ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 6 (469)

УДК 517.929

Е.С. ЖУКОВСКИЙ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОПЕРАТОРА ГРИНА АБСТРАКТНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Активно и плодотворно развивающаяся теория абстрактного функционально-дифференциального уравнения [1]–[6] родилась в начале восьмидесятых годов на Пермском семинаре из следующей идеи. Было замечено, что большинство результатов исследования линейного функционально-дифференциального уравнения $\mathcal{L}x = f$, $\mathcal{L} : D^n \to L^n$, основано на изоморфизме пространства D^n абсолютно непрерывных функций и произведения $L^n \times R^n$. Эти результаты сохраняются, если вместо пространства L^n суммируемых функций взять любое банахово пространство B. Построенная теория оказалась полезной не только при исследовании интегродифференциальных уравнений, уравнений с отклоняющимся аргументом, уравнений нейтрального типа — классических представителей функционально-дифференциальных уравнений, но и с успехом была применена к сингулярным уравнениям [7], [8], импульсным системам [9], гибридным системам [10] и т. д.

Сформулируем некоторые понятия теории абстрактных уравнений.

Пусть D, B — банаховы пространства, причем D изоморфно и изометрично прямому произведению $B \times R^n$. Система уравнений

$$\mathcal{L}x = f, \quad lx = \alpha, \tag{1}$$

где $\mathcal{L} : D \to B$, $l : D \to R^n$ — линейные ограниченные операторы, называется краевой задачей. Краевая задача (1) изучалась [1]–[3] в предположении, что оператор $\mathcal{L}$ нетеров, $\operatorname{ind} \mathcal{L} = n$. Если задача (1) имеет единственное решение $x \in D$ при каждой паре $(f, \alpha) \in B \times R^n$, то это решение представимо в виде $x = Gf + X\alpha$. Конечномерный оператор $X : R^n \to D$ определяется фундаментальной системой решений однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$, которую обозначают также через X. Линейный ограниченный оператор $G : B \to D$ называют оператором Грина. В классическом случае, когда $B = L^m$ — пространство суммируемых функций, интегральное представление линейного ограниченного функционала в этом пространстве позволяет записать оператор Грина в виде

$$(Gf)(t) = \int_a^b G(t,s) f(s) ds. \tag{2}$$

Ядро $G(t, s)$, называемое матрицей (функцией) Грина, играет заметную роль в теории функционально-дифференциальных уравнений. Попытки получить аналогичное представление оператора Грина в случае произвольного банахова пространства B, по-видимому, не предпринимались, т. к. при выводе формулы (2) учитывается специфика пространства L^m. Однако, подобное представление, на наш взгляд, возможно при некотором сужении объекта исследования, состоящем в рассмотрении конкретных функциональных пространств. Это естественное ограничение (во всех применениях теории абстрактных уравнений [1]-[10] рассматривались только функциональные пространства!) позволяет построить аналог функции Грина, ввести понятие вольтерровости и перенести на уравнения с вольтерровыми операторами многие известные результаты, определить функцию Коши.

Итак, пусть D, B — банаховы пространства вектор-функций $y : [a,b] \to R^m$, $D \cong B \times R^n$. Будем предполагать, что для любой последовательности $\{y_i\} \subset D$ из $\|y_i\|_D \to 0$ при $i \to \infty$ следует $|y_i(t)| \to 0$ для всех $t \in [a,b]$. Тогда при каждом фиксированном $t \in [a,b]$ вследствие ограниченности оператора Грина $G : B \to D$ линейный вектор-функционал $(Gf)(t)$, определенный на B, непрерывен. Следовательно, можно записать этот вектор-функционал в виде $(Gf)(t) = (g(t), f)$, где компоненты m-мерного вектора $g(t)$ являются элементами сопряженного пространства B^*. Построенное таким образом отображение $g : [a,b] \to B^{*m}$, следуя [11], будем называть функцией Грина.

Рассмотрим, например, пространство C непрерывных функций $x : [a,b] \to R$ с нормой $\|x\|_c = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$. Общая форма линейного непрерывного функционала в C дается интегралом Стилтьеса $gx = \int\limits_a^b x(s)dg(s)$, где $g(s)$ — функция ограниченной вариации [12]. Пусть банахово пространство D функций $x : [a,b] \to R$ изоморфно произведению $C \times R^n$; $\mathcal{L} : D \to C$, $l : D \to R^n$. Тогда оператор Грина краевой задачи (1) представим в виде $(Gf)(t) = \int\limits_a^b f(s)d_s g(t,s)$, где $g(t,\cdot)$ — функция ограниченной вариации.

Рассмотренное определение позволяет матрице Грина абстрактного уравнения сохранить многие привычные свойства. Приведем некоторые утверждения, полученные на основании результатов [3].

