ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 12 (547)

УДК 517.929

М.А. АКИВИС, В.В. ГОЛЬДБЕРГ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТКАНЕЙ ТИПА ЛАГРАНЖА

1. Ткани типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$ на X^{nr}

В работе рассматривается d-ткань $W(d,n,r)$ коразмерности r на дифференцируемом многообразии X^{nr}, образованная d слоениями F_u, $u=1,\dots,d$, находящимися в общем положении на X^{nr} и расположенными на X^{nr} дискретно. Поскольку при $d\le n$ такая ткань параллелизуема, в дальнейшем предполагается, что $d\ge n+1$. Далее рассмотрим $(n+1)$-ткани $W(n+1,n,r)$.

Слоения F_u, определяющие ткань $W(n+1,n,r)$ на X^{nr}, можно задать вполне интегрируемыми системами уравнений Пфаффа $\omega_u^i=0$, $i=1,\dots,r$, $u=1,\dots,n+1$, где любые n из этих $n+1$ систем уравнений должны быть линейно независимыми. Условия полной интегрируемости систем (1) могут быть записаны в виде $d\omega_u^i\wedge\omega_u^1\wedge\dots\wedge\omega_u^r=0$.

Всего имеется $(n+1)r$ форм ω_u^i. Формы $\omega_1^i,\dots,\omega_n^i$ линейно независимы и образуют базис на X^{nr}. Формы $\omega_1^i,\dots,\omega_n^i,\omega_{n+1}^i$ линейно зависимы на X^{nr}, и линейные зависимости между этими формами могут быть сведены (см. [1], с. 9) к следующим:

$$\omega_1^i+\dots+\omega_n^i+\omega_{n+1}^i=0. \tag{1}$$

Построим теперь однопараметрическое семейство слоений $F(t)$, определенных вполне интегрируемыми системами уравнений Пфаффа $\omega^i(t)=0$, которое содержит все слоения F_u ткани $W(n+1,n,r)$. Такое семейство может быть определено системой форм $\omega^i(t)$, связанных с формами ω_u^i посредством системы интерполяционных полиномов Лагранжа (см., напр., [2], сс. 878, 879, 883)

$$\omega^i(t)=\sum_{u=1}^{n+1}\left\{\frac{\prod\limits_{\substack{v=1\\ v\ne u}}^{n+1}(t-t_v)}{\prod\limits_{\substack{v=1\\ v\ne u}}^{n+1}(t_u-t_v)}\right\}\omega_u^i, \tag{2}$$

где $t_1,t_2,\dots,t_n,t_{n+1}$ — попарно различные вещественные числа. Легко видеть, что формы $\omega^i(t_u)=\omega_u^i$ определяют слоение F_u рассматриваемой ткани.

Определение 1. Однопараметрическое семейство слоений, определяемых на многообразии X^{nr} формами $\omega^i(t)$, где t — произвольная вещественная гладкая функция $t(x), x\in X^{nr}$, называется *тканью типа Лагранжа* (соответствующий английский термин — the Lagrange-like web), и ткань $W(n+1,n,r)$ называется *координатной тканью* ткани типа Лагранжа.

Такую ткань будем обозначать символом $LLW_t(n,r)$. Ткань $LLW_t(n,r)$ является гладкой интерполяцией дискретной ткани $W(n+1,n,r)$ на многообразии X^{nr}.

Таким образом, ткань типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$ представляет собой *множество слоений*, определенных системами $\omega^i(t)=0$.

Определение 2. Если в (2) параметр t является константой и системы 1-форм $\{\omega^i(t)\}$ не предполагаются вполне интегрируемыми, то ткань типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$ называется *тканью Лагранжа* и обозначается символом $LW_t(n,r)$.

Если в (2) параметр t является константой, то ткань типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$ является *тканью Лагранжа* $LW_t(n,r)$ *с голономной координатной тканью.*

Напомним, что ткань типа Веронезе $VLW_t(n,r)$ была определена в [3] как однопараметрическое семейство слоений, определенных вполне интегрируемыми системами уравнений

$$\omega_1^i + t\omega_2^i + \cdots + t^{n-1}\omega_n^i = 0,$$

где t — произвольная вещественная функция $t(x)$, $x \in X^{nr}$.

Легко видеть, что ткань типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$ содержит все $n+1$ слоений координатной ткани $W(n+1,n,r)$, в то время как ткань типа Веронезе $VLW_t(n,r)$ содержит только три слоения ткани $W(n+1,n,r)$, определенных системами уравнений $\{\omega_1^i = 0\}$, $\{\omega_n^i = 0\}$ и $\{\omega_{n+1}^i = 0\}$, соответствующими $t = 0, \infty, 1$. Ввиду этого можно сказать, что *структура ткани типа Лагранжа* $LLW_t(n,r)$ *более жесткая, чем структура ткани типа Веронезе* $VLW_t(n,r)$.

Взяв d различных слоений из семейства $\omega^i(t) = 0$ (см. (2)), получим *d-ткань-представитель* ткани типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$. Таким образом, d-ткань-представитель является d-тканью $W(d,n,r)$, образованной d слоениями из семейства $\omega^i(t) = 0$ (см. (2)) на X^{nr} (см. [4], [5] для $n = 2$, и [1], [6], [7] для $n \geq 2$).

При изучении дифференциальной геометрии тканей типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$ *следует рассматривать только такие свойства ткани* $LLW_t(n,r)$, *которые имеют место для всех ее тканей-представителей.*

Определение 3. $(n+1)$-ткань $W(n+1,n,r)$ называется *параллелизуемой*, если ее можно отобразить на $(n+1)$-ткань, образованную $n+1$ слоениями, состоящими из параллельных $(n-1)r$-плоскостей (nr)-мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{nr}$. Ткань типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$ называется *параллелизуемой*, если все ее $(n+1)$-ткани-представители являются параллелизуемыми.

Из определения 3 следует, что *ткань типа Лагранжа* $LLW_t(n,r)$ *не является параллелизуемой, если хотя бы одна из ее* $(n+1)$*-тканей-представителей не является параллелизуемой.*

В данной работе изучаются ткани типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$. Доказывается, что среди тканей типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$, $n \geq 2$, $r \geq 1$, только ткани $LLW(2,r)$, $r \geq 1$, являются непараллелизуемыми. Класс непараллелизуемых тканей типа Лагранжа $LLW_t(2,r)$, $r \geq 1$, так же, как и класс непараллелизуемых тканей типа Веронезе $VLW_t(2,r)$, $r \geq 1$ (см. [3]), совпадает со множеством слоений изоклинных подмногообразий изоклинной 3-ткани $W(3,2,r) \subset X^{2r}$.

