ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 6 (505)

УДК 517.925

Ю.Е. БОЯРИНЦЕВ, И.В. ОРЛОВА

БЛОЧНЫЕ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ ИНДЕКСЫ

Статья посвящена алгебро-дифференциальным системам (АДС) вида

$$Q_1x_1' + Q_2x_2' = R_1x_1 + R_2x_2 + f_1,$$
$$0 = R_3x_1 + R_4x_2 + f_2.$$

Такие системы по очевидным причинам часто называются *полуявными*, но в данной статье употребляется термин *блочные*, т. к. целью является установление признаков принадлежности таких систем к классу АДС, имеющих индекс 1 и 2. При этом используются только свойства блоков, входящих в матрицы системы.

Индекс системы является весьма важной характеристикой АДС. Он определяет степень сложности решения системы и подсказывает способы построения вычислительных алгоритмов.

Блочные системы индекса 1 (и реже 2) часто возникают в приложениях (электрические и гидравлические цепи, управляемые системы, оптимальное управление, экономические задачи и т. д.). Для решения нелинейных АДС индекса 1 полуявного типа предлагаются и численные методы (напр., [1]). В данной статье рассматривается линейный аналог таких систем (правда, в несколько более общем случае) с выводом простых ранговых критериев принадлежности системы к системам индекса 1.

Теоремы, сформулированные и доказанные ниже, полезны при составлении программ, реализующих методы решения задач, связанных с блочными системами.

1. Алгебро-дифференциальные системы и их решение

Под алгебро-дифференциальными системами с постоянными матрицами понимаются системы вида

$$A\frac{dx(t)}{dt} = Bx(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.1}$$

где матрицы A и B являются квадратными, причем $\det A = 0$.

Известно ([2], с. 28), что существуют такие квадратные матрицы $C_0, C_1, \dots$, что решение системы (1.1) сводится к решению системы

$$\frac{dx(t)}{dx} = C_0Bx(t) + \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{d}{dt}\right)^i [C_if(t)], \tag{1.2}$$

$$(E - C_0A)x(t) = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1} [C_if(t)]. \tag{1.3}$$

Если речь идет о решении системы (1.1) при начальном данном $x(0) = a$, то уравнение (1.3) можно удовлетворить только в начальной точке $t = 0$. Все допустимые начальные данные удовлетворяют уравнению

$$(E - C_0 A)a = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1} [C_i f(t)]\big|_{t=0}.$$

Матрицы $C_0, C_1, \ldots$, входящие в систему (1.2)–(1.3), называются базовыми, и для их вычисления существуют конструктивные методы, изложенные в [2].

Базовые матрицы являются решением системы

$$\begin{gathered} AC_i - BC_{i+1} = \delta_i^0 E, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, \\ AC_k = 0, \end{gathered} \tag{1.4}$$

где δ_i^0 — символ Кронекера.

Наименьшее число k, при котором система (1.4) имеет решение, называется индексом пары матриц (A, B) (или системы (1.1)). Ясно, что если система (1.1) разрешима при некотором $k_0 \geq 0$, то она разрешима и при всех $k > k_0$. Заметим, что индекс пары матриц (A, B) не превышает их порядок.

Для матрицы, стоящей в левой части системы (1.4), введем обозначение

$$\mathfrak{I}_k = \begin{pmatrix} A & -B & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A & -B & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A & -B \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathfrak{I}_k$ имеет $(k+1)$ блочных строк и порядок, равный $n(k+1)$, где n — порядок матриц A и B.

Согласно теореме Кронекера–Капели система (1.4) разрешима в том и только том случае, когда

$$\operatorname{rank} \mathfrak{I}_k = \operatorname{rank} \left(\mathfrak{I}_k \quad E\right),$$

т. е. (после элементарных преобразований)

$$\operatorname{rank} \mathfrak{I}_k = n + \operatorname{rank} \mathfrak{I}_{k-1}. \tag{1.5}$$

Необходимо отметить, что все эти результаты справедливы для случая, когда пара матриц (A, B) из системы (1.1) является регулярной.

Определение. Пара квадратных матриц (A, B) называется *регулярной*, если существует число ε, при котором матрица $(B - \varepsilon A)$ является невырожденной, т. е. $\det(B - \varepsilon A) \neq 0$.

2. Класс рассматриваемых систем

В данной статье будем рассматривать алгебро-дифференциальные системы, имеющие следующую блочную структуру:

$$Ax' = Bx + f, \tag{2.1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

Q_1, Q_2, R_1, R_2, R_3, R_4 — подматрицы соответственно размеров $m \times m$, $m \times p$, $m \times m$, $m \times p$, $p \times m$, $p \times p$, так что $n = m + p$, где n — порядок матриц A и B.

