ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 1 (500)

УДК 519.68

Я.И. ЗАБОТИН, И.А. ФУКИН

АЛГОРИТМЫ В МЕТОДЕ ШТРАФОВ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА

Для решения задачи математического программирования с заданной точностью в [1] предлагалось минимизировать целевую функцию на множестве, погруженном в допустимое. Погруженное множество для задач с неравенствами строилось путем сдвига границы допустимого множества, при котором любая итерационная точка, оказавшаяся в допустимом множестве, являлась приближенным с требуемой точностью решением исходной задачи. В отличие от известного метода модифицированных функций Лагранжа [2] получение приближенного решения достигается только за счет роста штрафного параметра до заранее определенной величины, а погруженное множество остается неизменным до конца процесса оптимизации.

В данной статье аппроксимация допустимого множества представляет собой лебегово множество функции штрафа. Она строится таким образом, чтобы любая точка минимума вспомогательной функции, принадлежащая разности допустимого множества и его аппроксимации, являлась решением с заданной точностью исходной задачи. На этом принципе построены два алгоритма с различными способами аппроксимации допустимого множества. Как и в [1], оценен штрафной коэффициент, заведомо обеспечивающий попадание итерационной точки в допустимое множество. При этом ослаблены условия, налагаемые на целевую функцию и ограничения. Предложены также алгоритмы, допускающие неполную минимизацию вспомогательной функции.

1. Постановка задачи. Условие ρ-аппроксимируемости

Пусть функции $f(x)$, $f_i(x)$ для $i \in I = \{1, 2, \ldots, m\}$ определены, непрерывны и выпуклы в n-мерном евклидовом пространстве R_n. Для любого числа λ определим множество $D(\lambda) = \{x : x \in R_n,\ g(x) + \lambda \le 0\}$, где $g(x) = \max\{f_i(x),\ i \in I\}$. Считается, что минимум функции $f(x)$ на множестве $D(0)$ достигается. Положим

$$f^* = \min\{f(x),\ x \in D(0)\}. \tag{1}$$

Требуется по заданному числу $\varepsilon > 0$ найти точку $x' \in X^*_\varepsilon = \{x \in D(0) : f(x) - f^* \le \varepsilon\}$. Точку x' будем называть ε-решением задачи отыскания (1). Всюду далее считается, что множество $D(0)$ удовлетворяет условию Слейтера, т. е. $\{x : x \in R,\ g(x) < 0\} \ne \emptyset$.

Для удобства изложения результатов сформулируем определение (ρ, β, λ)-аппроксимации функций на основе известного ([3], с. 245) понятия ρ-регулярности ограничений в задаче математического программирования. В этом определении и последующих леммах будем считать, что функция $\varphi(x)$ определена в R_n, число λ таково, что

$$M(\lambda) = \{x : x \in R_n,\ \varphi(x) \le \lambda\} \ne \emptyset,$$

G — заданное в R_n множество, $M(\lambda) \cap G \ne \emptyset$ и, как обычно, $\rho(x, M(\lambda)) = \inf\limits_{y \in M(\lambda)} \|x - y\|$.

Определение. Функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \forall x \in M(\lambda) \cap G; \\ \beta\rho(x, M(\lambda)) + \lambda & \forall x \in G \setminus M(\lambda),\ \beta > 0, \end{cases} \tag{2}$$

будем называть (ρ, β, λ)-аппроксимирующей снизу заданную функцию $\varphi(x)$, а функцию $\varphi(x)$ — (ρ, β, λ)-аппроксимируемой снизу на множестве G, если

$$\psi(x) \le \varphi(x) \ \ \forall x \in G. \tag{3}$$

Укажем достаточные условия (ρ, β, λ)-аппроксимируемости снизу для выпуклой функции $\varphi(x)$.

Лемма 1. *Пусть функция $\varphi(x)$ определена, непрерывна и является выпуклой на выпуклом множестве $G \subset R_n$, для числа λ множество $G \cap M(\lambda)$ ограничено и существует точка $\overline{x} \in G$ такая, что $\varphi(\overline{x}) < \lambda$. Тогда найдется число $\beta = \beta(\lambda) > 0$ такое, что для функции $\psi(x)$, определенной условием* (2), *будет выполняться неравенство* (3).

Доказательство. В тривиальном случае $G \subset M(\lambda)$ существование (ρ, β, λ)-аппроксимирующей функции очевидно. Пусть $G \setminus M(\lambda) \ne \emptyset$ и x — произвольная точка из $G \setminus M(\lambda)$. Поскольку G — выпуклое множество, то $\alpha x + (1-\alpha)\overline{x} \in G$ для всех $\alpha \in (0, 1)$. Так как $\varphi(x) > \lambda$, то в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ найдется такое $\overline{\alpha} \in (0, 1)$, что в точке $y = \overline{\alpha}x + (1-\overline{\alpha})\overline{x}$, где $\overline{\alpha} = \frac{\|y-\overline{x}\|}{\|x-\overline{x}\|}$, выполняется равенство

$$\varphi(y) = \lambda, \tag{4}$$

при этом из условия выпуклости функции $\varphi(x)$ на множестве G вытекает неравенство $\varphi(y) \le \overline{\alpha}\varphi(x) + (1-\overline{\alpha})\varphi(\overline{x})$. Отсюда с учетом (4) $\varphi(x) \ge \frac{1-\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}}(\lambda - \varphi(\overline{x})) + \lambda$. Так как $\frac{1-\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}} = \frac{\|x-y\|}{\|y-\overline{x}\|}$, то

$$\varphi(x) \ge \frac{\lambda - \varphi(\overline{x})}{\|y - \overline{x}\|}\|x - y\| + \lambda. \tag{5}$$

Поскольку $y, \overline{x} \in G \cap M(\lambda)$, то выполняется неравенство $\|y - \overline{x}\| \le d$, где d — диаметр компакта $G \cap M(\lambda)$. Кроме того, $\|y - \overline{x}\| \ge \rho(x, M(\lambda))$. Из (5) следует неравенство (3) при функции $\psi(x)$, определенной условием (2) с $\beta = \frac{\lambda - \varphi(\overline{x})}{d} > 0$. $\square$

Следствие. Пусть для функции $\varphi(x)$, множества $G \subset R_n$ и числа λ выполняются условия леммы 1. Тогда для любого $\lambda' > \lambda$ найдется число $\beta' = \beta(\lambda') > 0$ такое, что функция $\varphi(x)$ будет (ρ, β', λ')-аппроксимируемой снизу на G.