Отметим, что ткани Лагранжа $LW_t(n,r)$ заслуживают отдельного изучения, поскольку они не являются в такой степени жесткими, как ткани типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$.

2. Ткань типа Лагранжа $LLW_t(2,1)$

Пример. 3-ткань $W(3,2,1)$ на двумерном многообразии X^2 определяется тремя уравнениями Пфаффа

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0, \tag{3}$$

и условия их полной интегрируемости имеют следующий вид:

$$d\omega_u = \omega_u \wedge \theta_u, \quad u = 1,2,3. \tag{4}$$

Формы в левых частях уравнений (3) линейно зависимы. В этом случае линейная зависимость (1) этих форм принимает вид $-\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Заметим, что структурные уравнения (4) координатной ткани $W(3,2,1)$ могут быть приведены к виду

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \theta, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \theta, \quad d\theta = K\omega_1 \wedge \omega_2,$$

где K — кривизна ткани (см., напр., [5], с. 17). Ткань $W(3,2,1)$ параллелизуема тогда и только тогда, когда $K = 0$ (см., напр., [5], с. 17–18). Таким образом, если $K \neq 0$, то ткань $W(3,2,1)$ не параллелизуема. Но ткань $W(3,2,1)$ является 3-тканью-представителем ткани типа Лагранжа $LLW_t(2,1)$. Поэтому по определению 3 *ткань типа Лагранжа* $LLW_t(2,1)$ *также не параллелизуема.*

В этом случае интерполяционная формула Лагранжа (2) имеет вид

$$\omega(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}\omega_1 + \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}\omega_2 + \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\omega_3. \tag{5}$$

Если в формуле (5) положить $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = \infty$, эта формула примет вид

$$\omega(t) = (1-t)\Big[\omega_1 + \frac{t}{1-t}\omega_2\Big]. \tag{6}$$

При $\frac{t}{1-t} = \lambda$ уравнение $\omega(t) = 0$ имеет вид $\omega_1 + \lambda\omega_2 = 0$ и совпадает с уравнением (13) работы [3]. Поскольку $r = 1$, уравнение $\omega(t) = 0$ вполне интегрируемо и определяет однопараметрическое семейство изоклинных кривых ткани $W(3,2,1)$ на X^2.

Таким образом, *ткань типа Лагранжа* $LLW_t(2,1)$ *с координатной* 3*-тканью* $W(3,2,1)$ *совпадает с семейством изоклинных кривых* 3*-ткани* $W(3,2,1)$.

В работе [3] авторами доказано, что ткань типа Веронезе $VLW_t(2,1)$ с координатной 3-тканью $W(3,2,1)$ совпадает также с семейством изоклинных кривых 3-ткани $W(3,2,1)$. Таким образом, *ткань типа Лагранжа* $LLW_t(2,1)$ *с координатной* 3*-тканью* $W(3,2,1)$ *является тканью типа Веронезе* $VLW_t(2,1)$ *с той же самой координатной* 3*-тканью* $W(3,2,1)$.

3. Ткани типа Лагранжа $LLW_t(2,r)$

Рассмотрим 3-ткань $W(3,2,r)$ на многообразии X^{2r}. Линейная зависимость (1) форм ω_u^i, $u = 1,2,3$, определяющих ткань $W(3,2,r)$ на X^{2r}, имеет вид $-\omega_3^i = \omega_1^i + \omega_2^i$. Многочлен Лагранжа этой ткани имеет вид (5), где формы ω_u следует заменить на формы ω_u^i. Аналогично тому, как это было сделано ранее, полагая в формуле Лагранжа (5) $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = \infty$, получим выражения

$$\omega^i(t) = (1-t)\Big[\omega_1^i + \frac{t}{1-t}\omega_2^i\Big]$$

(ср. с (6)). Системы уравнений $\omega^i(t) = 0$ определяют на X^{2r} распределения Лагранжа, совпадающие с изоклинными распределениями, рассматривавшимися в ([5], с. 111; см. также [3]). Если эти распределения интегрируемы, то ткань $W(3,2,r)$ является изоклинной (определение изоклинной 3-ткани см. в [8], [9] или [2], § 3.2), и указанные распределения образуют ткань типа Лагранжа $LLW_t(2,r)$ с координатной тканью $W(3,2,r)$.

В [3] авторами было доказано, что ткань типа Веронезе $VLW_t(2,r)$ с координатной 3-тканью $W(3,2,r)$ является множеством слоений изоклинных подмногообразий 3-ткани $W(3,2,r)$. Таким образом, *ткань типа Лагранжа* $LLW_t(2,r)$ *с координатной* 3*-тканью* $W(3,2,r)$ *является тканью типа Веронезе* $VLW_t(2,r)$ *с той же самой координатной* 3*-тканью* $W(3,2,r)$.

Из последнего результата вытекают следующие свойства тканей типа Лагранжа $LLW_t(2,r)$ (см. [3]).

- По определению 1 3*-ткань* $W(3,2,r)$, $r \geq 2$, *порождает ткань типа Лагранжа* $LLW_t(2,r)$ *тогда и только тогда, когда она изоклинная. Тензор кручения такой изоклинной ткани* $W(3,2,r)$ *имеет вид*

$$a^i_{jk} = a_{[j}\delta^i_{k]},$$

где a_j *— ковектор.*

- Ткань типа Лагранжа $LLW_t(2,r)$ называется *изоклинной*, если все ее 3-ткани-представители являются изоклинными. *Все 3-ткани-представители ткани типа Лагранжа $LLW_t(2,r)$ являются изоклинными, и ткань типа Лагранжа $LLW_t(2,r)$ сама является изоклинной. Тензоры кручения 3-тканей-представителей ткани $LLW_t(2,r)$ имеют вид*

$$c^i_{jk} = c_{[j}\delta^i_{k]},$$

где c_j — ковектор.