Теорема 2.1. *Для того чтобы пара матриц* (2.2), *в которой* $\det R_4 \neq 0$, *была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число* ε, *при котором выполнено неравенство*

$$\det[(R_1 - R_2 R_4^{-1} R_3) - \varepsilon(Q_1 - Q_2 R_4^{-1} R_3)] \neq 0. \tag{2.3}$$

Доказательство сводится к установлению условия, при котором матрица $(B - \varepsilon A)$ имеет обратную.

Замечание 2.1. В случае произвольной пары матриц вида (2.2) из регулярности, очевидно, следует, что пара матриц $\begin{pmatrix} R_3 & R_4 \end{pmatrix}$ имеет полный ранг, т. е. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} R_3 & R_4 \end{pmatrix} = p$.

3. Блочные системы и их базовые матрицы

Условием принадлежности блочной системы (2.1) к классу систем индекса k является справедливость равенства (1.5), в котором

$$\mathfrak{I}_k = \begin{pmatrix}
Q_1 & Q_2 & -R_1 & -R_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -R_3 & -R_4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & Q_1 & Q_2 & -R_1 & -R_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -R_3 & -R_4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & Q_1 & Q_2 & -R_1 & -R_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -R_3 & -R_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & Q_1 & Q_2
\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Для некоторых часто встречающихся на практике блочных систем данную формулировку можно значительно упростить. А именно, справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть в системе*

$$\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x' = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} x + f \tag{3.2}$$

матрица $\left(\begin{smallmatrix} Q_1 & Q_2 \\ R_3 & R_4 \end{smallmatrix}\right)$ *неособенная. Тогда система* (1.4) *разрешима при любом* $k \geq 1$.

Доказательство. Используя неособенность матрицы $\left(\begin{smallmatrix} Q_1 & Q_2 \\ R_3 & R_4 \end{smallmatrix}\right)$, с помощью элементарных преобразований легко получить равенства

$$\operatorname{rank} \mathfrak{I}_k = k(m+p) + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix},$$
$$\operatorname{rank} \mathfrak{I}_{k-1} = (k-1)(m+p) + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следуют (1.5), (3.1). $\square$

Теорема 3.2. *Если для системы* (3.2) *выполнено условие*

$$\det \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} \neq 0,$$

то эта система имеет индекс 1.

Доказательство сводится к вычислению решения системы (1.4). Эта система для нашей блочной структуры выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{01} & C_{02} \\ C_{03} & C_{04} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{i+1\ 1} & C_{i+1\ 2} \\ C_{i+1\ 3} & C_{i+1\ 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{i+2\ 1} & C_{i+2\ 2} \\ C_{i+2\ 3} & C_{i+2\ 4} \end{pmatrix}, \quad i = 0, \ldots, k-2, \\ \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{k1} & C_{k2} \\ C_{k3} & C_{k4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Обозначим

$$C_i = \begin{pmatrix} C_{i1} & C_{i2} \\ C_{i3} & C_{i4} \end{pmatrix}.$$

Преобразуем систему (3.3), выделив в ней необходимую матрицу, и получим

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} C_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} C_{i+1} = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_{i+2}, \quad i = 1, \ldots, k-2, \\ \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_2, \quad \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_0 = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered}$$

Учитывая, что $\det \left(\begin{smallmatrix} Q_1 & Q_2 \\ R_3 & R_4 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$, видим, что матрицы C_i, $i = 2, \ldots, k$, оказываются нулевыми. Что касается базовых матриц C_0, C_1, то матрица C_1 определяется однозначно и имеет вид

$$C_1 = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}.$$

Для матрицы же C_0 (вследствие разрешимости системы (1.4)) можно взять одну из ее возможных форм

$$C_0 = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}^{+} \left(\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} E & 0 \end{pmatrix} \right),$$

где знак $+$ обозначает псевдообратную матрицу.

Таким образом, минимальное значение k, при котором система (1.4) разрешима, есть $k = 1$. □

Теорема 3.3. *Пусть в системе* (3.2) *матрица* $\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}$ *имеет полный ранг, т. е.* $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} = m$. *Для того чтобы эта система имела индекс* 1, *необходимо и достаточно, чтобы матрица* $\left(\begin{smallmatrix} Q_1 & Q_2 \\ R_3 & R_4 \end{smallmatrix}\right)$ *была неособенной.*

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 3.2.