Доказательство. Действительно, т. к. в силу условий леммы 1 существует точка $\overline{x} \in G$ такая, что $\varphi(\overline{x}) < \lambda$, то $\varphi(\overline{x}) < \lambda'$. В силу ограниченности множества $G \cap M(\lambda)$ и выпуклости функции $\varphi(x)$ для любого $\lambda' > \lambda$ множество $G \cap M(\lambda')$ ограничено. Тогда по лемме 1 найдется число $\beta' = \beta(\lambda') > 0$ такое, что $\varphi(x) \ge \beta'\rho(x, M(\lambda')) + \lambda'$ для $x \in G \setminus M(\lambda')$. $\square$

Замечание. Здесь была использована схема доказательства известной леммы ([3], с. 246) об условиях ρ-регулярности ограничений в задаче выпуклого программирования. Но лемма 1 может быть использована безотносительно к задаче программирования и множество G может быть неограниченным. Например, G может быть плоскостью любой размерности в R_n или совпадать с R_n. В первом случае лемму 1 возможно будет использовать при исследовании задач выпуклого программирования, когда среди ограничений есть линейные уравнения, а во втором лемма 1 дает условия (ρ, β, λ)-аппроксимируемости снизу выпуклой в R_n функции на всем пространстве R_n.

Лемма 2. *Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна и выпукла на R_n. Если функция $\varphi(x)$ является (ρ, β, λ)-аппроксимируемой снизу на $G \subset R_n$, то функция $\varkappa(x) = \tau\varphi(x)$, $0 < \tau \le 1$, будет $(\rho, \tau\beta, \lambda')$-аппроксимируемой снизу на G при $\lambda' \ge \lambda$.*

Доказательство. Пусть $\lambda' \geq \lambda$, $E(\lambda') = \{x : x \in R_n,\ \varkappa(x) \leq \lambda'\}$. Если $G \in M(\lambda')$, то существование $(\rho, \tau\beta, \lambda')$-аппроксимирующей функции очевидно. В противном случае произвольно выберем точку $x' \in G \setminus E(\lambda')$. Тогда

$$M(\lambda) \subset E(\lambda') \tag{6}$$

и $x' \notin M(\lambda)$. Пусть x_p — проекция точки x' на множество $M(\lambda)$. Тогда

$$\varphi(x_p) = \lambda. \tag{7}$$

Так как $x' \notin E(\lambda')$, то, учитывая (7), имеем

$$\varphi(x') > \frac{\lambda'}{\tau} \geq \frac{\lambda}{\tau} \geq \lambda = \varphi(x_p). \tag{8}$$

При $\tau = 1$, $\lambda' = \lambda$ функция $\varkappa(x)$ будет по условиям леммы $(\rho, \tau\beta, \lambda')$-аппроксимируемой снизу на G. В противном случае хотя бы одно из нестрогих неравенств в цепочке (8) будет выполняться как строгое и $\varphi(x') > \frac{\lambda'}{\tau} > \varphi(x_p)$. Так как $\varphi(x)$ — непрерывная функция, то внутри отрезка, соединяющего точки x', x_p, найдется такая точка y, что

$$\varphi(y) = \frac{\lambda'}{\tau}. \tag{9}$$

Это значит, что найдется такое число $\alpha \in (0,1)$, для которого $y = \alpha x_p + (1-\alpha)x'$, где

$$\alpha = \frac{\|y - x'\|}{\|x_p - x'\|} = \frac{\|y - x'\|}{\rho(x', M(\lambda))}. \tag{10}$$

Так как $\varphi(x)$ — выпуклая на R_n функция, то $\varphi(y) \leq \alpha\varphi(x_p) + (1-\alpha)\varphi(x')$. Отсюда, учитывая (7), (9) и (10), получим

$$\varphi(x') \geq \frac{\|y - x'\|}{\rho(x', M(\lambda))}(\varphi(x') - \lambda) + \frac{\lambda'}{\tau}. \tag{11}$$

По условию леммы $\varphi(x) \geq \beta\rho(x, M(\lambda)) + \lambda$ для всех $x \in G \setminus M(\lambda)$, а в силу (6) тем более это неравенство выполняется для всех $x \in G \setminus E(\lambda')$, т. е.

$$\varphi(x) \geq \beta\rho(x, M(\lambda)) + \lambda \quad \forall x \in G \setminus E(\lambda'). \tag{12}$$

В частности, неравенство (12) выполняется для $x = x'$. Тогда, усиливая неравенство (11) подстановкой вместо $\varphi(x')$ в правой части числа $\beta\rho(x', M(\lambda)) + \lambda$, получим

$$\varphi(x') \geq \beta\|x' - y\| + \frac{\lambda'}{\tau}. \tag{13}$$

В силу (9) выполняется включение $y \in E(\lambda')$. Тогда $\|x' - y\| \geq \rho(x', E(\lambda'))$ и из (13) следует неравенство $\tau\varphi(x') \geq \tau\beta\rho(x', E(\lambda')) + \lambda'$. Таким образом, в силу произвольности выбора $x' \in G \setminus E(\lambda')$ можно построить функцию $\phi(x)$, аппроксимирующую функцию $\varkappa(x)$ по правилам (2), (3) с параметрами β, $\lambda' > \lambda$. $\square$

Обратим внимание на частный случай $\tau = 1$ в лемме 2. В этом случае $E(\lambda) = M(\lambda)$. В отличие от следствия к лемме 1 в лемме 2 не требуется выполнение условий леммы 1. Для справедливости утверждения леммы 2 достаточно, чтобы существовала функция, (ρ, β, λ)-аппроксимирующая снизу функцию $\varphi(x)$, и неважно, как она была построена. Выполнение условия $\varphi(x) \geq \beta\rho(x, M(\lambda')) + \lambda'$ для всех $x \in G \setminus M(\lambda)$ при любом $\lambda' > \lambda$ и постоянном значении параметра β не является противоречивым. При росте параметра λ множество $M(\lambda)$ расширяется, вычисляется функция $\varphi(x)$ по правилу (2), а при достаточно большом λ окажется $G \setminus M(\lambda) = \emptyset$ и построение функции $\psi(x)$ сводится к неинтересному с практической точки зрения случаю $\psi(x) = \varphi(x)$.

2. Алгоритмы на основе штрафной функции, построенной по погруженному множеству

Пусть $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R_m$, $R_m^- = \{y : y_i \le 0 \ \forall i = 1, \dots, m\}$. В R_m определим выпуклую функцию $P(y)$ так, что

$$y \in R_m^- \Longrightarrow P(y) = 0, \quad y \notin R_m^- \Longrightarrow P(y) > 0. \tag{14}$$

Обозначим $V(x) = P(f_1(x) + p, \dots, f_m(x) + p)$ и $A(\alpha) = \{x \in R_n : V(x) \le \alpha, \ \alpha \ge 0\}$. Учитывая (14), легко заметить, что $V(x) = 0$ при $x \in A(0)$ и $V(x) > 0$ при $x \notin A(0)$.

Так как $A(0) = D(p)$, то при $p > 0$ множество $A(0)$ является погруженным в $D(0)$, причем $D(0)$ является окрестностью множества $A(0)$.

Пусть число $\overline{p} \in (0, \ -\inf\{g(x), \ x \in R_n\})$.