- Изоклинная 3-ткань параллелизуема тогда и только тогда, когда ее тензоры кривизны и кручения обращаются в нуль, т. е. если $a_i = 0$ и $b^i_{jkl} = 0$, где b^i_{jkl} — тензор кривизны 3-ткани (см. [5], с. 18–19). Таким образом, в общем случае, все 3-ткани-представители ткани типа Лагранжа $LLW_t(2,r)$ не параллелизуемы. Поэтому по определению в общем случае *3-ткань типа Лагранжа $LLW_t(2,r)$ не параллелизуема.*
- 3-ткань $W(3,2,r)$ называется *паратактической*, если ее тензор кручения обращается в нуль (см. [4] или [9]), т. е. если $a^i_{jk} = 0$ или $a_i = 0$. Паратактическую 3-ткань будем обозначать символом $PW(3,2,r)$. Ткань типа Лагранжа $LLW_t(2,r)$ называется *паратактической*, если все ее 3-ткани-представители являются паратактическими. Паратактическую ткань типа Лагранжа будем обозначать символом $PLW_t(2,r)$. Следующий результат вытекает из результатов § 5 работы [3]: *если координатная 3-ткань $W(3,2,r)$, $r>2$, является паратактической 3-тканью $PW(3,2,r)$, то ткань типа Лагранжа $LLW_t(2,r)$ является паратактической тканью Веронезе $PVW_t(2,r)$.*
- Со всякой тканью $W(3,2,r)$ ассоциируется почти грассманова структура $\mathbb{AG}(1,r+1)$ (см. [3] или [9], [10]). 3-*ткань $W(3,2,r)$ порождает ткань типа Лагранжа $LLW_t(2,r)$ тогда и только тогда, когда почти грассманова структура $\mathbb{AG}(1,r+1)$, ассоциированная с $W(3,2,r)$, является r-полуинтегрируемой. Почти грассмановы структуры $\mathbb{AG}(1,r+1)$, ассоциированные с 3-тканями-представителями ткани $LLW_t(2,r)$, также являются r-полуинтегрируемыми.*
- *Если одно распределение из семейства распределений Лагранжа $\omega^i(t) = 0$, $t \neq 0,\infty,1$, интегрируемо, то все другие распределения этого семейства также интегрируемы*, т. е. гипотеза Захаревича, сформулированная в [11] (см. также [12]) и доказанная в [13] для тканей Веронезе $VW_t(n,r)$, справедлива для тканей типа Лагранжа $LLW_t(2,r)$.

4. Ткани типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$, $n>2$, $r>1$

Координатная $(n+1)$-ткань для ткани типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$ является тканью $W(n+1,n,r)$ коразмерности r на (nr)-мерном дифференцируемом многообразии X^{nr}. Слои F_u, $u = 1,2,\dots,n+1$, ткани $W(n+1,n,r)$ имеют коразмерность r. Базисными формами на X^{nr} являются формы ω^i_α, $\alpha = 1,\dots,n$, $i = 1,\dots,r$, определяющие слоения F_α, и $(n+1)$-е слоение F_{n+1} ткани $W(n+1,n,r)$ определяется формами (см. (1))

$$\omega^i_{n+1} = -\omega^i_1 - \dots - \omega^i_n. \tag{7}$$

Как показано в [1] (см. уравнения (1.2.16), (1.2.17) и (1.2.24)), формы ω^i_α удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^i_\alpha = \omega^j_\alpha \wedge \theta^i_j + \sum_{\beta\neq\alpha} a^i_{jk}[\alpha,\beta]\omega^j_\alpha \wedge \omega^k_\beta, \tag{8}$$

где

$$a^i_{jk}[\alpha,\beta] = a^i_{kj}[\beta,\alpha], \tag{9}$$

$$\sum_{(\alpha,\beta)} a^i_{(jk)}[\alpha,\beta] = 0. \tag{10}$$

Формы θ^i_j определяют аффинную связность Γ_{n+1} на многообразии X^{nr} (см. [1], § 1.2; [6], [7] или [9]). Они удовлетворяют следующим структурным уравнениям (см. [1], § 1.2; [6], [7] или [9]):

$$d\theta^i_j - \theta^k_j \wedge \theta^i_k = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} b^i_{jkl}[\alpha,\beta]\omega^k_\alpha \wedge \omega^l_\beta. \tag{11}$$

Величины $\{a^i_{jk}[\alpha,\beta]\}$ и $\{b^i_{jkl}[\alpha,\beta]\}$ в (8) и (11) образуют тензоры, которые называются соответственно *тензором кручения* и *тензором кривизны* ткани $W(n+1,n,r)$.

Тензоры $\{a^i_{jk}[\alpha,\beta]\}$ и $\{b^i_{jkl}[\alpha,\beta]\}$ удовлетворяют некоторым соотношениям. Отметим одно из них

$$b^i_{jkl}[\alpha,\beta] = \frac{1}{2}\left(a^i_{jkl}[\gamma,\alpha,\beta] - a^i_{ljk}[\beta,\gamma,\alpha]\right), \quad \gamma \neq \alpha,\beta, \tag{12}$$

где $a^i_{jkl}[\alpha,\beta,\gamma]$ — ковариантные производные тензора $a^i_{jk}[\alpha,\beta]$ в связности Γ_{n+1}.

Уравнения (12) показывают, что если $n > 2$, то тензор кривизны ткани $W(n+1,n,r)$ выражается через ковариантные производные ее тензора кручения и сам тензор кручения. Это не имеет места при $n = 2$, поскольку в формулах (12) $\gamma \neq \alpha,\beta$.

Вышеуказанное свойство имеет следующий геометрический смысл: *если тензор кручения ткани $W(n+1,n,r)$, $n > 2$, обращается в нуль, т. е. $a^i_{jk}[\alpha,\beta] = 0$, то ткань $W(n+1,n,r)$ параллелизуема.*

Общая формула Лагранжа для ткани $W(n+1,n,r)$ имеет вид (2).

