(q),\ q\in Q^s_N\},\\ \sup_{N>0}\{k^{*s*}_N(p) - N\} = \sup_{N>0} f^{*s*}_N(p) = f^{*s*}(p).\end{gathered} \tag{5}$$

С ростом N функции k^{*s*}_N, $f^{*s*}N$ не уменьшаются, сохраняется аналогичная (2) оценка

$$0 \leq f^{*s*}_N(p) \leq k^{*s*}_N(p) \leq \rho_N|p|.$$

Лемма 2. *Пусть $a_i \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b_i \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ $(i = 1, \dots, m)$,*

$$a = \sum_{i=1}^m a_i, \quad b = \sum_{i=1}^m b_i, \quad \alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^m \beta_i. \tag{6}$$

Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция Юнга, то

$$\sum_{i=1}^m \left(f\left(\frac{a_i}{\alpha_i},\ \frac{1}{\alpha_i}\right)\alpha_i + f\left(\frac{b_i}{\beta_i},\ -\frac{1}{\beta_i}\right)\beta_i\right) \geq f^{*s*}\left(\frac{a+b}{\alpha+\beta},\ \frac{2m}{\alpha+\beta}\right)(\alpha+\beta). \tag{7}$$

Доказательство. Для краткости обозначим через F_m сумму, находящуюся в левой части (7). Без ограничения общности считаем, что $F_m \leq \infty$. Фиксируем N из $(0,\infty)$. Имеют место соотношения (пояснения ниже)

$$F_m \geq \sum_{i=1}^{m}\left(\left(k_N\left(\frac{a_i}{\alpha_i},\ \frac{1}{\alpha_i}\right)-N\right)\alpha_i+\left(k_N\left(\frac{b_i}{\beta_i},\ -\frac{1}{\beta_i}\right)-N\right)\beta_i\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(k_N(a_i,1)+k_N(b_i,-1))-N(\alpha+\beta)\geq\sum_{i=1}^{m}k_N^{*s*}(a_i+b_i,2)-N(\alpha+\beta)\geq$$

$$\geq k_N^{*s*}(a+b,2m)-N(\alpha+\beta)=\left(k_N^{*s*}\left(\frac{a+b}{\alpha+\beta},\ \frac{2m}{\alpha+\beta}\right)-N\right)(\alpha+\beta).$$

Здесь последовательно используются определение постоянной F_m, оценка $f(p)\geq k_N(p)-N$, однородность k_N, неравенство (4), сублинейность функции k_N^{*s*}. Ввиду произвольности $N>0$ получаем неравенство

$$F_m\geq(\alpha+\beta)\sup_{N>0}\left(k_N^{*s*}\left(\frac{a+b}{\alpha+\beta},\ \frac{2m}{\alpha+\beta}\right)-N\right),$$

эквивалентное в силу (5) оценке (7). $\square$

Следствие. Справедливо неравенство

$$F_m\geq f^{*s*}\left(\frac{a+b}{\alpha+\beta},\ \frac{2}{\alpha+\beta}\right)(\alpha+\beta).$$

Для доказательства достаточно заметить, что при любом c из $\mathbb{R}^{n-1}$ функция $f^{*s*}(c,\cdot):\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ выпукла и четна, поэтому ее сужение на $\mathbb{R}_+$ есть неубывающая функция. Теперь требуемый результат вытекает из неравенства (7).

