ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 2 (489)

УДК 517.546

Т.П. СИЖУК

ГРАНИЦА ПОЧТИ ВЫПУКЛОСТИ В ТОЧКЕ ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В статье находится точная граница почти выпуклости заданного порядка в точке для регулярных и однолистных в единичном круге функций.

Пусть R — класс всех регулярных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций, β — произвольно фиксированное число, $0 \le \beta \le 1$.

Известно (напр., [1], [2]), что функция $f(z) \in R$, нормированная условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, называется почти выпуклой порядка β в E, если существуют такие выпуклая функция $g(z) \in R$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, и комплексная постоянная ε, $|\varepsilon| = 1$, что в E

$$\left| \arg\left\{\frac{\varepsilon f'(z)}{g'(z)}\right\}\right| \le \frac{\beta\pi}{2}.$$

При отсутствии нормировки функций $f(z)$ и $g(z)$ (или одной из них) полагается $\varepsilon = 1$.

Почти выпуклые порядка 0 в E функции составляют класс выпуклых функций из R, а почти выпуклые порядка $\beta = 1$ — введенный в [3] класс почти выпуклых функций. Все почти выпуклые порядка β, $0 \le \beta \le 1$, в E функции однолистны в E [3] и образуют специальные подклассы классов функций, введенных в [4].

Пусть c — произвольно фиксированная точка в круге E и $E(c,\rho) = \{z : |z-c| < \rho\}$ — круг, лежащий в E.

Определение. Функция $f(z) \in R$ называется почти выпуклой порядка β в круге $E(c,\rho)$, если существует регулярная и выпуклая в $E(c,\rho)$ функция $g(z)$ такая, что $|\arg\{f'(z)/g'(z)\}| \le \beta\pi/2$ в $E(c,\rho)$.

Легко обосновывается

Лемма. *Функция $f(z)$ из R почти выпукла порядка β в $E(c,\rho)$ тогда и только тогда, когда $f'(z) \ne 0$ в $E(c,\rho)$ и для всех r, $0 < r < \rho$, φ_1, φ_2, $\varphi_1 < \varphi_2$, выполняется неравенство*

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \operatorname{Re}\left\{1 + (z-c)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} d\varphi > -\beta\pi, \quad z = c + re^{i\varphi}. \tag{1}$$

1. Нижняя оценка $\arg\{(z_2-c)f'(z_2)/(z_1-c)f'(z_1)\}$ на классе S

Обозначим через S класс всех однолистных функций $f(z) \in R$, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Основываясь на способе рассуждений, первоначально использованном в [5], докажем следующую теорему, которой воспользуемся в дальнейшем.

Теорема 1. *При любых $z_k = c + re^{i\varphi_k}$, $k = 1, 2$, $0 < \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi$, $r + |c| < 1$, для $f(z) \in S$ справедлива оценка*

$$\arg\frac{(z_2-c)f'(z_2)}{(z_1-c)f'(z_1)} \ge \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < a \le 1/2; & (2)\\ \psi_1(a) & \text{при } 1/2 < a \le \sqrt{5/8}; & (3)\\ \psi_2(a) & \text{при } \sqrt{5/8} \le a < 1, & (4)\end{cases}$$

где

$$\psi_1(a) = 2\,\mathrm{arcctg}\,\sqrt{(1-a^2)/(4a^2-1)} - 4\arcsin\sqrt{(4a^2-1)/3}, \tag{5}$$

$$\psi_2(a) = 2\,\mathrm{arcctg}\,y_0 + \ln(y_0^2 - a^2 + 1) - 2\ln a - \pi, \tag{6}$$

$y_0 = y_0(a)$ — *единственный действительный корень полинома* $y^3 - y^2 + y + a^2 - 1$*,* $a = 2r/(1 + r^2 - |c|^2)$*,* $\arg\{(z_2 - c)f'(z_2)/(z_1 - c)f'(z_1)\}$ *определяется по формуле*

$$\arg\{(z_2 - c)f'(z_2)/(z_1 - c)f'(z_1)\} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d_\varphi \arg\{re^{i\varphi} f'(c + re^{i\varphi})\}. \tag{7}$$