Полагая $t_1 = 0$, $t_2 = 1,\dots,t_n = n-1, t_{n+1} = \infty$ в (2), получаем

$$\omega^i(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}\binom{n-1}{\alpha-1}\omega^i_\alpha \prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{n}(t-(\beta-1)). \tag{13}$$

Из уравнений $\omega^i(t) = 0$ следует, что вдоль слоя любого слоения Лагранжа $\omega^i(t) = 0$ выполняется

$$\omega^i_1 = \sum_{\alpha=2}^{n}(-1)^{\alpha}\binom{n-1}{\alpha-1}\frac{t}{t-(\alpha-1)}\omega^i_\alpha. \tag{14}$$

Теорема 1. *$(n+1)$-ткань $W(n+1,n,r)$, $n > 2$, $r > 1$, порождает ткань типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$ тогда и только тогда, когда ткань $W(n+1,n,r)$ параллелизуема.*

Доказательство. Внешнее дифференцирование соотношений (14) приводит к уравнениям

$$dt \wedge \sum_{\alpha=2}^{n}(-1)^{\alpha}\binom{n-1}{\alpha-1}\frac{1-\alpha}{t-(\alpha-1)}\omega^i_\alpha - d\omega^i_1 + \sum_{\alpha=2}^{n}(-1)^{\alpha}\binom{n-1}{\alpha-1}\frac{t}{t-(\alpha-1)}d\omega^i_\alpha = 0. \tag{15}$$

Применив затем структурные уравнения (8) и заменив всюду формы ω^i_1 их значениями, взятыми из (14), получим внешнее квадратичное уравнение, которое не будем выписывать, но на которое будем ссылаться, обозначая его как $(*)$. Уравнение $(*)$ содержит только формы $\omega^i_2,\dots,\omega^i_n$. Следовательно, dt выражается через $\omega^i_2,\dots,\omega^i_n$. Запишем выражение для dt в виде

$$\frac{dt}{(t-1)(t-2)\dots(t-(n-1))} = p_{2k}\omega^k_2 + \dots + p_{nk}\omega^k_n. \tag{16}$$

Подставляя dt из (16) во внешнее квадратичное уравнение $(*)$ и собирая члены, содержащие $\omega^k_\gamma \wedge \omega^l_\gamma$, получаем

$$(1-\gamma)(t-1)(t-2)\dots(t-(n-1))p_{\gamma[k}\delta^i_{l]} + \left[(-1)^{\gamma}\binom{n-1}{\gamma-1}t - (t-(\gamma-1))\right] t a^i_{[kl]}[1,\gamma] = 0. \tag{17}$$

Ткань $W(n+1,n,r)$, $n>2$, $r>1$, порождает ткань типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$ тогда и только тогда, когда уравнение (17) удовлетворяется тождественно для любой вещественной функции t. Таким образом, коэффициенты при всех степенях t должны обращаться в нуль. Приравнивая нулю коэффициент при t^0, получаем

$$p_{\gamma[k}\delta^i_{l]} = 0. \tag{18}$$

Если $r>1$, то из уравнений (18) следует

$$p_{\gamma k} = 0, \quad \gamma = 2,\dots,n. \tag{19}$$

В соответствии с (19), из уравнений (17) имеем

$$a^i_{[kl]}[1,\gamma] = 0, \quad \gamma = 2,\dots,n, \tag{20}$$

т. е. величины $a^i_{kl}[1,\gamma]$ симметричны по индексам k и l.

Собирая во внешнем квадратичном уравнении $(*)$ члены, содержащие $\omega^k_\gamma \wedge \omega^l_\delta$, $\gamma\neq\delta$, получаем

$$\begin{aligned} a^i_{kl}[1,\gamma](-1)^\delta \binom{n-1}{\delta-1}\left[t-(\gamma-1)+(-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1}t\right] - {} \\ - a^i_{kl}[1,\delta](-1)^\gamma \binom{n-1}{\gamma-1}\left[t-(\delta-1)+(-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1}t\right] + {} \\ + a^i_{kl}[\gamma,\delta]\left[(-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1}(t-(\delta-1)) - (-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1}(t-(\gamma-1))\right] = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Покажем теперь, что по индексам k и l симметричны не только величины $a^i_{kl}[1,\gamma]$, но и величины $a^i_{kl}[\gamma,\delta]$, $\gamma,\delta = 2,\dots,n$, $\gamma\neq\delta$. Для этого проальтернируем уравнения (21) по индексам k и l. В соответствии с (20), это приводит к уравнению

$$a^i_{kl}[\gamma,\delta]\left[(-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1}(t-(\delta-1)) - (-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1}(t-(\gamma-1))\right] = 0. \tag{22}$$

Приравняв нулю коэффициент при t в (22), получаем

$$a^i_{[kl]}[\gamma,\delta]\left[(-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1} - (-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1}\right] = 0.$$

Если γ и δ одной четности, то $\binom{n-1}{\gamma-1} - \binom{n-1}{\delta-1} \neq 0$, поскольку $\gamma\neq\delta$. Если γ и δ различной четности, то

$$\binom{n-1}{\gamma-1} + \binom{n-1}{\delta-1} \neq 0.$$

В обоих случаях получаем $a^i_{[kl]}[\gamma,\delta] = 0$, $\gamma,\delta = 2,\dots,n$; $\gamma\neq\delta$.

Таким образом, все компоненты тензора кручения $a^i_{kl}[\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta = 1,\dots,n$, симметричны по индексам k и l.

Уравнение (21) — это уравнение первого порядка по t. Таким образом, должны обращаться в нуль коэффициенты при t и t^0, откуда следует

$$\begin{aligned} a^i_{kl}[1,\gamma](-1)^\delta \binom{n-1}{\delta-1}\left[1+(-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1}\right] - \\ - a^i_{kl}[1,\delta](-1)^\gamma \binom{n-1}{\gamma-1}\left[1+(-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1}\right] + \\ + a^i_{kl}[\gamma,\delta]\left[(-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1} - (-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1}\right] = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

и

$$\begin{aligned} a^i_{kl}[1,\gamma](-1)^\delta \binom{n-1}{\delta-1}(1-\gamma) - a^i_{kl}[1,\delta](-1)^\gamma \binom{n-1}{\gamma-1}(1-\delta) + \\ + a^i_{kl}[\gamma,\delta]\left[(-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1}(1-\delta) - (-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1}(1-\gamma)\right] = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Если $n = 3$, то $\gamma = 2$ и $\delta = 3$ (или $\gamma = 3$ и $\delta = 2$), и уравнения (23) и (24) принимают вид

$$-a^i_{kl}[1,2] + a^i_{kl}[2,3] = 0 \quad (25)$$

и

$$a^i_{kl}[1,2] - 5a^i_{kl}[2,3] + 4a^i_{kl}[1,3] = 0. \quad (26)$$

Кроме того, выполняется соотношение (см. (10))

$$a^i_{kl}[1,2] + a^i_{kl}[2,3] + a^i_{kl}[1,3] = 0. \quad (27)$$

Определитель однородной системы уравнений (25)–(27) равен -12. Система имеет только тривиальное решение $a^i_{kl}[1,2] = a^i_{kl}[2,3] = a^i_{kl}[1,3] = 0$.

Если $n = 4$, то для γ и δ, возможны следующие значения: $\gamma = 2$, $\delta = 3$; $\gamma = 2$, $\delta = 4$; $\gamma = 3$, $\delta = 4$.