Перейдем к определению симметризации суммируемых функций. Пусть u — неотрицательная финитная (т. е. обращающаяся в нуль вне компакта) функция из $L_1(\mathbb{R}^n)$. Ее подграфик (ординатное множество) $\operatorname{ord}u=\{(x,t),\ x\in\mathbb{R}^n,\ 0\leq t\leq u(x)\}$ есть подмножество $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, пересечение которого с каждой прямой, проходящей через точку (x',t), $x'\in H$, $t>0$, и перпендикулярной $H\times\mathbb{R}$, есть ограниченное множество. Поэтому определена симметризация множества $\operatorname{ord}u\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ относительно гиперплоскости $H\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$. Результат этой симметризации есть множество $S_H(\operatorname{ord}u)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$. Оно совпадает с подграфиком некоторой неотрицательной финитной суммируемой на $\mathbb{R}^n$ функции u^c, называемой симметризацией функции u относительно H в убывающем порядке. Почти при всех $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ функция u^c совпадает с перестановкой функции $u(x',\cdot)$ в симметрично убывающем порядке ([5], с. 309; [6]). Это свойство может быть положено в основу определения симметризациии функции. Отметим неравенство ([5], с. 309; [6], [7], с. 113)

$$\|u^c-v^c;\ L_1(\mathbb{R}^n)\|\leq\|u-v;\ L_1(\mathbb{R}^n)\|,\tag{8}$$

справедливое для неотрицательных функций u, v из $L_1(\mathbb{R}^n)$.

2. Непрерывную неотрицательную функцию $v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ назовем полиэдральной, если найдется такой конечный набор n-мерных симплексов Δ_j $(j\in J)$ с непересекающимися внутренностями, что 1) $v(x)=0$ $\forall x\notin\cup\Delta_j$; 2) сужение функции v на Δ_j есть аффинная функция, т. е. $v(x)=c_1^jx_1+\cdots+c_n^jx_n+d_j$ $(x\in\Delta_j,\ j\in J)$. Если в условии 2) $c_n^j\neq0$ для всех j из J, то функцию v назовем простой. Класс простых функций обозначим символом Π_n. Если w — полиэдральная функция на $\mathbb{R}^n$, $v\in\Pi_n$, то можно указать такую последовательность $\varepsilon_i>0$, $\varepsilon_i\to0$, что $w+\varepsilon_iv\in\Pi_n$ для всех i.

Обозначим через W совокупность финитных функций класса $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ ([5], с. 133). Считаем, что норма в $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ определена равенством $\|u\|=\|u;L_1\|+\|\nabla u;L_1\|$. Здесь и далее ∇u — градиент функции u. Ниже W_+ — подмножество W, состоящее из неотрицательных функций. Из общих результатов о приближении функций класса $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ ([5], гл. 5; [8], гл. 10) следует

Предложение 1. *Для любой функции u из W_+ существует сходящаяся к ней в метрике $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ последовательность простых функций v_i с равномерно ограниченными носителями.*

Функция v класса Π_n удовлетворяет условию Липшица, множество точек недифференцируемости v составляет часть множества $D_v = \cup\partial\Delta_j$ $(j \in J)$, градиент ∇v постоянен на внутренности симплекса Δ_j, $M_v = \sup\{v(x),\ x \in \mathbb{R}^n\} < \infty$. Верхнее лебегово множество $\lambda^{t+}(v) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ v(x) > t\}$ $(0 < t < M_v)$ функции v есть внутренность некоторого полиэдра, его граница $\gamma^t(v) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ v(x) = t\}$ представима в виде объединения многогранников $\{x \in \Delta_j,\ v(x) = t\}$ размерности $\le n-1$. Для каждого симплекса Δ_j существует не более чем одно значение t, для которого размерность многогранника $\{x \in \partial\Delta_j,\ v(x) = t\}$ равна $n-1$. Обозначим через T_v совокупность тех t из $(0, M_v)$, для которых множество $\gamma^t(v) \cap D_v$ содержится в объединении конечного числа многогранников размерности $\le n-2$. Из сказанного выше следует, что число элементов $(0, M_v)/T_v$ не превосходит количества симплексов Δ_j $(j \in J)$, поэтому T_v получается из отрезка $[0, M_v]$ удалением конечного числа элементов.

Если $t \in T_v$, то проекция $P_H(\gamma^t(v) \cap D_v)$ множества $\gamma^t(v) \cap D_v$ на гиперплоскость H есть объединение конечного числа многогранников размерности $n-2$, разбивающих $P_H(\gamma^t(v))$ на конечное число выпуклых многогранников размерности $n-1$. Внутренности (относительно H) этих многогранников обозначим через $\Omega_1', \dots, \Omega_r'$.