Лемма 3. *Множество $D(p)$ удовлетворяет условию Слейтера при $p < -\overline{p}$.*

Доказательство. В силу непрерывности функции $g(x)$ найдется точка y такая, что $g(y) = \overline{p}$. Так как $\overline{p} < -p$, то $y \in D(p)$ и $g(y) + p < 0$. $\square$

Всюду далее будем предполагать, что выполнены

условие а) функция $f(x)$ удовлетворяет на множестве X_ε^* условию Липшица с константой L;

условие b) существуют числа $\lambda' \in (0, \overline{p})$ и $\overline{f} > \min\limits_{x \in D(\lambda')} f(x)$, множество $D(\lambda') \cap Q(\overline{f})$ ограничено, где $Q(t) = \{x \in R_n : f(x) \le t\}$.

Обозначим через $\operatorname{int} D(\lambda')$ внутренность множества $D(\lambda')$, а через $\operatorname{bd} D(\lambda')$ — его границу.

Лемма 4. *Для числа λ' найдется $\beta = \beta(-\lambda')$ такое, что функция $g(x)$ будет $(\rho, \beta, -\lambda')$-аппроксимируемой снизу на множестве $Q(\overline{f})$.*

Доказательство. Покажем, что существует точка $\overline{x} \in \operatorname{int} D(\lambda')$ такая, что $f(\overline{x}) \le \overline{f}$. Если это не так, то

$$f(x) > \overline{f} \quad \forall x \in \operatorname{int} D(\lambda'). \tag{15}$$

Выберем произвольную точку $x' \in \operatorname{bd} D(\lambda')$. Она является предельной точкой некоторой последовательности $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, где $x_k \in \operatorname{int} D(\lambda')$. Тогда по (15) $f(x_k) > \overline{f}$ для всех $k \ge 0$. Отсюда и из непрерывности $f(x)$ получим

$$f(x') = \lim_{k \to \infty} f(x_k) \ge \overline{f}. \tag{16}$$

Следовательно, в силу произвольного выбора точки $x' \in \operatorname{bd} D(\lambda')$ из (15) и (16) неравенство $f(x) \ge \overline{f}$ верно для всех $x \in D(\lambda')$. Тогда по определению условного минимума $\overline{f} = \min\{f(x), x \in D(\lambda')\}$, что противоречит условию b). Существование точки $\overline{x} \in \operatorname{int} D(\lambda') \cap Q(\overline{f})$ доказано.

Пусть точка $\widetilde{x}$ такая, что $g(\widetilde{x}) = -\overline{p}$. Тогда по условию b) из неравенства $\lambda' < \overline{p}$ следует $g(\widetilde{x}) + \lambda' < 0$. Отсюда в силу выпуклости функции $g(x)$ получим $g(x) + \lambda' < 0$ для всех $x \in \operatorname{int} D(\lambda')$.

Таким образом, существует точка $\overline{x} \in Q(\overline{f})$ такая, что $g(\overline{x}) + \lambda' < 0$.

Тогда условия леммы 1 выполняются для $\varphi(x) = g(x)$, $G = Q(\overline{f})$, $\lambda = -\lambda'$, $M(\lambda) = D(\lambda')$, т. е. можно построить функцию

$$d(x) = \begin{cases} g(x) & \forall x \in D(\lambda') \cap Q(\overline{f}); \\ \beta\rho(x, D(\lambda')) - \lambda' & \forall x \in Q(\overline{f}) \setminus D(\lambda'), \ \beta > 0, \end{cases}$$

такую, что $d(x) \le g(x)$ для всех $x \in Q(\overline{f})$. $\square$

Введем вспомогательную функцию

$$F(x,C) = f(x) + CV(x), \quad C > 0, \tag{17}$$

и множество аргументов ее минимума

$$X(C) = \operatorname{Argmin}\{F(x,C),\ x \in R_n\}. \tag{18}$$

Посредством $x(C)$ обозначим точки множества $X(C)$; точка $x^* \in \operatorname{Argmin}\{f(x),\ x \in D(0)\}$.

Известно, что функция $x(C)$ непрерывна по $C > 0$ ([4], с. 25), $f(x(C))$ не убывает, а $V(x(C))$ не возрастает по $C > 0$ ([5], с. 38). Убедимся, что

$$f(x(C)) - f^* \le C(V(x^*) - V(x(C))). \tag{19}$$

Действительно, в силу (18) верно неравенство $F(x(C),C) \le F(x^*,C)$. Отсюда $f(x(C)) + CV(x(C)) \le f^* + CV(x^*)$, что эквивалентно неравенству (19).

Обобщает результаты, полученные в [6] для линейных задач,

Теорема 1. *Пусть число* $0 \le p \le \min\{\frac{\varepsilon\beta}{L}, \lambda'\}$. *Тогда любая точка* $x(C) \in D(0)$ *является* ε*-решением задачи* (1).

Доказательство. Множество $D(p)$ не пусто, т. к. $p \le \lambda' < \overline{p}$ и $D(p) \supset D(\overline{p})$. Пусть x_p — проекция точки x^* на множество $D(p)$. Так как $f(x_p) \ge f^*$ и целевая функция удовлетворяет условию Липшица, то

$$0 \le f(x_p) - f^* \le L\|x_p - x^*\|, \tag{20}$$

где L — константа Липшица. Если $x^* \in D(p)$, то $\|x_p - x^*\| = 0$ и

$$f(x_p) - f^* = 0 < \varepsilon. \tag{21}$$

Иначе, учитывая $D(\lambda') \subset D(0)$ и $f(x^*) \le \min\{f(x),\ x \in D(\lambda')\} < \overline{f}$, что справедливо в силу условия b), имеем включение $x^* \in Q(\overline{f}) \setminus D(p)$.

Так как по лемме 4 функция $g(x)$ является $(\rho, \beta, -\lambda')$-аппроксимируемой снизу на множестве $Q(\overline{f})$ и $-p \ge -\lambda'$, то по лемме 2 функция $g(x)$ является $(\rho, \beta, -p)$-аппроксимируемой снизу на множестве $Q(\overline{f})$, т. е. неравенство $g(x) + p \ge \beta\rho(x, D(p))$ выполняется для всех $x \in Q(\overline{f}) \setminus D(p)$. В частности, оно выполняется и для x^*. Следовательно,

$$g(x^*) + p \ge \beta\rho(x^*, D(p)) = \beta\|x^* - x_p\|, \tag{22}$$

т. к. x_p — проекция точки x^* на $D(p)$. Тогда $\|x^* - x_p\| \le \frac{g(x^*)+p}{\beta}$. В силу (20), неравенства $g(x^*) \le 0$ и условий леммы верны неравенства

$$f(x_p) - f^* \le L\frac{g(x^*) + p}{\beta} \le \frac{Lp}{\beta} \le \frac{L}{\beta}\frac{\varepsilon\beta}{L} = \varepsilon. \tag{23}$$

Отсюда и из (21) получим, что $f(x_p) - f^* \le \varepsilon$ независимо от включения точки x^* в множество $D(p)$.