Для этих трех случаев уравнения (23) и (24) дают следующие шесть уравнений:

$$\begin{aligned} -2a^i_{kl}[1,2] + a^i_{kl}[2,3] + a^i_{kl}[1,3] &= 0, \\ a^i_{kl}[1,2] + 2a^i_{kl}[2,3] - 3a^i_{kl}[1,3] &= 0, \\ 2a^i_{kl}[1,2] - 3a^i_{kl}[1,4] + a^i_{kl}[2,4] &= 0, \\ -a^i_{kl}[1,2] + 9a^i_{kl}[1,4] - 8a^i_{kl}[2,4] &= 0, \\ -a^i_{kl}[1,3] + 3a^i_{kl}[1,4] - 2a^i_{kl}[3,4] &= 0, \\ -2a^i_{kl}[1,3] - 9a^i_{kl}[1,4] + 11a^i_{kl}[3,4] &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Легко видеть, что сумма коэффициентов в каждом из уравнений системы (28) равна нулю. Таким образом, система (28) имеет решение

$$a^i_{kl}[1,2] = a^i_{kl}[1,3] = a^i_{kl}[1,4] = a^i_{kl}[2,3] = a^i_{kl}[2,4] = a^i_{kl}[3,4].$$

В соответствии с (10), отсюда следует $a^i_{kl}[\alpha,\beta] = 0$, $\alpha,\beta = 1,2,3,4$, $\alpha \neq \beta$. Поэтому, если $n = 4$, то ранг матрицы коэффициентов системы (28) равен пяти, а ранг матрицы коэффициентов системы, составленной из уравнений (28) и (10), равен шести.

Для произвольного $n \geq 3$ имеем $\binom{n}{2}$ неизвестных $a^i_{kl}[\alpha,\beta] = 0$, $\alpha,\beta = 1,\dots,n$, $\alpha \neq \beta$, и $2\binom{n-1}{2} + 1$ уравнений (23), (24), (10), связывающих эти неизвестные.

Как было доказано ранее, если $n = 3$, то имеем однородную систему из трех уравнений с тремя неизвестными, и эта система имеет только тривиальное решение.

Если $n > 3$, число уравнений (23), (24), (10) равно $2\binom{n-1}{2}+1$, что больше чем число неизвестных $\binom{n}{2}$. Сумма коэффициентов каждого из уравнений (23) и (24) равна нулю. Таким образом, при $n > 3$ система (23)–(24) имеет решение

$$a^i_{kl}[1,2] = \cdots = a^i_{kl}[n-1,n].$$

В соответствии с (10), отсюда следует $a^i_{kl}[\alpha,\beta] = 0$, $\alpha,\beta = 1,\ldots,n$, $\alpha \neq \beta$. Следовательно, при произвольном $n > 3$ ранг матрицы коэффициентов системы (28) равен $\binom{n}{2} - 1$, а ранг матрицы коэффициентов системы, состоящей из уравнений (28) и (10), равен $\binom{n}{2}$.

В соответствии с замечанием, сделанном ранее в этом параграфе, это значит, что координатная ткань $W(n+1,n,r)$, $n > 2$, $r > 1$, ткани типа Лагранжа $LLW(n,r)$ параллелизуема. □

Следствие 1. Параметр t постоянен на ткани типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$, $n > 2$, $r > 1$.

Доказательство. Утверждение следует из уравнений (16) и (19). □

Теорема 2. *Ткань типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$, $n > 2$, $r > 1$, параллелизуема и является параллелизуемой тканью Лагранжа $LW_t(n,r)$ с голономной координатной тканью.*

Доказательство. Действительно, как было доказано в теореме 1, ткань $W(n+1,n,r)$, $n>2$, $r > 1$, порождающая ткань типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$, параллелизуема, т. е. $a^i_{jk}[\alpha,\beta] = 0$, $\alpha,\beta = 1,\ldots,n$, и для такой ткани $dt = 0$ согласно следствию 1. Предположим, что первые n слоений $(n+1)$-ткани-представителя ткани $LLW_t(n,r)$ определены уравнениями

$$\rho^i_\gamma = 0, \quad \gamma = 1,\ldots,n; \quad i = 1,\ldots,r,$$

где

$$\rho^i_\gamma = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}\binom{n-1}{\alpha-1}\omega^i_\alpha\prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{n}(s_\gamma-(\beta-1)), \tag{29}$$

и множество $\{s_\gamma\}$ отлично от множества $\{t_\gamma\} = \{0,1,\ldots,n-1\}$. Тогда из $ds_\gamma = 0$, (29) и (8) имеем

$$d\rho^i_\alpha = \rho^j_\alpha \wedge \theta^i_j.$$

Поэтому тензор кручения любой $(n+1)$-ткани-представителя ткани $LLW_t(n,r)$ обращается в нуль, и $(n+1)$-ткань-представитель является параллелизуемой. Поскольку рассматриваемая $(n+1)$-ткань-представитель произвольна, отсюда следует, что ткань типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$ сама является параллелизуемой. Поскольку $dt = 0$, то ткань типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$ является параллелизуемой тканью Лагранжа $LW_t(n,r)$ с голономной координатной тканью. □

5. Ткани типа Лагранжа $LLW_t(3,1)$

Рассмотрим теперь случай $n = 3$, $r = 1$. Этот случай не изучался в теореме 1.

Координатная 4-ткань для ткани типа Лагранжа $LLW_t(3,1)$ является 4-тканью $W(4,3,1)$ коразмерности один на трехмерном многообразии X^3. Слои F_u, $u = 1,2,3,4$, 4-ткани $W(4,3,1)$ имеют коразмерность один. Базисными формами на X^3 являются формы ω_α, $\alpha = 1,2,3$, определяющие слоения F_α, а четвертое слоение F_4 ткани $W(4,3,1)$ определяется формой

$$\omega_4 = -\omega_1 - \omega_2 - \omega_3$$

(ср. (1)). Из (8) следует, что структурные уравнения ткани $W(4,3,1)$ имеют вид

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \theta + a[1,2]\omega_1 \wedge \omega_2 + a[1,3]\omega_1 \wedge \omega_3,$$
$$d\omega_2 = \omega_2 \wedge \theta + a[2,1]\omega_2 \wedge \omega_1 + a[2,3]\omega_2 \wedge \omega_3,$$
$$d\omega_3 = \omega_3 \wedge \theta + a[3,1]\omega_3 \wedge \omega_1 + a[3,2]\omega_3 \wedge \omega_2,$$

где $a[\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta = 1,2,3$, $\alpha \neq \beta$, — компоненты тензора кручения ткани $W(4,3,1)$, удовлетворяющие условиям

$$a[1,2] = a[2,1], \quad a[2,3] = a[3,2], \quad a[3,1] = a[1,3]$$

и

$$a[1,2] + a[2,3] + a[3,1] = 0$$

(см. (9) и (10)).