Пусть Ω' — одна из областей Ω_k $(k = 1, \dots, r)$, $x' \in \Omega'$, $l(x') = P_H^{-1}(x')$. Очевидно, $l(x') \cap \gamma^t(v) \ne \emptyset$. Если $(x', z) \in l(x') \cap \gamma^t(v)$, то $v(x', z) = t$ и $(x', z) \notin D_v$, следовательно, $(x', z) \in \operatorname{int}\Delta_j$ при некотором j. Пересечение $l(x') \cap \lambda^t(v)$ состоит из m непересекающихся интервалов, граничные точки этих интервалов принадлежат $l(x') \cap \gamma^t(v)$, число m одинаково для всех x' из Ω'. Поскольку $P_H^{-1}(\Omega') = \cup l(x')$ $(x' \in \Omega')$, то $P_H^{-1}(\Omega') \cap \lambda^t(v)$ есть объединение усеченных цилиндров $Ц_i$ $(i = 1, \dots, m)$. Нижняя и верхняя грани цилиндра $Ц_i$ принадлежат $P_H^{-1}(\Omega') \cap \gamma^t(v)$, поэтому $v(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + d = t$ для точек, принадлежащих этим граням. Параметры $c' = (c_1, \dots, c_{n-1})$, c_n, d, разумеется, различны для разных граней. В силу определения простой функции $c_n \ne 0$. Нижней грани соответствует коэффициент $c_n > 0$, верхней грани — $c_n < 0$. Отметим равенство $\nabla v(x) = (c', c_n)$.

Уточним способ представления цилиндра $Ц_i$, его граней и градиента $\nabla v(x)$. Для описания верхней (нижней) грани $Ц_i$ введем параметры $a_i = c'/c_n$, $\alpha_i = -1/c_n$, $g_i = d/c_n$ $(c_n < 0)$ и $b_i = -c'/c_n$, $\beta_i = 1/c_n$, $h_i = d/c_n$ $(c_n > 0)$. Тогда цилиндр $Ц_i$ определяется неравенствами

$$b_i \cdot x' + \beta_i t + h_i < x_n < -(a_i \cdot x' + \alpha_i t + g_i) \quad (x' \in \Omega').$$

Для точек (x', x_n), принадлежащих верхней (нижней) грани, выполняются соотношения $(x' \in \Omega')$

$$x_n = -(a_i \cdot x' + \alpha_i t + g_i), \quad \nabla v(x) = -(a_i/\alpha_i,\ 1/\alpha_i), \tag{9}$$

$$x_n = b_i \cdot x' + \beta_i t + h_i, \qquad \nabla v(x) = (-b_i/\beta_i,\ 1/\beta_i). \tag{10}$$

Из определения a_i, b_i, α_i, β_i вытекают включения $a_i \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ и неравенства $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ $(i = 1, \dots, m)$.

Пусть v^c — симметризация функции v в убывающем порядке, $\lambda^t(v^c)$, $\gamma^t(v^c)$ — верхние лебеговы множества и поверхности уровня функции v^c соответственно. Тогда $\lambda^t(v^c) = S_H(\lambda^t(v))$, $\gamma^t(v^c) = \partial\lambda^t(v^c)$. Если Ω' — одна из введенных выше $(n-1)$-мерных областей Ω_k $(k = 1, \dots, r)$, то, как вытекает из предшествующих результатов,

$$P_H^{-1}(\Omega') \cap \lambda^t(v^c) = \{(x', x_n),\ x' \in \Omega',\ (a+b)\cdot x' + (\alpha+\beta)t + h < 2x_n < -(a+b)\cdot x' - (\alpha+\beta)t - h\},$$

