ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 11 (522)

УДК 519.642

О.Н. ЯКОВЛЕВА

О РАЗРЕШИМОСТИ И СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ВИНЕРА–ХОПФА СО СТЕПЕННО-РАЗНОСТНЫМИ ИНДЕКСАМИ

Данная работа посвящена установлению условий разрешимости и изучению свойств решений бесконечных систем алгебраических уравнений вида

$$\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k}^{(\nu)} k^{\nu}\varphi_k = f_n, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{1}$$

где $a_n^{(\nu)}$, $\nu = \overline{0,m}$, и f_n — известные величины, которые подчинены условиям

$$|a_n^{(\nu)}| \leqslant m_1|n|^{-r-\alpha-1}, \quad n \neq 0, \quad \nu = \overline{0,m}; \quad |f_n| \leqslant m_2 n^{-r-\alpha-1}, \quad n \neq 0, \tag{2}$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n^r f_n|^q < +\infty. \tag{3}$$

Здесь и ниже m_i — вполне определенные постоянные, не зависящие от n; r — целое неотрицательное число; α, q — вещественные числа, причем $0 < \alpha \leqslant 1$, $1 < q \leqslant 2$.

Построению теории разрешимости бесконечных систем Винера–Хопфа посвящено значительное число работ. Среди них отметим [1]–[3], где изложены основные достижения в этом направлении, работы [4]–[6] посвящены изучению некоторых обобщений систем Винера–Хопфа: систем с разностными и суммарными индексами и систем с комплексно сопряженными значениями неизвестных. Изучение бесконечных систем Винера–Хопфа, рассматриваемых в [1]–[6], основано на их сведении к соответствующей эквивалентной краевой задаче теории аналитических функций на единичной окружности с центром в начале координат: это задача Римана, задача Карлемана, задача Маркушевича, задача типа Карлемана. Оказалось, что методы работ [1]–[6] исследования систем Винера–Хопфа и их обобщений не применимы к исследованию системы уравнений (1), т. к. она приводится к исследованию на единичной окружности сингулярных интегродифференциальных уравнений (СИДУ) с ядром Коши.

1. Вспомогательные определения и утверждения. Пусть $\gamma = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ — единичная окружность с центром в начале координат, разбивающая комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на две области: внутреннюю $D^+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и внешнюю $D^- = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Символом $d^k f(t)/ds^k$ будем обозначать k-ю производную функции $f(t)$, $t = e^{is}$, $s \in [0; 2\pi]$, по дуге s окружности γ, а $f^{(k)}(t)$ означает k-ю производную функции $f(t)$ по комплексной координате $t \in \gamma$ ([7], с. 346).

Лемма 1 ([7], с. 346). *Если функция $\varphi(t) \in L_p^{(r)}$, $p > 1$, $r \geqslant 0$, то справедливы равенства*

$$d^k\varphi(t)/ds^k = i^k \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu t^\nu \varphi^{(\nu)}(t), \quad k = \overline{1,r}; \quad A_k = 1,$$

где A_ν, $\nu = \overline{1,k-1}$, — вполне определенные постоянные. В частности, $d^k t^n/ds^k = i^k n^k t^n$.

Если функция $\varphi(t) \in L_p$, $p > 1$, то она разлагается ([8], с. 162; [9], с. 211) в сходящийся ряд Фурье

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k t^k,$$
$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(t)t^{-k-1}dt, \quad k = 0, \pm 1, \dots \tag{4}$$

Поэтому, если функция $\varphi(t) \in L_p^{(r)}$, $p > 1$, $r \geqslant 1$, то коэффициенты Фурье Φ_n и φ_n соответственно функций $d^r\varphi(t)/ds^r$ и $\varphi(t)$ связаны соотношением $\Phi_n = (in)^r\varphi_n$, $n \neq 0$; $\Phi_0 = 0$. $\square$

Лемма 2. *Если функция $\varphi(t) \in L_p$, $p > 1$, является краевым значением на γ функции $\varphi^+(z)$, аналитической в области D^+, то ее коэффициенты Фурье φ_k определяются следующим образом*:

$$\varphi_k = \frac{1}{k!}\varphi^{+(k)}(0), \quad k = 0, 1, \dots ; \quad \varphi_k = 0, \quad k = -1, -2, \dots$$

Справедливость этого утверждения легко устанавливается на основании формулы (4) и теории вычетов.