Как известно ([7], с. 9), в методе внешних штрафов со вспомогательными функциями вида (17) точки $x(C)$ не принадлежат внутренности множества $D(p)$. Тогда из (23) и неубывания функции $f(x(C))$ по $C > 0$ имеем цепочку неравенств

$$f(x(C)) - f^* \le \min_{x \in D(p)} f(x) - f^* \le f(x_p) - f^* \le \varepsilon. \quad \square$$

Теорема 1 дает легко проверяемый критерий остановки в методе штрафов. Минимизация целевой функции на погруженном множестве $D(p)$ позволяет получить включение $x(C) \in D(0)$ при конечном значении параметра C, даже если функция штрафа $V(x)$ не является точной.

Теорема 2. *Пусть* $0 \le p \le \lambda'$. *Тогда неравенство*

$$C \le \frac{Lp}{V(x(C))\beta} \tag{24}$$

выполняется для всех $C > 0$ *таких, что* $x(C) \in D(0)$.

Доказательство. Так как $p \le \lambda'$, то $D(p) \supset D(\lambda')$ и $\min\{f(x),\ x \in D(p)\} \le \min\{f(x),\ x \in D(\lambda')\}$. Тогда из неубывания функции $f(x(C))$ по $C > 0$ и условия b) следует цепочка неравенств

$$f(x(C)) \le \min\{f(x),\ x \in D(p)\} \le \min\{f(x),\ x \in D(\lambda')\} < \overline{f},$$

что означает включение $x(C) \in Q(\overline{f})$.

Если $x(C) \in D(p)$, то $V(x(C)) = 0$ и неравенство (24) выполняется. Иначе $x(C) \in Q(\overline{f}) \setminus D(p)$.

Пусть x_0 — проекция точки $x(C)$ на множество $D(p)$. Так как $-p \ge -\lambda'$, то по лемме 2 функция $g(x)$ является $(\rho, \beta, -p)$-аппроксимируемой снизу на множестве $Q(\overline{f})$. Тогда

$$g(x(C)) + p \ge \beta\rho(x(C), D(p)) = \beta q, \quad q = \|x(C) - x_0\|.$$

Так как $x(C) \in D(0)$, то $g(x(C)) \le 0$ и

$$p \ge \beta q. \tag{25}$$

Отсюда $q \le p/\beta$. В неравенстве (25) к обеим частям прибавим $V(x(C)) - p$ и, учитывая $V(x_0) = 0$, получим

$$V(x(C)) - V(x_0) \ge V(x(C)) + \beta q - p. \tag{26}$$

Так как $x(C) \notin D(p)$, то $q > 0$. Разделим неравенство (26) на q:

$$\frac{V(x(C)) - V(x_0)}{q} \ge \beta + \frac{V(x(C)) - p}{q} \ge \beta + \frac{(V(x(C)) - p)\beta}{p} \ge \beta + \frac{V(x(C))\beta}{p} - \beta = \frac{V(x(C))\beta}{p}. \tag{27}$$

Пусть $x = x(C) + t(x(C) - x_0)$, $t \ge 0$. Отсюда $x(C) = \frac{t}{t+1}V(x_0) + \frac{1}{t+1}V(x)$. Так как $V(x)$ выпуклая, то $V(x(C)) \le \frac{t}{t+1}V(x_0) + \frac{1}{t+1}V(x)$ и $\frac{V(x) - V(x(C))}{t} \ge V(x(C)) - V(x_0)$. Тогда с учетом (27) получим $\frac{V(x) - V(x(C))}{tq} \ge \frac{V(x(C))\beta}{p}$, т. е. $\frac{V(x(C) + t(x(C) - x_0)) - V(x(C))}{tq} \ge \frac{V(x(C))\beta}{p}$ при любых $t \ge 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial V(x(C))}{\partial \frac{x(C) - x_0}{q}} = \lim_{t \to +0} \frac{V(x(C) + t(x(C) - x_0)) - V(x(C))}{tq} \ge \frac{V(x(C))\beta}{p}.$$

Получили $\|V'(x(C))\| \ge \frac{\partial V(x(C))}{\partial \frac{x(C) - x_0}{q}} \ge \frac{V(x(C))\beta}{p}$, где $|V'(x(C))|$ — градиент функции $V(x)$ в точке $x(C)$.

Из определения $x(C)$ следует, что градиент $F'(x(C), C) = f'(x(C)) + CV'(x(C)) = 0$ и $C = \frac{\|f'(x(C))\|}{\|V'(x(C))\|} \le \frac{Lp}{V(x(C))\beta}$. $\square$

Зададим число $\overline{\alpha} \equiv \max\{\alpha : A(\alpha) \subset D(0)\}$. Очевидно, границы множеств $A(\overline{\alpha})$ и $D(0)$ имеют некоторую общую точку z, в которой $g(z) = 0$ и $V(z) = \overline{\alpha}$. Так как найдется индекс $s \in I$ такой, что $f_s(z) = 0$, то при $p > 0$ вектор $(f_1(z) + p, \dots, f_m(z) + p) \notin R_m^-$. Из (14) следует, что $P(f_1(z) + p, \dots, f_m(z) + p) > 0$. Тогда по определению $\overline{\alpha} = V(z) > 0$.

Пусть всюду далее число $\overline{C} > 0$ такое, что $V(x(\overline{C})) = \overline{\alpha}$. Так как $\overline{\alpha} > 0$ и функция $V(x(C))$ непрерывна по $C > 0$, то число $\overline{C}$ существует и конечно. По теореме 2 при $p \le \lambda'$ для числа $\overline{C}$ выполняется неравенство $\overline{C} \le \frac{Lp}{\overline{\alpha}\beta}$. Из невозрастания функции $V(x(C))$ по $C > 0$ следует, что $V(x(C)) \le \overline{\alpha}$ для всех $C \ge \overline{C}$. Это означает, что включение $x(C) \in A(\overline{\alpha}) \subset D(0)$ достигается при любом $C \ge \frac{Lp}{\overline{\alpha}\beta}$. На этом факте основан

Алгоритм 1. Задается требуемая точность решения $\varepsilon > 0$, $x_0 \in R_n$, натуральное число $N > 0$. Выбирается $0 < p \le \min\{\frac{\beta\varepsilon}{L}, \lambda'\}$, возрастающая функция $\varphi(t)$ такая, что $\varphi(1) \ge 0$, $\varphi(N) \ge \frac{Lp}{\overline{\alpha}\beta}$. Полагается $k = 1$.

1. Вычисляется $C_k = \varphi(k)$.
2. Выбирается метод A_k безусловной минимизации, обеспечивающий нахождение минимума функции $F(C_k, x)$.
3. Методом A_k отыскиваем $x(C_k) \in X(C_k)$.
4. Если $x(C_k) \in D(0)$, то $x(C_k)$ является допустимым ε-решением исходной задачи. Иначе следует переход к п. 1 при k, замененном на $k + 1$.