где a, b, α, β определены равенствами (6), $h = h_1 + \dots + h_n + g_1 + \dots + g_n$, и, таким образом, $P_H^{-1}(\Omega') \cap \lambda^t(v^c)$ есть симметричный относительно H усеченный цилиндр $Ц^s$. Для точек $x =$

(x', x_n), принадлежащих верхней (нижней) грани цилиндра Ц^s, выполняются соотношения

$$2x_n = -(a+b)\cdot x' - (\alpha+\beta)t - h, \quad \nabla v^c(x) = -\Big(\frac{a+b}{\alpha+\beta},\ \frac{2}{\alpha+\beta}\Big), \tag{11}$$

$$2x_n = (a+b)\cdot x' + (\alpha+\beta)t + h, \qquad \nabla v^c(x) = \Big(-\frac{a+b}{\alpha+\beta},\ \frac{2}{\alpha+\beta}\Big), \tag{12}$$

$x' \in \Omega'$. Соотношения (9) и (11), (10) и (12) аналогичны между собой. Объединение верхней и нижней граней Ц^s совпадает с $P_H^{-1}(\Omega') \cap \gamma^t(v^c)$. Очевидно, v^c — полиэдральная функция. Так как $\frac{\partial v^c}{\partial x_n} = \pm\frac{2}{\alpha+\beta} \neq 0$, то $v^c \in \Pi_n$.

Предложение 2 ([9], с. 269). *Пусть* $\Psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $v \in \Pi_n$. *Тогда*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi|\nabla v| dx = \int_0^\infty dt \int_{\gamma^t(v)} \Psi\, d\sigma, \tag{13}$$

где $d\sigma$ *— элемент* $(n-1)$*-мерной меры Хаусдорфа в* $\mathbb{R}^n$.

3. Если $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — функция Юнга, $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — измеримое отображение, то суперпозиция $f \circ y : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ есть измеримая функция ([8], с. 231). Положим $I_f(y) = \|f \circ y; L_1(\mathbb{R}^n)\|$, если $f \circ y \in L_1(\mathbb{R}^n)$, и $I_f(y) = +\infty$ в противном случае. Аналогичным образом функция Юнга f^{*s*} порождает функционал $I_{f^{*s*}}$.

Теорема 1. *Если* $u \in W_+$, *то* $u^c \in W_+$ *и*

$$I_f(\nabla u) \geq I_{f^{*s*}}(\nabla u^c). \tag{14}$$

Доказательство удобно разбить на несколько этапов. Вначале установим неравенство (14) для простых функций. Пусть $v \in \Pi_n$, $M_v = \sup v$, $\lambda^t(v)$, $\gamma^t(v)$, D_v, T_v — порождаемые функцией v множества (см. п. 2). Формула (13) влечет равенства

$$I_f(\nabla v) = \int_0^\infty dt \int_{\gamma^t(v)} \frac{f(\nabla v)}{|\nabla v|} d\sigma, \quad I_{f^{*s*}}(\nabla v^c) = \int_0^\infty dt \int_{\gamma^t(v^c)} \frac{f^{*s*}(\nabla v^c)}{|\nabla v^c|} d\sigma. \tag{15}$$

Фиксируем t из T_v. Множество $P_H(\gamma^t(v)\setminus D_v)$ есть объединение непересекающихся $(n-1)$-мерных выпуклых областей $\Omega'_1, \dots, \Omega'_r$. При этом $\mathrm{mes}_{n-1} P_H(\gamma^t(v) \setminus D_v) = \mathrm{mes}_{n-1}(P_H(\gamma^t(v))$. Пусть Ω' — одна из областей Ω'_k. Как отмечено в п. 2, множество $P_H^{-1}(\Omega') \cap \lambda^t(v)$ есть объединение m усеченных цилиндров Ц$_i$ $(i = 1, \dots, m)$, верхняя и нижняя грани которых принадлежат множеству $G = P_H^{-1}(\Omega') \cap \gamma^t(v)$ и задаются равенствами (9), (10). Из этих равенств легко следует, что $(n-1)$-мерные меры Хаусдорфа верхней и нижней граней цилиндра Ц$_i$ равны $\sqrt{1+|a_i|^2}\,\mathrm{mes}_{n-1}\,\Omega'$ и $\sqrt{1+|b_i|^2}\,\mathrm{mes}_{n-1}\,\Omega'$ соответственно. Аналогичные равенства верны для верхней и нижней граней цилиндра Ц^s. Положим $G(s) = P_H^{-1}(\Omega') \cap \gamma^t(v^c)$. Учитывая содержащиеся в (9)–(12) формулы для градиентов ∇v, ∇v^c и следствие леммы 2, приходим к соотношениям