Теорема 1. *Матрицы Грина $g(t)$ и $g_1(t)$ двух краевых задач для уравнения $\mathcal{L}x = f$ с вектор-функционалами l и l_1 связаны соотношением $g(t) = g_1(t) - X(t)(lX)^{-1}V$, где X — фундаментальная матрица решений уравнения $\mathcal{L}x = 0$, вектор-функционал $V : B \to R^n$ определяется равенством $Vf = lg_1(\cdot)f$.*

Это утверждение следует из формулы [3] $G = G_1 - X(lX)^{-1}lG_1$, связывающей операторы Грина двух краевых задач.

Пусть изоморфизм $D \cong B \times R^n$ задан операторами $\mathrm{col}(\delta, r) : D \to B \times R^n$, $(\Lambda, Y) = (\mathrm{col}(\delta, r))^{-1} : B \times R^n \to D$. Тогда краевую задачу (1) можно записать [1] в виде

$$\mathcal{L}x \equiv Q\delta x + Arx, \quad lx \equiv \Phi\delta x + \Psi rx = 0, \tag{3}$$

где $Q : B \to B$, $A : R^n \to B$, $\Phi : B \to R^n$, $\Psi : R^n \to R^n$. Согласно [3] главная краевая задача

$$\mathcal{L}x \equiv Q\delta x + Arx = f, \quad rx = \alpha \tag{4}$$

однозначно разрешима тогда и только тогда, когда оператор Q имеет ограниченный обратный, причем решение задачи (4) имеет представление $x = \Lambda Q^{-1}f + (Y - \Lambda Q^{-1}A)\alpha$. Пусть функционал $\lambda(t) : B \to R^m$ определен равенством $(\lambda(t), f) = (\Lambda f)(t)$. Тогда матрица Грина $w(t)$ задачи (4) находится по формуле $w(t) = \lambda(t)Q^{-1}$. Теперь на основании теоремы 1 получаем представление матрицы Грина задачи (3)

$$g(t) = \lambda(t)Q^{-1} - X(t)(lX)^{-1}l\Lambda Q^{-1}.$$

Проиллюстрируем применение полученных результатов на уравнении

$$x(t) - x(a) - \int_a^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \tag{5}$$

где функция $K(t,s)$ непрерывна в квадрате $[a,b] \times [a,b]$, функция $f(t)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a) = 0$. Обозначим через $C_0 = \{x \in C \mid x(a) = 0\}$ подпространство пространства C. Заметим, что изоморфизм $C \cong C_0 \times R$ можно задать отображениями $\delta : C \to C_0$, $\delta x = x - x(a)$; $r : C \to R$, $rx = x(a)$; $x = rx + \delta x$. Таким образом, уравнение (5) записывается в виде

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv (\delta x)(t) - \int_a^t K(t,s)(\delta x)(s)ds - rx\int_a^t K(t,s)ds = f(t),$$

где $\mathcal{L}: C \to C_0$, и, следовательно, является абстрактным функционально-дифференциальным уравнением (не содержащим производную!). Так как оператор $Q : C_0 \to C_0$, $(Qy)(t) = y(t) - \int\limits_a^t K(t,s)y(s)ds$ обратим [3], [13], [14], то главная краевая задача для уравнения (5) с условием $x(a) = \alpha$ однозначно разрешима, ее оператор Грина можно записать в виде $\int\limits_a^t f(s)d_s w(t,s)$, где $w(t,s)$ — функция ограниченной вариации.

Рассмотрим теперь краевую задачу для уравнения (5) с условием

$$\int_a^b x(s)ds = \alpha. \tag{6}$$

Зададим изоморфизм $C \cong C_0 \times R$ отображениями

$$\delta : C \to C_0, \quad \delta x = x - x(a); \quad r : C \to R, \quad rx = \int_a^b x(s)ds;$$
$$x = \frac{1}{b-a} rx + \delta x - \frac{1}{b-a}\int_a^b (\delta x)(s)ds.$$

Тогда краевая задача (5), (6) запишется в виде

$$(\delta x)(t) - \int_a^b U(t,s)(\delta x)(s)ds - \frac{1}{b-a} rx \int_a^t K(t,s)ds = f(t), \quad rx = \alpha,$$