Из общей формулы Лагранжа (2) следует, что для ткани $W(4,3,1)$ интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид

$$\omega(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)}\omega_1 + \frac{(t-t_1)(t-t_3)(t-t_4)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)}\omega_2 + \\ + \frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_4)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_4)}\omega_3 + \frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)}\omega_4 \quad (30)$$

(ср. (13)). Полагая $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = \infty$ в (30), получаем

$$\omega(t) = \frac{1}{2}[(t-1)(t-2)\omega_1 - 2t(t-2)\omega_2 + t(t-1)\omega_3] \quad (31)$$

(ср. (14)). Из $\omega(t) = 0$ следует

$$\omega_1 = \frac{2t}{t-1}\omega_2 - \frac{t}{t-2}\omega_3 \quad (32)$$

(ср. (15)).

Для нахождения условий существования интерполяции Лагранжа для ткани $W(4,3,1)$ исследуем уравнение Пфаффа $\omega(t) = 0$. Продифференцировав это уравнение внешним образом, получаем следующее внешнее квадратичное уравнение:

$$dt \wedge [(2t-3)\omega_1 - 4(t-1)\omega_2 + (2t-1)\omega_3] + \\ + (t-1)(t-2)d\omega_1 - 2t(t-2)d\omega_2 + t(t-1)d\omega_3 = 0. \quad (33)$$

Уравнения (32) и (33) показывают, что dt является линейной комбинацией форм ω_2 и ω_3. Запишем эту линейную комбинацию в виде

$$\frac{dt}{(t-1)(t-2)} = a\omega_2 + b\omega_3. \quad (34)$$

Подставим (34) в (33), затем применим структурные уравнения (8) и уравнения (32) и приравняем нулю коэффициент при $\omega_2 \wedge \omega_3$. В результате получим уравнение

$$-2a(t-1)^2 - 2b(t-2)^2 + t(3t-1)a[1,2] + t(-3t+5)a[2,3] - 4ta[3,1] = 0. \quad (35)$$

Ткань $W(4,3,1)$ порождает ткань типа Лагранжа $LLW_t(3,1)$ тогда и только тогда, когда уравнение (35) удовлетворяется тождественно для любой вещественной функции t. Собирая в (35) члены, содержащие t^0, получаем

$$a = -4b. \quad (36)$$

Затем, собирая в (35) члены, содержащие t^2 и t, и применяя (10) и (36), получаем

$$\begin{aligned} a[1,2]-a[2,3]&=-2b,\\ 3a[1,2]+9a[2,3]&=8b. \end{aligned} \tag{37}$$

Разрешая систему уравнений (37), находим $a[1,2]=-\frac{5b}{6}$, $a[2,3]=\frac{7b}{6}$. Из (10) следует $a[3,1]=-\frac{b}{3}$.

В результате приходим к тому, что все компоненты тензора кручения выражаются только через функцию b, и структурные уравнения (8) принимают вид

$$\begin{aligned} d\omega_1&=\omega_1\wedge\theta-\frac{5b}{6}\omega_1\wedge\omega_2-\frac{b}{3}b\omega_1\wedge\omega_3,\\ d\omega_2&=\omega_2\wedge\theta-\frac{5b}{6}\omega_2\wedge\omega_1+\frac{7b}{6}\omega_2\wedge\omega_3,\\ d\omega_3&=\omega_3\wedge\theta-\frac{b}{3}\omega_3\wedge\omega_1+\frac{7b}{6}\omega_3\wedge\omega_2. \end{aligned} \tag{38}$$

При этом уравнение (34) принимает вид

$$d\ln\frac{t-2}{t-1}=b(-4\omega_1+\omega_2). \tag{39}$$

Дифференцируя уравнение (39) внешним образом, получаем следующее внешнее квадратичное уравнение:

$$(db-b\theta)\wedge(-4\omega_1+\omega_2)-\frac{10b^2}{3}\omega_1\wedge\omega_2-\frac{35b^2}{6}\omega_2\wedge\omega_3-\frac{b^2}{3}\omega_3\wedge\omega_1=0. \tag{40}$$

Уравнение (40) показывает, что форма $db-b\theta$ является линейной комбинацией форм ω_1, ω_2 и ω_3:

$$db-b\theta=b_1\omega_1+b_2\omega_2+b_2\omega_3. \tag{41}$$

Подставляя выражение для $db-b\theta$ из (41) в (40) и приравнивая нулю коэффициенты при $\omega_1\wedge\omega_2$, $\omega_2\wedge\omega_3$ и $\omega_3\wedge\omega_1$, получаем

$$b_1=-\frac{5b^2}{6},\quad b_2+4b_3=\frac{35b^2}{6},\quad b_1=-\frac{b^2}{3}.$$

Отсюда следует $b=0$. Принимая в учет (36), получаем

$$a=0. \tag{42}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 3. *4-ткань $W(4,3,1)$ порождает ткань типа Лагранжа $LLW_t(3,1)$ тогда и только тогда, когда она параллелизуема.*

Следствие 2. Параметр t постоянен на ткани типа Лагранжа $LLW_t(3,1)$.