$$\int_G \frac{f(\nabla v)}{|\nabla v|} d\sigma = F_m\, \mathrm{mes}_{n-1}\,\Omega', \quad \int_{G(s)} \frac{f^{*s*}(\nabla v^c)}{|\nabla v^c|} d\sigma \leq F^s\, \mathrm{mes}_{n-1}\,\Omega',$$

где F_m и F^s — левая и правая части неравенства (7). Эти соотношения, оценки (7) и произвольность выбора области $\Omega' = \Omega'_1, \dots, \Omega'_r$ влекут неравенства

$$\int_G \frac{f(\nabla v)}{|\nabla v|} d\sigma \geq \int_{G(s)} \frac{f^{*s*}(\nabla v^c)}{|\nabla v^c|} d\sigma, \quad \int_{\gamma^t(v)} \frac{f(\nabla v)}{|\nabla v|} d\sigma \geq \int_{\gamma^t(v^c)} \frac{f^{*s*}(\nabla v^c)}{|\nabla v^c|} d\sigma.$$

Неравенство $I_f(\nabla v) \geq I_{f^{*s*}}(\nabla v^c)$ вытекает из (15).

На втором этапе докажем (14), считая, что $u \in W_+$, а функция Юнга f удовлетворяет оценке $f(p) \leq \rho|p|$. Из этой оценки вытекает, что $\mathrm{dom}\, f^* \subset \{q \in \mathbb{R}^n,\ |q| \leq \rho\}$. Тогда и $\mathrm{dom}\, f^{*s} \subset \{q \in \mathbb{R}^n,\ |q| \leq \rho\}$, следовательно, $f^{*s*}(p) \leq \rho|p|$.

Выберем последовательность v_i простых функций с равномерно ограниченными носителями, сходящуюся к u в метрике $W_1^1(\mathbb{R}^n)$. Так как $v_i \to u$ в $L_1(\mathbb{R}^n)$, то в силу (8) $v_i^c \to u^c$ в $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Последовательность ∇v_i сходится к ∇u в метрике $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, поэтому найдется такая функция Юнга $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $\Phi(t)t^{-1} \to \infty$ при $t \to \infty$ и $\|\Phi(\nabla v_i);\ L_1(\mathbb{R}^n)\| \leq 1$ для всех i ([8], с. 239). В силу уже доказанного справедлива оценка $\|\Phi(|\nabla v_i^c|);\ L_1(\mathbb{R}^n)\| \leq 1$ для всех i, из которой вытекает компактность последовательности вектор-функций ∇v_i^c в топологии $\sigma(L_1, L_\infty)$ ([8], с. 239). Поскольку $v_i^c \to u^c$ в метрике $L_1(\mathbb{R}^n)$, то можно гарантировать сходимость ∇v_i^c в $\sigma(L_1, L_\infty)$. Так как оператор дифференцирования слабо замкнут, то $\nabla v_1^c \to \nabla u^c$ в $\sigma(L_1, L_\infty)$, в частности, доказано включение $u^c \in W_+$.