Теорема 3. *Алгоритм* 1 *находит допустимое ε-оптимальное решение задачи* (1) *не более, чем через заданное количество N итераций.*

Доказательство. Так как $C_N = \varphi(N) \ge \frac{Lp}{\overline{\alpha}\beta}$, то при $k = N$ включение $x(C_k) \in D(0)$ гарантированно достигается. Тогда по теореме 1 из условия $p \le \min\{\frac{\varepsilon\beta}{L}, \lambda'\}$ следует ε-оптимальность точки $x(C_N)$. $\square$

Если при подготовке вычислений по алгоритму 1 выбрать $N = 1$, то $\varphi(N) = \varphi(1) \ge \frac{Lp}{\overline{\alpha}\beta}$, что гарантирует включение $x(C_1) \in D(0)$. Это означает, что решение с заданной точностью исходной задачи будет найдено за одну итерацию метода штрафов. Но, как известно и отмечалось в [1], это приводит к плохой обусловленности матрицы вторых производных функции $F(x, C_1)$ в области решения. С точки зрения общей трудоемкости решения исходной задачи при практической реализации алгоритма лучшим оказывался выбор N от 3 до 7 в зависимости от типа задачи. Бóльшие значения для N использовать нецелесообразно вследствие увеличения количества вычислимых процедур. Отметим также, что подобные рассуждения верны лишь в том случае, если при отыскании $\min\{F(x, C_k), x \in R_n\}$ в качестве точки начального приближения выбирать результат минимизации функции $F(x(C_{k-1}))$.

В численных экспериментах полагалось $\varphi(t) = \frac{\overline{C}}{\mu^{N-t}}$, где $\mu > 1$. Чаще выбиралось $\mu = 10$. Если в алгоритме требуется явно задать начальный коэффициент штрафа, то достаточно положить $\mu = (\frac{\overline{C}}{C_0})^{\frac{1}{t}}$.

В следующем алгоритме осуществляется двустороннее приближение к множеству $D(0) \setminus A(\gamma\overline{\alpha})$, где γ — произвольное число из интервала $(0, 1)$. Определенный выбор числа $p > 0$ гарантирует ε-оптимальность любой точки $x(C) \in D(0) \setminus A(\gamma\overline{\alpha})$.

Алгоритм 2. Подготовительный шаг. Задается требуемая точность решения ε. Выбираются числа $0 < \gamma < 1$, $0 < p \le \min\{\frac{\varepsilon\beta\gamma\overline{\alpha}}{L(V(x^*)-\gamma\overline{\alpha})}, \lambda'\}$, $\overline{C}_0 \ge \frac{Lp}{\beta\gamma\overline{\alpha}}$, $\underline{C}_0 = 0$, $0 < \underline{\lambda} \le \overline{\lambda} < 1$. Полагаем $k = 0$.

1. Находим $C_k = \lambda_k \overline{C}_k + (1 - \lambda_k)\underline{C}_k$, где $\underline{\lambda} \le \lambda_k \le \overline{\lambda}$.
2. Выбирается метод A_k безусловной минимизации, обеспечивающий нахождение минимума функции $F(C_k, x)$.
3. Методом A_k отыскиваем $x(C_k) \in X(C_k)$.
4. Если $x(C_k) \in D(0) \setminus A(\gamma\overline{\alpha})$, то процесс окончен и $x(C_k)$ является ε-решением задачи (1).
5. Если $x(C_k) \in A(\gamma\overline{\alpha})$, то полагаем $\overline{C}_{k+1} = C_k, \underline{C}_{k+1} = \underline{C}_k$. Иначе $\overline{C}_{k+1} = \overline{C}_k$, $\underline{C}_{k+1} = C_k$.
6. Переходим к п. 1 при k, замененном на $k + 1$.

Теорема 4. *Условие п.* 4 *алгоритма* 2 *выполняется через конечное число шагов N, при этом $x(C_N) \in D(0)$ и*

$$f(x(C_N)) - f^* \le \varepsilon.$$

Доказательство. Предположим, что не существует номера N такого, что точка $x(C_N) \in D(0) \setminus A(\gamma\overline{\alpha})$. Тогда из невозрастания $V(x(C))$ по C следует, что для любого $k = 0, 1, \ldots$ выполняются неравенства $V(x(\overline{C}_k)) \le \gamma\overline{\alpha}$ и $V(x(\underline{C}_k)) \ge \overline{\alpha}$. Вычтем первое неравенство из второго,

получим
$$V(x(\underline{C}_k)) - V(x(\overline{C}_k)) \geq (1-\gamma)\overline{\alpha} > 0 \ \ \forall k = 0, 1, \ldots \tag{28}$$

Оценим разность штрафных коэффициентов, основываясь на п. 1 алгоритма
$$\begin{aligned}\overline{C}_{k+1} - \underline{C}_{k+1} &\leq \max\{\overline{C}_k - C_k, C_k - \underline{C}_k\} = \\ &= \max\{\overline{C}_k - \lambda_k \underline{C}_k - \overline{C}_k + \underline{C}_k, \lambda_k \underline{C}_k + (1-\lambda_k)\overline{C}_k - \underline{C}_k\} = \\ &= \max\{\lambda_k(\overline{C}_k - \underline{C}_k), (1-\lambda_k)(\overline{C}_k - \underline{C}_k)\} = \\ &= \max\{\lambda_k, 1-\lambda_k\}(\overline{C}_k - \underline{C}_k) \leq \max\{\overline{\lambda}, 1-\underline{\lambda}\}(\overline{C}_k - \underline{C}_k).\end{aligned}$$

Так как $0 < \underline{\lambda} \leq \overline{\lambda} < 1$, то можно указать такое число $\widehat{\lambda}$, что $\max\{\overline{\lambda}, 1-\underline{\lambda}\} < \widehat{\lambda} < 1$. Тогда $\overline{C}_{k+1} - \underline{C}_{k+1} < \widehat{\lambda}(\overline{C}_k - \underline{C}_k)$ и $\lim\limits_{k\to\infty}(\overline{C}_k - \underline{C}_k) = 0$. В силу непрерывности $V(x(C))$ по $C > 0$ имеем $\lim\limits_{k\to\infty}(V(x(\overline{C}_k)) - V(x(\underline{C}_k))) = 0$, что противоречит неравенству (28).