Необходимость. Предположим, что $\left(\begin{smallmatrix} Q_1 & Q_2 \\ R_3 & R_4 \end{smallmatrix}\right)$ является особенной, тогда

$$\begin{gathered}\operatorname{rank} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} < n, \\ \operatorname{rank} \mathfrak{I}_1 < m + n = 2m + p, \end{gathered}$$

в то же время из равенств (1.5), (3.1) следует

$$\operatorname{rank} \mathfrak{I}_1 = n + \operatorname{rank} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} = 2m + p.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. □

Замечание 3.1. Очевидно, если условия теоремы 3.3 выполнены, то система (3.2) легко сводится к системе вида

$$\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ -f_2' \end{pmatrix}$$

с невырожденной матрицей при производных, начальные данные для которой должны удовлетворять условию

$$R_3 x_1(0) + R_4 x_2(0) + f_2(0) = 0.$$

Решая для этого случая систему (1.4), при $k = 1$ получим следующие базовые матрицы:

$$C_0 = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}^{-1}, \quad C_1 = 0.$$

Из теоремы 3.3 вытекает следствие, доказанное разными способами ([3], с. 115; [4], с. 11).

Следствие 3.1. Для того чтобы система

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

имела индекс 1, необходимо и достаточно, чтобы матрица R_4 была неособенной.

Доказательство. Для системы (3.4) выполнены все условия теоремы 3.3. Действительно, в данном случае $Q_1 = E$, $Q_2 = 0$. Следовательно, $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} = m$ и матрица

$$\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}$$

является неособенной в том и только том случае, когда $\det R_4 \neq 0$. $\square$

Введем обозначения $Q = Q_1 - Q_2 R_4^{-1} R_3$, $R = R_1 - R_2 R_4^{-1} R_3$.

Теорема 3.4. *Система* (1.4), *в паре матриц* (2.2) *которой* $\det R_4 \neq 0$, *совместна тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & -R & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q & -R & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & Q & -R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & Q \end{pmatrix} = m + \operatorname{rank} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & -R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Q & -R & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & Q \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

где в левой части матрица имеет размерность $(km+1) \times (km+2)$, *а в правой —* $((k-1)m+1) \times ((k-1)m+2)$.

Доказательство теоремы получается из необходимого и достаточного условия (1.5) с помощью элементарных преобразований над входящими в матрицы блоками с учетом неособенности матрицы R_4. $\square$

Теорема 3.5. *Если в системе* (3.2) *матрицы* R_4 *и* Q *неособенные, то равенство рангов* (3.5) (*а следовательно, и* (1.5)) *выполнено при всех* $k \geq 1$.

Доказательство. Для левой части (3.5), учитывая, что $\det Q \neq 0$, получим

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & -R & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q & -R & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & Q & -R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & Q \end{pmatrix} = km + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix},$$

а для правой —

$$m + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & -R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Q & -R & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & Q \end{pmatrix} = m + (k-1)m + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}.$$

Полученные выражения равны. $\square$

Теорема 3.6. *Если для системы* (3.2) *выполнены условия* $\det R_4 \neq 0$ *и* $\det Q \neq 0$, *то система имеет индекс* 1.

Доказательство. Систему (3.3), полученную для нашей блочной структуры, учитывая, что $\det R_4 \neq 0$, запишем в виде

$$\begin{aligned} &Q_1C_{01} + Q_2C_{03} = RC_{11} + E, && C_{i3} = -R_4^{-1}R_3C_{i1}, \\ &Q_1C_{02} + Q_2C_{04} = RC_{12} - R_2R_4^{-1}, && C_{i4} = -R_4^{-1}R_3C_{i2}, \quad i = 2, \dots, k, \\ &C_{13} = -R_4^{-1}R_3C_{11}, && QC_{i1} = RC_{i+1\ 1}, \\ &C_{14} = -R_4^{-1}R_3C_{12} - R_4^{-1}, && QC_{i2} = RC_{i+1\ 2}, \quad i = 2, \dots, k-1, \\ &QC_{11} = RC_{21}, && QC_{k1} = 0, \\ &QC_{12} - Q_2R_4^{-1} = RC_{22}, && QC_{k2} = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Далее, используя условие $\det Q \neq 0$, видим, что одна часть блоков матриц C_i, $i = 2, \dots, k$, состоит из нулевых матриц, а другая — из произвольных. Произвольные блоки можно положить равными, в частности, нулю, так что система (1.4) оказывается разрешимой при $k = 1$. $\square$

Базовые матрицы для такой системы выглядят следующим образом:

$$C_0 = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} E & RQ^{-1}Q_2R_4^{-1} - R_2R_4^{-1} \end{pmatrix},$$
$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & Q^{-1}Q_2R_4^{-1} \\ 0 & -R_4^{-1}R_3Q^{-1}Q_2R_4^{-1} - R_4^{-1} \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.7. *Если в регулярной системе* (3.2) *матрица* R_4 *неособенная, а* $Q = 0$, *то равенство рангов* (3.5) (*а следовательно, и* (1.5)) *выполнено при всех* $k \geq 1$.