Оценка (2) *точная, но не достигается функциями класса* S*. Оценки* (3) *и* (4) *являются точными в том смысле, что существуют функции* $f(z) \in S$*, для которых в соответствующих неравенствах имеет место знак равенства при некоторых* z_1*,* z_2*,* $|z_1 - c| = |z_2 - c| = r$*.*

Доказательство. Пусть $z_1 = c + re^{i\varphi_1}$ — произвольно фиксированная точка из круга E и $z_2 = c + re^{i(\varphi_1+\gamma)}$, $0 < \gamma < 2\pi$. Выполним отображение $\zeta = \zeta(z) = (z - z_1)/(1 - \overline{z}_1 z)$ круга E самого на себя. При этом точка z_1 перейдет в начало координат, а точка z_2 — в точку

$$\zeta_0 = \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_1 z_2} = \frac{(e^{i\gamma} - 1)re^{i\varphi_1}}{1 - |b|^2 - rb(e^{i\gamma} - 1)}, \quad b = r + \overline{c}e^{i\varphi_1}.$$

Пусть $f(z) \in S$ и $z(\zeta) = \zeta^{-1}(z) = (\zeta + z_1)/(1 + \overline{z}_1\zeta)$. Тогда функция

$$F(\zeta) = (f(z(\zeta)) - f(z_1))/(f'(z_1)(1 - |z_1|^2)) \tag{8}$$

принадлежит классу S. Поэтому по теореме вращения в классе S (напр., [6], с. 184) имеем

$$\arg F'(\zeta_0) \geq \begin{cases} -4\arcsin|\zeta_0| & \text{при} \quad |\zeta_0| \leq 1/\sqrt{2}; \\ -\pi - \ln\frac{|\zeta_0|^2}{1-|\zeta_0|^2} & \text{при} \quad |\zeta_0| \geq 1/\sqrt{2}. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь под аргументом понимается значение, определяемое равенством

$$\arg F'(\zeta_0) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d_\varphi \arg F'\left(\frac{c - z_1 + re^{i\varphi}}{1 - c\overline{z}_1 - r\overline{z}_1 e^{i\varphi}}\right), \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \gamma.$$

По формуле (8) находим

$$\frac{f'(z_2)}{f'(z_1)} = \left(\frac{1 - |z_1|^2}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right)^2 F'(\zeta_0).$$

Отсюда и из (9), положив $a = 2r/(1 + r^2 - |c|^2)$,

$$y = \frac{(1 - |b|^2)\,\mathrm{ctg}(\gamma/2) - 2r|c|\sin(\arg c - \varphi_1)}{1 + r^2 - |c|^2},$$

и учитывая, что при этом $0 < a < 1$, $-\infty < y < \infty$,

$$|\zeta_0|^2 = a^2/(1 + y^2), \quad \arg\{(1 - \overline{z}_1 z_2)^{-2}(z_2 - c)/(z_1 - c)\} = 2\,\mathrm{arcctg}\,y,$$

для (7) получаем оценку

$$\arg\{(z_2 - c)f'(z_2)/(z_1 - c)f'(z_1)\} \geq \psi(a, y), \tag{10}$$

где

$$\psi(a, y) = \begin{cases} \psi_2(a, y) = 2\,\mathrm{arcctg}\,y + \ln(y^2 - a^2 + 1) - 2\ln a - \pi, & |y| \leq \sqrt{2a^2 - 1}; \\ \psi_1(a, y) = 2\,\mathrm{arcctg}\,y - 4\arcsin\frac{a}{\sqrt{1+y^2}}, & |y| \geq \sqrt{2a^2 - 1}, \end{cases}$$

если $1/\sqrt{2} < a < 1$, и

$$\psi(a, y) = \psi_1(a, y), \quad -\infty < y < \infty,$$

если $0 < a \leq 1/\sqrt{2}$. Знак равенства в (10) имеет место только для функций

$$f(z) = (F(\zeta(z)) - F(-z_1))/(F'(-z_1)(1 - |z_1|^2)) \in S, \tag{11}$$

где $F(\zeta) \in S$ и доставляют знак равенства в (9).

Найдем при фиксированном a, $0 < a < 1$, нижнюю границу значений функции $\psi(a, y)$ в интервале $(-\infty, \infty)$.