Пусть далее номер N такой, что $x(C_N) \in D(0) \setminus A(\gamma\overline{\alpha})$, и число C_γ такое, что $V(x(C_\gamma)) = \gamma\overline{\alpha}$. Тогда $V(x(C_N)) \geq V(x(C_\gamma))$ и $C_N \leq C_\gamma$. Из неубывания функции $f(x(C))$ по $C > 0$ следует неравенство $f(x(C_N)) \leq f(x(C_\gamma))$. Отсюда, из (19) и по теореме 2 верна оценка $f(x(C_N)) - f^* \leq f(x(C_\gamma)) - f^* \leq \frac{Lp}{\beta V(x(C_\gamma))}(V(x^*) - V(x(C_\gamma))) = \frac{Lp}{\beta\gamma\overline{\alpha}}(V(x^*) - \gamma\overline{\alpha}) \leq \varepsilon$. $\square$

Таким образом, решение с заданной точностью задачи (1) можно свести к нахождению такого числа $C' > 0$, при котором верны неравенства
$$\gamma\overline{\alpha} \leq V(x(C')) \leq \overline{\alpha}. \tag{29}$$

Так как $V(x(C))$ непрерывна и монотонно не возрастает по $C > 0$, то для нахождения значения C', удовлетворяющего условию (29), можно любым численным методом решить по C уравнение $V(x(C)) = \frac{1+\gamma}{2}\overline{\alpha}$ с точностью $\frac{1-\gamma}{2}\overline{\alpha}$ по функционалу. Приведем алгоритм, основанный на методе секущих.

Алгоритм 3. Подготовительный шаг. Задается требуемая точность решения ε задачи (1). Выбирается $0 < p \leq \min\{\frac{\varepsilon\beta\gamma\overline{\alpha}}{L(V(x^*)-\gamma\overline{\alpha})}, \lambda'\}$, $0 \leq C_0 < \frac{Lp}{\beta\gamma\overline{\alpha}}$, $C_1 \geq \frac{Lp}{\beta\overline{\alpha}}$. Любым методом безусловной минимизации отыскивается $x(C_0)$. Полагаем $k = 1$.

1. Выбирается метод A_k безусловной минимизации, обеспечивающий нахождение минимума функции $F(C_k, x)$.
2. Методом A_k отыскиваем $x(C_k) \in \operatorname{Arginf}\{F(C_k, x), x \in R_n\}$.
3. Если $x(C_k) \in D(0) \setminus A(\gamma\overline{\alpha})$, то процесс окончен и $x(C_k)$ является ε-решением задачи (1).
4. Находим $C_{k+1} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}\overline{\alpha} - V(x(C_k))}{V(x(C_{k-1})) - V(x(C_k))}(C_{k-1} - C_k) + C_k$.
5. Переходим к п. 1 при k, замененном на $k+1$.

3. Алгоритмы на основе штрафной функции, построенной по аппроксимации допустимого множества

Далее целевую функцию будем минимизировать при ограничении $V(x) \leq \gamma\overline{\alpha}$, $0 < \gamma < 1$, т. е. ставится задача
$$\min\{f(x),\ x \in A(\gamma\overline{\alpha}),\ 0 < \gamma < 1\}. \tag{30}$$

Пусть $C_\gamma > 0$ такое, что $V(x(C_\gamma)) = \gamma\overline{\alpha}$. Так как $x(C_\gamma) \in A(\gamma\overline{\alpha})$, то $\min\{f(x),\ x \in A(\gamma\overline{\alpha}),\ 0 < \gamma < 1\} \leq f(x(C_\gamma))$. Тогда из (19) при $p \leq \lambda'$ по теореме 2
$$\min\{f(x),\ x \in A(\gamma\overline{\alpha})\} - f^* \leq f(x(C_\gamma)) - f^* \leq C_\gamma(V(x^*) - V(x(C_\gamma))) \leq \frac{Lp}{V(x(C_\gamma))\beta}(V(x^*) - V(x(C_\gamma))).$$

Обозначим $\Delta V(x) = \frac{V(x^*)-V(x)}{V(x)}$. Если $p \le \frac{\varepsilon\beta}{\Delta V(x(C_\gamma))L}$, то решения задач (1) и (30) отличаются не более, чем на ε.

Будем решать задачу (30) при помощи вспомогательной функции

$$F_\gamma(x,C) = f(x) + CV_\gamma(x), \tag{31}$$

где $V_\gamma(x) = (V(x) - \gamma\overline{\alpha})^s_+$, $s \ge 1$, $t_+ = \max\{0,t\}$. Функция штрафа выбрана конкретного вида, т. к. допустимое множество задачи (30) задается лишь одним ограничением.

Если принять $h(x) = V(x) - \overline{\alpha}$, $p_\gamma = (1-\gamma)\overline{\alpha}$, то $V_\gamma(x) = (h(x) + p_\gamma)^s_+$. Таким образом, результаты теоремы 2 легко переносятся на случай решения с заданной точностью задачи $\min\{f(x) : x \in A(\overline{\alpha})\}$ путем погружения ее допустимого множества, задаваемого ограничением $h(x) \le 0$, на величину p_γ.

Всюду далее $X_\gamma(C) = \operatorname{Argmin}\{F_\gamma(x,C) : x \in R_n\}$, точка $x_\gamma(C) \in X_\gamma(C)$.

Теорема 5. *Пусть* $0 < p \le \lambda'$.*Тогда включение* $x_\gamma(C) \in A(\overline{\alpha})$ *достигается при всех* $C \ge \frac{Lp}{\beta s(1-\gamma)^{s-1}\overline{\alpha}^s}$.

Доказательство. Пусть $\overline{\overline{C}} > 0$ такое, что $V(x_\gamma(\overline{\overline{C}})) = \overline{\alpha}$. Тогда из невозрастания $V_\gamma(x_\gamma(C))$ по $C > 0$ следует, что для всех $C \ge \overline{\overline{C}}$ выполняется $V_\gamma(x_\gamma(C)) \le V_\gamma(x_\gamma(\overline{\overline{C}}))$, т. е.

$$[V(x_\gamma(C)) - \gamma\overline{\alpha}]^s_+ \le [V(x_\gamma(\overline{\overline{C}})) - \gamma\overline{\alpha}]^s_+. \tag{32}$$

Как известно ([7], с. 9), в методе внешних штрафов итерационные точки не принадлежат внутренности допустимого множества, т. е. $x_\gamma(C) \notin \operatorname{int} A(\gamma\overline{\alpha})$ и $V(x_\gamma(C)) - \gamma\overline{\alpha} \ge 0$. Тогда из (32) имеем $V(x_\gamma(C)) \le V(x_\gamma(\overline{\overline{C}}))$. Отсюда $x_\gamma(C) \in A(V(x_\gamma(\overline{\overline{C}}))) = A(\overline{\alpha}) \subset D(0)$ при любом $C \ge \overline{\overline{C}}$. В этом случае аналогично доказательству теоремы 2 имеем $\|V'(x_\gamma(C))\| \ge \frac{V(x_\gamma(C))\beta}{p}$. Отсюда легко получить подобную оценку для нормы градиента штрафной функции $V_\gamma(x)$: $\|V'_\gamma(x_\gamma(C))\| = s(V(x_\gamma(C))-\gamma\overline{\alpha})^{s-1}_+\|V'(x_\gamma(C))\| \ge s(V(x_\gamma(C))-\gamma\overline{\alpha})^{s-1}_+\frac{V(x_\gamma(C))\beta}{p}$. Тогда $\|V'_\gamma(x_\gamma(\overline{\overline{C}}))\| \ge s(V(x_\gamma(\overline{\overline{C}}))-\gamma\overline{\alpha})^{s-1}_+\frac{V(x_\gamma(\overline{\overline{C}}))\beta}{p} = s(\overline{\alpha}-\gamma\overline{\alpha})^{s-1}_+\frac{\overline{\alpha}\beta}{p} = \frac{s(1-\gamma)^{s-1}\overline{\alpha}^s\beta}{p}$. Отсюда $\overline{\overline{C}} = \frac{\|f'(x_\gamma(\overline{\overline{C}}))\|}{\|V'_\gamma(x_\gamma(\overline{\overline{C}}))\|} \le \frac{Lp}{s(1-\gamma)^{s-1}\overline{\alpha}^s\beta}$. Следовательно, при $C \ge \frac{Lp}{s(1-\gamma)^{s-1}\overline{\alpha}^s\beta}$ имеем $C \ge \overline{\overline{C}}$ и $x_\gamma(C) \in A(\overline{\alpha})$. □