Доказательство. Преобразуем левую и правую части (3.5), учитывая следующее. Так как пара матриц (2.2) регулярна и $Q = Q_1 - Q_2R_4^{-1}R_3 = 0$, то согласно неравенству (2.3) матрица

$R = R_1 - R_2 R_4^{-1} R_3$ неособенная. Но тогда

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & -R & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q & -R & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & Q & -R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & Q \end{pmatrix} = km,$$

$$m + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & -R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Q & -R & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q & \dots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & Q \end{pmatrix} = m + (k-1)m,$$

т. е. равенство (3.5) выполнено. □

Замечание 3.2. Если для системы (3.2) выполнены условия теоремы 3.7, то эта система имеет индекс 1 или 2, причем индекс 1 возможен только в том случае, когда матрицы Q_1 и Q_2 нулевые.

Для доказательства справедливости этого замечания преобразуем систему (3.6):

$$\begin{aligned} &Q_1 C_{01} + Q_2 C_{03} = RC_{11} + E, && RC_{22} = -Q_2 R_4^{-1}, \\ &Q_1 C_{02} + Q_2 C_{04} = RC_{12} - R_2 R_4^{-1}, && C_{i3} = -R_4^{-1} R_3 C_{i1}, \\ &C_{13} = -R_4^{-1} R_3 C_{11}, && C_{i4} = -R_4^{-1} R_3 C_{i2}, \quad i = 2, \dots, k, \\ &C_{14} = -R_4^{-1} R_3 C_{12} - R_4^{-1}, && RC_{i+1\;1} = 0, \\ &RC_{21} = 0, && RC_{i+1\;2} = 0, \quad i = 2, \dots, k-1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Из последних четырех равенств (3.7) видно, что блоки матриц C_i, $i = 3, \dots, k$, нулевые или произвольные. Полагая их нулевыми, рассмотрим две возможности.

1. Система индекса 2.

Теорема 3.8. *Если в регулярной системе* (3.2) $\det R_4 \neq 0$ *и* $Q = 0$, *то система имеет индекс* 2.

Доказательство вытекает из доказательства замечания 3.2.

Для этой системы базовые матрицы могут выглядеть следующим образом:

$$C_0 = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} E & -R_2 R_4^{-1} \end{pmatrix},$$
$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R_4^{-1} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -R^{-1} Q_2 R_4^{-1} \\ 0 & R^{-1} R_3 R^{-1} Q_2 R_4^{-1} \end{pmatrix}.$$

2. Система индекса 1. При выполнении условий теорем 3.7 и 3.8 для индекса 1 справедлива

Теорема 3.9. *Пусть в регулярной системе* (3.2) $\det R_4 \neq 0$ *и* $Q = 0$. *Тогда пара матриц в ней имеет индекс* 1, *только если матрицы* Q_1 *и* Q_2 *являются нулевыми.*

Доказательство. Из регулярности системы и условия $Q = 0$ в силу неравенства (2.3) следует $\det R \neq 0$. Но тогда из равенства (3.5), которое для системы индекса 1 имеет вид

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & -R \\ 0 & 0 & Q \end{pmatrix} = m + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}$$

вытекает равенство $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} = 0$, откуда следует, что матрицы Q_1 и Q_2 нулевые.

Базовые матрицы в этом случае

$$C_0 = 0, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -R^{-1} & R^{-1}R_2R_4^{-1} \\ R_4^{-1}R_3R^{-1} & -R_4^{-1}R_3R^{-1}R_2R_4^{-1} - R_4^{-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда АДС превращается в алгебраическую систему, а базовые матрицы и уравнение (1.3) позволяют получить ее единственное решение

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

При практических применениях сформулированных теорем можно использовать равенство $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{spur}(A^+A) = \operatorname{spur}(AA^+)$. Для вычисления псевдообратной матрицы A^+ хорошо зарекомендовал себя метод Фаддеева, специально приспособленный для этих целей ([2], с. 53).

Литература

1. Куликов Г.Ю. *Численное решение дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений индекса* 1 *методами Рунге–Кутты с гарантированной точностью* // Тез. докл. третьего сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98), посв. С.Л. Соболеву. Ч.II. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1998. – С. 19.
2. Бояринцев Ю.Е. *Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы.* – Новосибирск: Наука, 2000. – 223 с.
3. Бояринцев Ю.Е. *Методы решения непрерывных и дискретных задач для сингулярных систем уравнений.* – Новосибирск: Наука, 1996. – 261 с.
4. Чистяков В.Ф. *О связи свойств вырожденных систем и задач вариационного исчисления.* – Препринт № 5 ИрВЦ СО АН СССР. – Иркутск, 1989. – 29 с.

Институт динамики систем
и теории управления
Сибирского отделения
Российской академии наук

Поступила
22.07.2002