Доказательство. Утверждение следует из уравнений (34) и (42). □

Теорема 4. *Ткань типа Лагранжа $LLW_t(3,1)$ параллелизуема и является параллелизуемой тканью Лагранжа $LW_t(3,1)$ с голономной координатной тканью.*

Доказательство. Предположим, что первые три слоения 4-ткани-представителя ткани $LLW_t(3,1)$ определены параметрами s_α, $\alpha = 1,2,3$, где множество $\{s_\alpha\}$ отлично от множества $\{t_\alpha\} = \{0,1,2\}$. Введем обозначение $\omega(s_\alpha) = \rho_\alpha$ и положим $\rho_4 = -\rho_1 - \rho_2 - \rho_3$. По теореме 3 координатная 4-ткань $W(4,3,1)$ ткани типа Лагранжа $LLW_t(3,1)$ параллелизуема. Таким образом, ее тензор кручения обращается в нуль, и структурные уравнения (38) принимают вид $d\omega_\alpha = \omega_\alpha \wedge \theta$, $\alpha = 1,2,3$. Для параллелизуемой ткани $W(4,3,1)$ имеем $a = b = 0$. В силу следствия 1 имеем $ds_\alpha = 0$. Отсюда, учитывая (31) и (8), получаем $d\rho_\alpha = \rho_\alpha \wedge \theta$. Поэтому тензор кручения 4-ткани-представителя ткани $LW_t(3,1)$ обращается в нуль, а сама 4-ткань-представитель является параллелизуемой. Поскольку рассматриваемая 4-ткань-представитель произвольна, отсюда следует, что ткань типа Лагранжа $LLW_t(3,1)$ параллелизуема. Поскольку $dt = 0$, ткань типа Лагранжа $LLW_t(3,1)$ является параллелизуемой тканью Лагранжа $LW_t(3,1)$ с голономной координатной тканью. □

6. Ткани типа Лагранжа $LLW_t(n,1)$, $n > 3$

Рассмотрим теперь случай $n > 3$, $r = 1$. Этот случай также не изучался в теореме 1.

Координатная $(n+1)$-ткань для ткани типа Лагранжа $LLW_t(n,1)$, $n > 3$, является $(n+1)$-тканью $W(n+1,n,1)$ коразмерности один на n-мерном многообразии X^n. Слои F_u, $u = 1,\dots,n+1$, ткани $W(n+1,n,1)$ имеют коразмерность один. Базисными формами на X^n являются формы ω_α, $\alpha = 1,\dots,n$, определяющие слоения F_α, и слоение F_{n+1} ткани $W(n+1,n,1)$ определяется формой (ср. (1))

$$\omega_{n+1} = -\omega_1 - \dots - \omega_n.$$

Структурные уравнения ткани $W(n+1,n,1)$ имеют вид (8):

$$d\omega_\alpha = \omega_\alpha \wedge \theta + \sum_{\beta\neq\alpha} a[\alpha,\beta]\omega_\alpha \wedge \omega_\beta, \tag{43}$$

где $a[\alpha,\beta] = a[\beta,\alpha]$,

$$\sum_{(\alpha,\beta)} a[\alpha,\beta] = 0, \tag{44}$$

а $a[\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta = 1,\dots,n$, $\alpha \neq \beta$, — компоненты тензора кручения ткани $W(n+1,n,1)$ (ср. уравнения (8), (9) и (10)).

Общая формула Лагранжа для ткани $W(n+1,n,1)$ имеет вид (2).

Полагая $t_1 = 0$, $t_2 = 1,\dots,t_n = n-1$, $t_{n+1} = \infty$ в (2), получаем (ср. (13))

$$\omega(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}\binom{n-1}{\alpha-1}\omega_\alpha \prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{n}(t-(\beta-1)).$$

Из уравнения $\omega(t) = 0$ следует (ср. (14))

$$\omega_1 = \sum_{\alpha=2}^{n}(-1)^\alpha\binom{n-1}{\alpha-1}\frac{t}{t-(\alpha-1)}\omega_\alpha. \tag{45}$$

Теорема 5. *$(n+1)$-ткань $W(n+1,n,1)$, $n > 3$, порождает ткань типа Лагранжа $LLW_t(n,1)$ тогда и только тогда, когда ткань $W(n+1,n,1)$ параллелизуема.*

Доказательство. Дифференцируя (45) внешним образом, получаем

$$dt \wedge \sum_{\alpha=2}^{n}(-1)^\alpha\binom{n-1}{\alpha-1}\frac{1-\alpha}{t-(\alpha-1)}\omega_\alpha - d\omega_1 + \sum_{\alpha=2}^{n}(-1)^\alpha\binom{n-1}{\alpha-1}\frac{t}{t-(\alpha-1)}d\omega_\alpha = 0.$$

Применяя затем структурные уравнения (43) и заменяя всюду ω_1 по формуле (45), получим внешнее квадратичное уравнение, которое не будем выписывать, но на которое будем ссылаться, обозначая его как $(**)$. Уравнение $(**)$ содержит только формы $\omega_2, \dots, \omega_n$. Следовательно, dt выражается через $\omega_2, \dots, \omega_n$. Запишем выражение для dt в виде

$$\frac{dt}{(t-1)(t-2)\dots(t-(n-1))} = p_2\omega_2 + \dots + p_n\omega_n. \tag{46}$$

Подставляя выражение для dt из (46) во внешнее квадратичное уравнение $(**)$ и собирая члены, содержащие $\omega_\gamma \wedge \omega_\delta$, получаем

$$\begin{aligned}(t-1)(t-2)\dots(t-(n-1))[p_\gamma(-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1}(1-\delta)(t-(\gamma-1)) -\\ - p_\delta(-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1}(1-\delta)(t-(\delta-1))] + a[1,\gamma](-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1}t\left[t-(\gamma-1)-(-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1}t\right] -\\ - a[1,\delta](-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1}t\left[t-(\delta-1)-(-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1}t\right] +\\ + a[\gamma,\delta]t\left[(-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1}(t-(\delta-1)) - (-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1}(t-(\gamma-1))\right] = 0.\end{aligned} \tag{47}$$

Ткань $W(n+1,n,1)$, $n>3$, порождает ткань типа Лагранжа $LLW_t(n,1)$ тогда и только тогда, когда уравнение (47) выполняется тождественно для любой вещественной функции t. Таким образом, коэффициенты при всех степенях t должны обращаться в нуль. Приравнивая нулю коэффициенты при t^n и t^0, получаем

$$\begin{aligned} p_\gamma(-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1} - p_\delta(-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1} = 0,\\ p_\gamma(-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1}(1-\delta) - p_\delta(-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1}(1-\gamma) = 0.\end{aligned} \tag{48}$$

Определитель однородной системы уравнений (48) равен $(-1)^{\gamma+\delta}\binom{n-1}{\gamma-1}\binom{n-1}{\delta-1}(\delta-\gamma)$, т. е. отличен от нуля. Таким образом, система (48) имеет только тривиальное решение

$$p_\gamma = 0, \quad \gamma = 2, \dots, n. \tag{49}$$

В результате уравнение (47) принимает вид

$$\begin{aligned} a[1,\gamma](-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1}\left[t-(\gamma-1)+(-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1}t\right] -\\ - a[1,\delta](-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1}\left[t-(\delta-1)+(-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1}t\right] +\\ + a[\gamma,\delta]\left[(-1)^\gamma\binom{n-1}{\gamma-1}(t-(\delta-1)) - (-1)^\delta\binom{n-1}{\delta-1}(t-(\gamma-1))\right] = 0.\end{aligned} \tag{50}$$