На основании равенства

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y} = 2\frac{y^3 - y^2 + y + a^2 - 1}{(1 + y^2)(y^2 - a^2 + 1)}, \quad -\infty < y < \infty,$$

заключаем, что при фиксированном a, $0 < a < 1$, функция $\psi_2(a, y)$ имеет единственную точку экстремума y_0, в которой $\psi_2(a, y)$ принимает наименьшее значение (y_0 то же, что в теореме).

Далее с помощью равенства

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 2\frac{2ay - \sqrt{y^2 - a^2 + 1}}{(1 + y^2)\sqrt{y^2 - a^2 + 1}}, \quad -\infty < y < \infty,$$

приходим к выводу, что при фиксированном a функция $\psi_1(a, y)$ монотонно убывает на интервале $(-\infty, \infty)$, если $0 < a \leq 1/2$, и имеет единственную точку экстремума $y^0 = \sqrt{(1 - a^2)/(4a^2 - 1)}$, в которой $\psi_1(a, y)$ принимает наименьшее значение, если $1/2 < a < 1$.

Отметим, что обе точки y_0 и y^0 принадлежат интервалу $\left(-\sqrt{2a^2 - 1},\ \sqrt{2a^2 - 1}\right)$, если $\sqrt{5/8} < a < 1$, и не принадлежат ему, если $1/2 < a < \sqrt{5/8}$.

Следовательно,

$$\inf_{-\infty < y < \infty} \psi(a, y) = \begin{cases} \psi_1(a, \infty) & \text{при} \quad 0 < a \leq 1/2; \\ \psi_1(a, y^0) & \text{при} \quad 1/2 < a \leq \sqrt{5/8}; \\ \psi_2(a, y_0) & \text{при} \quad \sqrt{5/8} \leq a < 1, \end{cases} \tag{12}$$

где $\psi_1(a, \infty) = \lim\limits_{y \to \infty} \psi_1(a, y) = 0$. Отсюда и из (10) получаем требуемые оценки (2)–(4).

Простые вычисления показывают, что нижняя грань в (12) при $1/2 < a < 1$ достигается для функций (11) в точках z_1, z_2, $|z_1 - c| = |z_2 - c| = r = (1 - \sqrt{1 - a^2 - a^2|c|^2})/a$, аргументы которых связаны соотношением

$$\arg\{(1 - \overline{z}_1 z_2)^{-2}(z_2 - c)/(z_1 - c)\} = \begin{cases} 2 \operatorname{arcctg} y^0, & \text{если} \quad 1/2 < a \leq \sqrt{5/8}; \\ 2 \operatorname{arcctg} y_0, & \text{если} \quad \sqrt{5/8} \leq a < 1. \end{cases}$$

В (12) при $0 < a \leq 1/2$ значение $\inf\limits_{-\infty < y < \infty} \psi(a, y)$ не достигается функциями класса S, но в этом случае для функций (11) и точек z_1, z_2, $|z_1 - c| = |z_2 - c| = r = (1 - \sqrt{1 - a^2 + a^2|c|^2})/a$, $\arg\{(1 - \overline{z}_1 z_2)^{-2}(z_2 - c)/(z_1 - c)\} = 2 \operatorname{arcctg} y$, выполняется равенство $\lim\limits_{y \to \infty} \psi(a, y) = \inf\limits_{-\infty < y < \infty} \psi(a, y)$. □

Теорема 1 при $c = 0$ содержит соответствующий результат в [7].

2. Граница почти выпуклости порядка β в точке для функций класса S

Следуя [8] (см. также [6], с. 164), назовем границей (радиусом) почти выпуклости порядка β класса S в точке $c \in E$ точную верхнюю границу $r_\beta(c)$ радиусов кругов $E(c, r) \subset E$, в каждом из которых любая функция $f(z) \in S$ является почти выпуклой порядка β. Величины $r_1(0)$, $r_0(c)$ и $r_\beta(0)$ найдены в [5], [8] и [7] соответственно. Найдем $r_\beta(c)$.

Теорема 2. *Граница почти выпуклости порядка β класса S в точке $c \in E$ есть число*

$$r_\beta(c) = (1 - \sqrt{1 - a_0^2 + |c|^2 a_0^2})/a_0, \tag{13}$$

где a_0 — единственный в промежутке $(1/2, \sqrt{5/8})$ корень уравнения $\psi_1(a)+\beta\pi = 0$, если $0 \le \beta \le 1-(2/\pi)\operatorname{arcctg}(1/2)$, и единственный в промежутке $[\sqrt{5/8}, 1)$ корень уравнения $\psi_2(a)+\beta\pi = 0$, если $1-(2/\pi)\operatorname{arcctg}(1/2) \le \beta \le 1$. Здесь $\psi_1(a)$ и $\psi_2(a)$ определяются формулами (5) *и* (6).