где

$$U(t,s) = \chi_{[a,t]}(s)K(t,s) - \frac{1}{b-a}\int_a^t K(t,\xi)d\xi.$$

Пусть $\max\limits_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |U(t,s)|ds < 1$. Тогда [12] оператор $Q : C_0 \to C_0$, $(Qy)(t) = y(t) - \int\limits_a^b U(t,s)y(s)ds$ обратим. Оператор Грина задачи (5), (6) представим в виде $\int\limits_a^b f(s)d_s g(t,s)$, где $g(t,s)$ — функция ограниченной вариации. Эта функция связана с функцией Грина главной краевой задачи формулой

$$g(t,s) = w(t,s) - \frac{X(t)}{\int\limits_a^b X(s)ds}\int_a^b w(t,s)dt.$$

В качестве главной краевой задачи в теории функционально-дифференциальных уравнений обычно используют задачу Коши, выбирая $rx = x(a)$. Такой выбор наиболее продуктивен для уравнений с последействием. При естественных ограничениях задача Коши для таких уравнений однозначно разрешима. Ее функция Грина (называемая функцией Коши) удовлетворяет условию $w(t,s) = 0$ при $s > t$. Это равенство означает, что оператор Грина (называемый для такой задачи оператором Коши) является вольтерровым по А.Н. Тихонову: для E, Y — линейных пространств функций $y : [a,b] \to R^m$, линейное отображение $F : E \to Y$ называется *вольтерровым*, если для любого $t \in [a,b]$ и любого $x \in E$ из $x(s) = 0$ на $[a,t]$ следует $(Fx)(s) = 0$ на $[a,t]$.

Для определения функции Коши абстрактного уравнения придется предположить, что сопряженное пространство B^* является пространством функций $g : [a,b] \to R^m$, и выполнено следующее условие. Если при любом $t \in [a,b]$ элемент $g \in B^*$ принадлежит ортогональному дополнению к подпространству $M_t = \{y \in B \mid y(s) = 0 \text{ при всех } s \in [a,t]\}$, то $g(s) = 0$ на $(t,b]$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(a) = \alpha.$$

Представим оператор Коши в виде $(Wf)(t) = (w(t), f)$, где компоненты вектора $w(t)$ — элементы сопряженного пространства B^* — являются вектор-функциями $[a,b] \to R^m$. Обозначим функцию $w(t) : [a,b] \to R^{m\times m}$ при каждом $s \in [a,b]$ через $w(t,s)$. Следуя определению функции Грина, назовем $w(t,s)$ функцией Коши абстрактного уравнения $\mathcal{L}x = f$ в точке $(t,s) \in [a,b]^2$.

Теорема 2. *Если оператор Коши $W : B \to D$ вольтерров, то для функции Коши выполнено условие $w(t,s) = 0$ при всех $s > t$.*

Доказательство. Вследствие вольтерровости оператора W для каждого $t \in [a,b]$ выполнено $(Wf)(t) = 0$ на всех таких элементах $f \in B$, что $f(s) = 0$ при $s \in [a,t]$. Но $(Wf)(t) = (w(t), f)$. Таким образом, компоненты вектор-функционала $w(t)$ принадлежат ортогональному дополнению к подпространству $M_t \subset B$. Отсюда получаем $w(t,s) = 0$ при всех $s > t$. $\square$

В заключение заметим, что условия, обеспечивающие вольтерровость оператора $W : L^n \to D^n$ для функционально-дифференциальных уравнений, приведены в [3].

Литература

1. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. *Абстрактные функционально-дифференциальные уравнения* // Функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1987. – С. 3–11.
2. Анохин А.В. *К общей теории линейных функционально-дифференциальных уравнений.* – Пермск. политехн. ин-т. – Пермь, 1981. – 31 с. – Деп. в ВИНИТИ 30.03.81, № 1389-81.
3. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 278 с.
4. Азбелев Н.В. *Современное состояние и тенденции развития теории функционально-дифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 6. – С. 8–20.
5. Azbelev N.V. *The ideas and methods of Perm Seminar on boundary value problems* // Boundary value problems for functional differential equations. World scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1995. – P. 13–22.
6. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Худяков С.П. *К вопросу о регуляризуемости уравнений* // Краев. задачи. – Пермь, 1984. – С. 3–8.
7. Шиндяпин А.И. *О краевой задаче для одного сингулярного уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 3. – С. 450–455.
8. Бравый Е.И. *О разрешимости одной краевой задачи для нелинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 5. – С. 17–23.
9. Анохин А.В. *О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений* // ДАН СССР. – 1986. – Т. 286. – № 5. – С. 1037–1040.
10. Азбелев Н.В. *К вопросу о регуляризуемости сингулярных уравнений* // Вестн. Пермск. гос. техн. ун-та. Матем. и прикл. матем. – Пермь, 1996. – № 1. – С. 3–11.
11. Жуковский Е.С. *К теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения* // Вестн. Тамбовск. ун-та. – 1998. – Т. 3. – Вып. 2. – С. 177–179.
12. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1984. – 752 с.
13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1981. – 544 с.
14. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. *Интегральные уравнения.* – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 156 с.

Тамбовский государственный университет

Поступила
14.01.1999