Справедлива цепь соотношений

$$I_f(\nabla u) = \lim_{i\to\infty} I_f(\nabla v_i) \geq \varliminf_{i\to\infty} I_{f^{*s*}}(\nabla v_i^c) \geq I_{f^{*s*}}(\nabla u^c).$$

Здесь последовательно используются сходимость $v_i \to u$ в метрике $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ и вытекающая из оценки $f(p) \leq \rho|p|$ непрерывность на $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ функционала I_f, оценка $I_f(\nabla v_i) \geq I_{f^{*s*}}(\nabla v_i^c)$, следующая из доказанной части теоремы, и полунепрерывность снизу относительно топологии $\sigma(L_1, L_\infty)$ выпуклого и непрерывного на $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ функционала $I_{f^{*s*}}$.

Третий этап доказательства: f — произвольная функция Юнга, $u \in W_+$. Пусть $f_N(p) = \sup\{p \cdot q - f^*(q) : f^*(q) \leq N\}$. Тогда имеет место оценка (2). Следовательно,

$$I_f(\nabla u) \geq I_{f_N}(\nabla u) \geq I_{f_N^{*s*}}(\nabla u^c).$$

Левая часть неравенства не зависит от N. Используя (5), имеем

$$I_f(\nabla u) \geq \sup_{N>0} I_{f_N^{*s*}}(\nabla u^c) = I_{f^{*s*}}(\nabla u^c),$$

что и приводит к неравенству (15). $\square$

Следствие. Если $u \in W$, то $|u| \in W_+$, $I_f(\nabla u) \geq I_{f^{*s*}}(\nabla |u|^c)$.

Действительно, включение $|u| \in W_+$ и равенство $\nabla|u| = \operatorname{sgn} u \cdot \nabla u$ известны, поэтому $I_f(\nabla u) = I_f(\nabla|u|) \geq I_{f^{*s*}}(\nabla|u|^c)$.

Приведем примеры применения теоремы 1. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — функция Юнга n переменных. Обозначим через $\overset{\circ}{L}{}^1_f(\Omega)$ совокупность функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, нулевые продолжения которых на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ принадлежат $W_1^1(\mathbb{R}^n)$, а градиенты ∇u таковы, что $I_f(\lambda\nabla u) < \infty$ при малых $\lambda > 0$. Равенство $\|u;\ \overset{\circ}{L}{}^1_f(\Omega)\| = \inf\{k > 0,\ I_f(\frac{\nabla u}{k}) \leq 1\}$ определяет в $\overset{\circ}{L}{}^1_f(\Omega)$ норму, относительно которой $\overset{\circ}{L}{}^1_f(\Omega)$ есть банахово пространство.

Как известно, если Ω — ограниченная область, то и $\Omega^s = S_H(\Omega)$ есть также ограниченная область. Если K — компакт, то $K^s = S_H(K)$ — также компакт ([4], с. 230). В частности, можно рассматривать банахово пространство $\overset{\circ}{L}{}^1_{f^{*s*}}(\Omega^s)$.

Теорема 2. *Если $u \in \overset{\circ}{L}{}^1_f(\Omega)$, то $|u|^c \in \overset{\circ}{L}{}^1_{f^{*s*}}(\Omega^c)$ и*

$$\|\,|u|^c;\ \overset{\circ}{L}{}^1_{f^{*s*}}(\Omega^s)\| \leq \|u;\ \overset{\circ}{L}{}^1_f(\Omega)\|. \tag{16}$$

Доказательство. Если $I_f(\lambda\nabla u) \leq 1$ при некотором λ, то $I_{f^{*s*}}(\lambda\nabla|u|^c) \leq I_f(\lambda\nabla u)$, что и влечет (15).

Следствие. Пусть $E = E(\Omega^s)$ — симметричное пространство функций на Ω^s ([7], с. 123). Если вложение $i^s : \overset{\circ}{L}{}^1_{f^{*s*}}(\Omega^s) \to E(\Omega^s)$ непрерывно, то и вложение $i : \overset{\circ}{L}{}^1_f(\Omega) \to E(\Omega)$ также непрерывно, причем нормы соответствующих операторов вложения связаны неравенством $\|i\| \leq \|i^s\|$.