Доказательство. Для $f(z) \in S$ и произвольно фиксированных $z_1 = c + re^{i\varphi_1}$, $z_2 = c + re^{i\varphi_2}$, $0 < \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi$, $r + |c| < 1$, применим (7) и запишем неравенство (1) в виде

$$\arg\{(z_2-c)f'(z_2)/(z_1-c)f'(z_1)\} > -\beta\pi.$$

Отсюда и из (2), учитывая зависимость r от a по формуле

$$r = (1-\sqrt{1-a^2+a^2|c|^2})/a, \tag{14}$$

находим $r_0(c) = 2-\sqrt{3+|c|^2}$ и $r_\beta(c) > 2-\sqrt{3+|c|^2}$ при $0 < \beta \le 1$.

Если $2-\sqrt{3+|c|^2} < r < 1-|c|$, то $1/2 < a < 1$, и согласно (3), (4) имеем точное неравенство

$$\arg\{(z_2-c)f'(z_2)/(z_1-c)f'(z_1)\} + \beta\pi \ge \Phi(a,\beta), \quad 0 < \beta \le 1,$$

справедливое для любой функции $f(z) \in S$. Здесь

$$\Phi(a,\beta) = \begin{cases} \psi_1(a) + \beta\pi & \text{при } \ 1/2 < a \le \sqrt{5/8}; \\ \psi_2(a) + \beta\pi & \text{при } \ \sqrt{5/8} \le a < 1, \end{cases}$$

$\psi_1(a)$ и $\psi_2(a)$ определяются по формулам (5) и (6). Так как при фиксированном β функция $\Phi(a,\beta)$ непрерывна по a на $(1/2,\ 1)$, $\lim\limits_{a\to1/2+0}\Phi(a,\beta) = \beta\pi > 0$, $\lim\limits_{a\to1-0}\Phi(a,\beta) = -\infty$ и

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a} = \begin{cases} \frac{d\psi_1}{da} = -\frac{2}{a}\sqrt{\frac{4a^2-1}{1-a^2}} < 0, & 1/2 < a \le \sqrt{5/8}; \\ \frac{d\psi_2}{da} = -\frac{2}{a} - \frac{2a}{y_0^2-a^2+1} < 0, & \sqrt{5/8} < a < 1, \end{cases}$$

где y_0 из теоремы 1, то $\Phi(a,\beta) \ge 0$ при $1/2 < a \le a_0$, где a_0 то же, что в теореме 2. Приняв к этому во внимание формулу (14), приходим к равенству (13). $\square$

Литература

1. Reade M.O. *The coefficients of close-to-convex functions* // Duke Math. J. – 1956. – V. 23. – № 3. – P. 459–462.
2. Goodman A.W. *On close-to-convex functions of higher order* // Annal. Univ. Sci. Budapest. Sec. Math. – 1972. – V. 15. – P. 17–30.
3. Kaplan W. *Close-to-convex schlicht functions* // Michigan Math. J. – 1952. – V. 1. – № 2. – P. 169–185.
4. Максимов Ю.Д. *Экстремальные задачи в некоторых классах аналитических функций* // ДАН СССР. – 1955. – Т. 100. – № 6. – С. 1041–1044.
5. Krzyž J. *The radius of close-to-convexity within the family of univalent functions* // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math., Astron., Phys. – 1962. – V. 10. – № 4. – P. 201–204.
6. Александров И.А., Соболев В.В. *Аналитические функции комплексного переменного.* Учеб. пособие. – М.: Высш. школа, 1984. – 192 с.
7. Сижук П.И. *Радиус почти выпуклости порядка α в классе однолистных функций* // Матем. заметки. – 1976. – Т. 20. – № 1. – С. 105–112.
8. Александров И.А. *О границах выпуклости и звездообразности для функций, однолистных и регулярных в круге* // ДАН СССР. – 1957. – Т. 116. – № 6. – С. 903–905.

Ставропольский государственный университет

Поступила
29.04.2002