Алгоритм 4. Задается требуемая точность решения $\varepsilon > 0$. Выбирается $0 < p \le \min\{\frac{\varepsilon\beta}{\Delta V(x(C_\gamma))L}, \lambda'\}$, натуральное число $N > 0$. Задаем $x_0 \in R_n$ и возрастающую функцию $\varphi(t)$ такую, что $\varphi(N) \ge \frac{Lp}{\beta s(1-\gamma)^{s-1}\overline{\alpha}^s}$, $\varphi(1) \ge 0$. Полагаем $k = 1$.

1. Вычисляется $C_k = \varphi(k)$.
2. Выбирается метод A_k безусловной минимизации, обеспечивающий нахождение точной нижней грани функции $F_\gamma(x, C_k)$.
3. Методом A_k отыскиваем $x_\gamma(C_k) = \operatorname{Argmin}\{F_\gamma(x,C_k),\ x \in R_n\}$.
4. Если $x_\gamma(C_k) \in D(0)$, то процесс окончен и $x_\gamma(C_k)$ является допустимым ε-решением задачи (1). Иначе, заменяем k на $k+1$ и переходим к п. 1.

Теорема 6. *Последовательность* $\{x_k\}$, *построенная по алгоритму* 1, *сходится к* ε-*оптимальному решению задачи* (1) *не более, чем за* N *итераций алгоритма.*

Доказательство. Если при $k < N$ условие на п. 4 алгоритма не выполнится, то при $k = N$ штрафной коэффициент $C_k \ge \frac{Lp}{\beta s(1-\gamma)^{s-1}\overline{\alpha}^s}$ и по теореме (5) $x_k \in A(\overline{\alpha}) \subset D(0)$, что означает остановку алгоритма при $k = k' \le N$. При использовании вспомогательной функции (31) итерационные точки $x_k \notin A(\gamma\overline{\alpha})$ для любого $k \ge 0$. Тогда вследствие неубывания функции $f(x_\gamma(C))$ по $C > 0$ имеем $\min\{f(x) : x \in A(\gamma\overline{\alpha})\} \ge f(x_{k'}) \ge f^*$. Отсюда, вследствие $p \le \frac{\varepsilon\beta}{\Delta V(x(C_\gamma))L}$, выполняется $f(x_{k'}) - f^* \le \varepsilon$. □

Очевидно, оценка величины $\Delta V(x(C_\gamma))$ зависит от конкретного вида штрафной функции. Приведем более содержательные оценки параметров штрафа и p для известных функций штрафа

$$V_1(x) = \sum_{i\in I}(\max\{f_i(x)+p,0\})^q, \quad q\geq 1, \tag{33}$$
$$V_2(x) = (\max\{g(x)+p,0\})^q, \qquad q\geq 1. \tag{34}$$

Лемма 5. *Верны следующие утверждения*:

$$\overline{\alpha} = p^q,$$
$$V(x^*) \leq tp^q, \tag{35}$$

где $t = m$ *при* $V(x) = V_1(x)$ *и* $t = 1$ *при* $V(x) = V_2(x)$.

Доказательство. 1) Пусть точка $x \in A(p^q)$, т. е. $\sum\limits_{i\in I}(\max\{f_i(x)+p,0\})^q \leq p^q$. Так как в левой части неравенства суммируются неотрицательные числа, то $(\max\{f_i(x)+p,0\})^q \leq p^q$ для любого индекса $i\in I$. Так как $q>1$ и $p>0$, то для всех $i\in I$ выполняется $f_i(x)+p\leq p$, что означает попадание точки x в множество $D(0)$ и включение $A(p^q)\subset D(0)$. Покажем, что при любом $\tau>1$ в множестве $A(\tau p^q)$ найдется точка x такая, что $x\notin D(0)$. Действительно, выберем точку x таким образом, чтобы для некоторого индекса $s\in I$ выполнялось $f_s(x)+p=\tau^{1/q}p$ и $f_i(x)+p\leq 0$ при всех $i\neq s$. Тогда $\sum\limits_{i\in I}(\max\{f_i(x)+p,0\})^q = \tau p^q$ и $x\in A(\tau p^q)$. Но $f_s(x) = (\tau^{1/q}-1)p>0$, т. е. $x\notin D(0)$. Таким образом, доказали, что $p^q = \max\{\alpha : A(\alpha)\subset D(0)\}$, откуда по определению $\overline{x}$ имеем $V_1(\overline{x}) = p^q$.

Далее $V(x^*) = \sum\limits_{i\in I}(\max\{f_i(x^*)+p,0\})^q \leq mp^q$, т. к. $f_i(x^*)\leq 0$ для всех $i\in I$.

2) Выберем произвольно $x\in A(p^q)$. При этом $V_2(x) = (\max\{g(x)+p,0\})^q\leq p^q$ или, что то же самое, $\max\limits_{i\in I}\{[\max(f_i(x)+p,0)]^q\}\leq p^q$. Тогда $[(f_i(x)+p)_+]^q\leq p^q$ для любого $i\in I$. Так как $p>0$ и $q>1$, то $f_i(x)+p\leq p$ при всех $i\in I$. Отсюда $x\in D(0)$, и в силу произвольности точки $A(p^q)\subset D(0)$. Верны и обратные рассуждения, из которых следует $D(0)\subset A(p^q)$. Тогда $A(p^q) = D$ и $V_2(\overline{x}) = p^q$.

Неравенство $V_2(x^*)\leq p^q$ следует из того, что $x^*\in D(0) = A(p^q)$. $\square$

Следствие. Имеет место неравенство

$$\Delta V(x(C_\gamma)) \leq \frac{t-\gamma}{\gamma}, \tag{36}$$

где $t = m$ при $V(x) = V_1(x)$ и $t = 1$ при $V(x) = V_2(x)$.