Уравнение (50) — это уравнение первого порядка относительно t. Таким образом, его коэффициенты при t и t^0 должны равняться нулю, откуда следует

$$a[1,\gamma](-1)^{\delta}\binom{n-1}{\delta-1}\left[1+(-1)^{\gamma}\binom{n-1}{\gamma-1}\right]-a[1,\delta](-1)^{\gamma}\binom{n-1}{\gamma-1}\left[1+(-1)^{\delta}\binom{n-1}{\delta-1}\right]+$$
$$+a[\gamma,\delta]\left[(-1)^{\gamma}\binom{n-1}{\gamma-1}-(-1)^{\delta}\binom{n-1}{\delta-1}\right]=0 \quad (51)$$

и

$$a[1,\gamma](-1)^{\delta}\binom{n-1}{\delta-1}(1-\gamma)-a^i_{kl}[1,\delta](-1)^{\gamma}\binom{n-1}{\gamma-1}(1-\delta)+$$
$$+a[\gamma,\delta]\left[(-1)^{\gamma}\binom{n-1}{\gamma-1}(1-\delta)-(-1)^{\delta}\binom{n-1}{\delta-1}(1-\gamma)\right]=0. \quad (52)$$

Уравнения (51) и (52) относительно $a[\alpha,\beta]$ имеют такой же вид, как уравнения (23) и (24) относительно $a^i_{kl}[\alpha,\beta]$. Таким образом, применяя то же доказательство, которое было использовано при доказательстве теоремы 1, из (51), (52) и (44) получим $a[\alpha,\beta]=0$, $\alpha,\beta=1,\dots,n$; $n>3$, $\alpha\neq\beta$.

Согласно замечанию, сделанному в § 4, это означает, что координатная ткань $W(n+1,n,1)$, $n>3$, $r>1$, ткани типа Лагранжа $LLW(n,1)$ параллелизуема. □

Следствие 3. Параметр t постоянен на ткани типа Лагранжа $LLW_t(n,1)$, $n>3$.

Доказательство. Утверждение следует из уравнений (46) и (49). □

Теорема 6. *Ткань типа Лагранжа $LLW_t(n,1)$, $n>3$, параллелизуема и является параллелизуемой тканью Лагранжа $LW_t(n,1)$ с голономной координатной тканью $W(n+1,n,1)$.*

Доказательство. Предположим, что первые n слоений $(n+1)$-ткани-представителя ткани $LLW_t(n,1)$ определены параметрами s_α, где множество $\{s_\alpha\}$ отлично от множества $\{t_\alpha\}=\{0,1,\dots,n-1\}$. Обозначим формы $\omega(s_\alpha)$ через ρ_α и положим $\rho_{n+1}=-\rho_1-\dots-\rho_n$. В силу теоремы 5 координатная $(n+1)$-ткань $W(n+1,n,1)$ ткани типа Лагранжа $LLW_t(n,1)$, $n>3$, параллелизуема. Таким образом, ее тензор кручения обращается в нуль, и структурные уравнения (43) принимают вид $d\omega_\alpha=\omega_\alpha\wedge\theta$, $\alpha=1,2,3$. На основании следствия 3 и уравнений (31) и (8) имеем $d\rho_\alpha=\rho_\alpha\wedge\theta$. Поэтому тензор кручения $(n+1)$-ткани-представителя ткани $LLW_t(n,1)$ обращается в нуль, а сама ткань-представитель является параллелизуемой. Поскольку рассматриваемая $(n+1)$-ткань-представитель произвольна, то ткань типа Лагранжа $LLW_t(n,1)$, $n>3$, параллелизуема. Она является параллелизуемой тканью Лагранжа $LW_t(n,1)$ с голономной координатной тканью $W(n+1,n,1)$. □

Следствие 4. Среди тканей типа Лагранжа $LLW_t(n,r)$, $n\geq 2$, $r\geq 1$, только ткани $LLW(2,r)$, $r\geq 1$, являются непараллелизуемыми.

Литература

1. Goldberg V.V. *Theory of multicodimensional $(n+1)$-webs.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1988.
2. Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* – Washington, D. C.: National Bureau of Standards, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, **55**, Government Printing Office, 1964.
3. Акивис М.А., Гольдберг В.В. *Дифференциальная геометрия тканей типа Веронезе* // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 10. – С. 3–28.
4. Акивис М.А. *О три-тканях многомерных поверхностей* // Тр. геом. семин. Ин-т научн. и техн. информ. АН СССР. – М., 1969. – Т. 2. – С. 7–31.

5. Akivis M.A., Shelekhov A.M. *Geometry and algebra of multidimensional three-webs*, translater from the Russian by V.V. Goldberg. – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1992. – xvii+358 p.
6. Гольдберг В.В. $(n+1)$-*ткани многомерных поверхностей* // ДАН СССР. – 1973. – Т. 210. – № 4. – С. 756–759.
7. Goldberg V.V. $(n+1)$-*webs of multidimensional surfaces* // Bulgar. Akad. Nauk Izv. Mat. Inst. – 1974. – V. 15. – P. 405–424.
8. Акивис М.А. *Об изоклинных три-тканях и их интерпретации в линейчатом пространстве проективной связности* // Сиб. матем. журн. – 1974. – Т. 15. – № 1. – С. 3–15.
9. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Differential geometry of webs* / Handbook of differential geometry (Elsevier Science B. V., 2000), P. 1–152.
10. Акивис М.А. *Ткани и почти грассмановы структуры* // Сиб. матем. журн. – 1982. – Т. 23. – № 6. – С. 6–15.
11. Zakharevich I. *Nonlinear wave equation, nonlinear Riemann problem, and the method of argument translation* // arXiv:math-ph/006001. 2000. – 44 p.
12. Zakharevich I. *Kronecker webs, bihamiltonian structures, and the method of argument translation* // Transform. Groups. – 2001. – V. 6. – № 3. – P. 267–300.
13. Panasyuk A. *On integrability of generalized Veronese curves of distributions* // Rep. Math. Phys. – 2002. – V. 50. – № 3. – P. 291–297.

Иерусалимский технологический колледж (Израиль)

Технологический институт штата Нью Джерси (Ньюарк, Нью Джерси, США)

Поступила
29.01.2007