Пару (K,Ω), состоящую из области Ω и принадлежащего ей компакта K, назовем конденсатором. Сопоставим конденсатору (K,Ω) множество $U(K,\Omega)$ неотрицательных финитных в Ω функций, удовлетворяющих на Ω условию Липшица и неравенству $v(x) \geq 1$ при $x \in K$. Если $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — функция Юнга, то число $C_f(K,\Omega) = \inf\{\|v;\ \overset{\circ}{L}{}^1_f(\Omega)\|,\ v \in U(K,\Omega)\}$ назовем емкостью конденсатора (K,Ω).

Теорема 3. *Пусть (K^s,Ω^s) — симметризация конденсатора (K,Ω). Тогда справедливо неравенство*

$$C_{f^{*s*}}(K^s,\Omega^s) \leq C_f(K,\Omega). \tag{17}$$

Доказательство. Если $v \in U(K,\Omega)$, то $v^s \in U(K^s,\Omega^s)$. Согласно теореме 2 $\|v^s;\ \overset{\circ}{L}{}^1_{f^{*s*}}(\Omega^s)\| \leq \|v;\ \overset{\circ}{L}{}^1_f(\Omega)\|$. Таким образом, $C_{f^{*s*}}(K^s,\Omega^s) \leq \|v;\ \overset{\circ}{L}{}^1_f(\Omega)\|$. Минимизируя по всем v из $U(K,\Omega)$, приходим к (17). $\square$

Отметим, что если функция Юнга $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ четна относительно x_n, а функция u из W_+ совпадает со своей симметризацией u^c, то $I_f(\nabla u) = I_{f^{*s*}}(\nabla u^c)$, т. е. (14) становится равенством. Действительно, в этом случае $f^{*s} = f^*$, $f^{*s*} = f^{**} = f$. Замечания аналогичного характера можно сделать применительно к теоремам 2, 3.

Основное отличие теорем 1–3 от известных принципов симметризации (см., напр., [1], [10]–[12] и приведенную там литературу) связано с анизотропностью функции f. Теоремы 1–3 очевидным образом переносятся на симметризации относительно произвольной однородной гиперплоскости $H \subset \mathbb{R}^n$. Как известно, симметризация относительно любого пространства $V \subset \mathbb{R}^n$ может быть получена как результат последовательного применения симметризации Штейнера относительно бесконечной системы гиперплоскостей ([4], с.237). В частности, таким образом могут быть получены аналоги теорем 1–3 для k-мерной симметризации по Штейнеру [10] и шаровой симметризации [1], [3], [11].

Литература

1. Полиа Г., Сегё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике* . – М.: Физматгиз, 1962. – 336 с.
2. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* – М.: Мир, 1973. – 469 с.
3. Климов В.С. *Теоремы вложения и геометрические неравенства* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1976. – Т. 40. – № 3. – С. 645–671.
4. Хадвигер Г. *Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.* — М.: Ин. лит., 1966. – 416 с.
5. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* – М.: Наука, 1974. – 808 с.
6. Коляда В.И. *Перестановки функций и теоремы вложения* // УМН. – 1989. – Т. 44. – № 5. – С. 61–94.
7. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.
8. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* – М.: Мир, 1979. – 399 с.
9. Федерер Г. *Геометрическая теория меры.* – М.: Наука, 1987. – 760 с.
10. Dubinin V.N. *Capacities and geometric transformations of subsets in n-space* // Geom. and Func. Anal. – 1993. – V. 3. – № 4. – P. 342–369.
11. Kawohl B. *Rearrangements and convexity of level sets in P.D.E.* // Lect. Notes Math. – 1985. – № 1150. – 134 p.
12. Baernstein A. *A unified approach to symmetrization* // Partial differential equations of elliptic type. Syms. Math. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. – XXXV. – P. 47–91.

Ярославский государственный университет

Поступили
первый вариант 28.01.1998
окончательный вариант 05.02.1999