Доказательство. По определению числа C_γ имеем $V(x(C_\gamma)) = \gamma V(x(\overline{C})) = \gamma\overline{\alpha} = \gamma p^q$. Тогда $\Delta V(x(C_\gamma)) = \frac{V(x^*)-V(x(C_\gamma))}{V(x(C_\gamma))} = \frac{V(x^*)-\gamma V(x(\overline{C}))}{\gamma V(x(\overline{C}))} = \frac{V(x^*)-\gamma\overline{\alpha}}{\gamma\overline{\alpha}}$. Учитывая (35), сократим дробь на величину $\overline{\alpha}>0$ и получим (36). $\square$

Замечание. Если в алгоритмах 2, 3 и 4 выбирать $0<p\leq\min\{\frac{\varepsilon\beta\gamma}{L(t-\gamma)},\lambda'\}$, где $t=m$ при $V(x)=V_1(x)$ и $t=1$ при $V(x)=V_2(x)$, то в силу соотношений $\frac{\varepsilon\beta}{\Delta V(x(C_\gamma))L}\geq\frac{\varepsilon\beta\gamma}{(t-\gamma)L}>0$ будут выполняться неравенства $0<p\leq\min\{\frac{\varepsilon\beta}{\Delta V(x(C_\gamma))L},\lambda'\}$.

4. Алгоритмы с неполной минимизацией вспомогательных функций

Алгоритмы 1–4 являются принципиальными, т. к. в них необходимо вспомогательные задачи решать точно. В общем случае это означает бесконечный процесс минимизации вспомогательных функций.

В данном параграфе приводятся два алгоритма, допускающих приближенное решение вспомогательных задач. Определенный выбор параметра p в зависимости от заданной точности решения вспомогательных задач обеспечивает требуемую точность решения задачи (1).

Алгоритм 5. Задается требуемая точность решения $\varepsilon > 0$, $x_0 \in R_n$, натуральное число $N > 0$, число $\delta \in (0, \varepsilon)$. Выбирается $0 < p \le \min\{\frac{\beta}{2L}(\varepsilon - \delta), \lambda'\}$, возрастающая функция $\varphi(t)$ такая, что $\varphi(1) \ge 0$, $\varphi(N) = \frac{Lp}{\overline{\alpha}\beta}$. Полагается $k = 1$.

1. Вычисляется $C_k = \varphi(k)$.
2. Если $k < N$, то находится приближенное решение задачи $\min\limits_{x \in R_n} F(x, C_k)$. Переход к п. 1 при k, замененном на $k+1$.
3. Если $k = N$, то находится точка $x_N \in A(\overline{\alpha})$, являющаяся δ-оптимальным по функционалу решением задачи $\min\limits_{x \in R_n} F(x, C_N)$. Точка x_N принимается в качестве ε-решения задачи (1).

Теорема 7. *Точка x_N, построенная при помощи алгоритма 5, является ε-решением исходной задачи.*

Доказательство. Так как точка x_N является δ-оптимальным решением вспомогательной задачи, то $F(x_N) - F(x(C_N)) \le \delta$. Поэтому по определению функции $F(x)$ верно неравенство $f(x_N) - f(x(C_N)) - C_N(V(x(C_N)) - V(x_N)) \le \delta$. Так как $x_N \in A(\overline{\alpha})$ и $x(C_N) \in A(\overline{\alpha})$, то $V(x(C_N)) - V(x_N) \le \overline{\alpha}$. Отсюда

$$f(x_N) - f(x(C_N)) \le C_N\overline{\alpha} + \delta. \tag{37}$$

Из доказательства теоремы 1 видно, что $f(x(C_N)) - f^* \le \frac{L}{\beta}p$. Тогда $f(x_N) - f^* - \frac{L}{\beta}p \le f(x_N) - f(x(C_N))$. Отсюда и из (37) получим неравенство

$$f(x_N) - f^* \le \frac{L}{\beta}p + C_N\overline{\alpha} + \delta.$$

Так как в алгоритме задается $C_N = \frac{Lp}{\overline{\alpha}\beta}$, то

$$f(x_N) - f^* \le \frac{L}{\beta}p + \frac{L}{\beta}p + \delta = 2\frac{Lp}{\beta} + \delta.$$

Учитывая, что $p \le \frac{\beta}{2L}(\varepsilon - \delta)$, получим $f(x_N) - f^* \le \frac{2L\beta(\varepsilon-\delta)}{2L\beta} + \delta = \varepsilon$. $\square$

Алгоритм 6. Задается требуемая точность решения $\varepsilon > 0$, $x_0 \in R_n$, число $\delta \in (0, \varepsilon)$, натуральное число $N > 0$. Выбирается $0 < p \le \min\{\frac{\beta\gamma\overline{\alpha}}{(V(x^*) - \gamma^2\overline{\alpha})L}(\varepsilon - \delta), \lambda'\}$, возрастающая функция $\varphi(t)$ такая, что $\varphi(1) \ge 0, \varphi(N) = \frac{Lp}{\beta s(1-\gamma)^{s-1}\overline{\alpha}^p}$. Полагается $k = 1$.

1. Вычисляется $C_k = \varphi(k)$.
2. Если $k < N$, то находится приближенное решение задачи $\min\limits_{x \in R_n} F_\gamma(x, C_k)$. Переход к п. 1 при k, замененном на $k+1$.
3. Если $k = N$, то находится точка $x_N \in A(\overline{\alpha})$, являющаяся δ-оптимальным по функционалу решением задачи $\min\limits_{x \in R_n} F_\gamma(x, C_N)$. Точка x_N принимается в качестве ε-решения задачи (1).

Выполнение условий п. 3 алгоритма 6 и ε-оптимальность полученной точки x_N доказываются аналогично предыдущей теореме. Если используется штрафная функция вида (33) или (34), то можно выбирать $0 < p \le \min\{\frac{\beta\gamma}{(t-\gamma^2)L}(\varepsilon - \delta), \lambda'\}$, где $t = m$ при $V(x) = V_1(x)$ и $t = 1$ при $V(x) = V_2(x)$.

Литература

1. Заботин Я.И., Фукин И.А. *Об одной модификации метода сдвига штрафов для задач нелинейного программирования* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 12. – С. 49–54.
2. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. *Модифицированные функции Лагранжа* // Экономика и матем. методы. – 1974. – Т. 10. – № 3. – С. 568–591.
3. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. *Курс методов оптимизации.* – М.: Наука, 1986. – 326 с.
4. Давыдов Э.Г. *Исследование операций.* – М.: Высш. школа, 1990. – 383 с.
5. Федоров В.В. *Численные методы максимина.* –М.: Наука, 1979. – 280 с.
6. Фукин И.А. *Решение задачи линейного программирования с заданной точностью методом штрафов* // Тр. межд. семин., посвященного 90-летию С.Н. Черникова. Алгебра и линейная оптимизация. Екатеринбург: УрО РАН, 2002. – С. 309–313.
7. Фиакко А., Мак-Кормик Г. *Нелинейное программирование на основе последовательной безусловной минимизации.* – М.: Мир, 1972. – 240 с.

Казанский государственный университет

Поступила 28.10.2003