2. Сведение системы уравнений (1) к СИДУ на γ. Обозначим $\varphi_k^+ = \varphi_k$ $(k = 0, 1, \dots)$, $f_n^+ = f_n$ $(n = 0, 1, \dots)$. Пусть в системе уравнений (1) индексы n и k принимают неотрицательные значения. Тогда разность $n - k$ пробегает все целочисленные значения, т. е. величины $a_n^{(\nu)}$ определены при всех целочисленных значениях n. Обозначим через $\varphi_n = \sum\limits_{k=0}^{m}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}^{(\nu)}k^\nu\varphi_k^+$ $(n = -1, -2, \dots)$ новые неизвестные величины. Положим $\varphi_n^- = -\varphi_n$ $(n = -1, -2, \dots)$, $\varphi_n^- = 0$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$. Тогда в терминах величин φ_k^+ и φ_k^- систему (1) можно записать в виде

$$\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}^{(\nu)}k^\nu\varphi_k^+ + \varphi_n^- = f_n^+, \quad n = 0, \pm 1, \dots \tag{5}$$

Заметим, что системы уравнений (1) и (5) эквивалентны в том смысле, что они одновременно разрешимы или нет, т. к. определитель системы уравнений (5) распадается на произведение определителя системы уравнений (1) и определителя, равного единице. При этом решения системы уравнений (1) выражаются через решения системы уравнений (5), а именно, $\varphi_k = \varphi_k^+$, $k = 0, 1, \dots$

Умножим теперь n-е уравнение системы (5) на t^n, $t \in \gamma$, и просуммируем по всем индексам n. Получим равенство

$$\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}^{(\nu)}k^\nu\varphi_k^+t^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n^-t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^+t^n, \quad t \in \gamma. \tag{6}$$

Обозначим

$$a_\nu(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^{(\nu)}t^j, \qquad \nu = \overline{0, m}; \qquad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n, \tag{7}$$

$$\frac{d^\nu\varphi^{+(t)}}{ds^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty}(ik)^\nu\varphi_k t^k, \quad \nu = \overline{0, m}; \quad \varphi^-(t) = -\sum_{k=-\infty}^{-1}\varphi_k t^k. \tag{8}$$

Заметим, что ([9], с. 211) ряды (7) являются сходящимися в силу выполнения условий (2), (3). При этом функции $a_\nu(t), f(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $\nu = \overline{0, m}$, если выполнены условия (2), и функция

$f(t) \in L_p^{(r)}$, $p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, если выполнено условие (3), а $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$ являются краевыми значениями на γ неизвестных фукнкций $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$, аналитических соответственно в областях D^+ и D^-. Тогда в силу (4), (7) и (8) имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}^{(\nu)} k^\nu \varphi_k^+ t^n = (-i)^\nu a_\nu(t) \frac{d^\nu \varphi^+(t)}{ds^\nu}, \quad \nu = \overline{0, m}.$$

Отсюда с учетом (7), (8) равенство (6) запишем в виде

$$\sum_{\nu=0}^{m} (-i)^\nu a_\nu(t) \frac{d^\nu \varphi^+(t)}{ds^\nu} - \varphi^-(t) = f(t), \quad t \in \gamma.$$

На основании леммы 1 последнее равенство примет вид

$$t^m a_m(t) \varphi^{+(m)}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} A_j(t) t^j \varphi^{+(j)}(t) - \varphi^-(t) = f(t), \quad t \in \gamma, \tag{9}$$

где функции $A_j(t)$, $j = \overline{0, m-1}$, выражаются известным образом через функции $a_\nu(t)$, $\nu = \overline{0, m}$, и постоянные A_j, определяемые по лемме 1. Отметим, что на основании формул Сохоцкого для производных ([7], с. 42) краевую задачу (9) запишем в виде следующего СИДУ:

$$a_m(t)\varphi^{(m)}(t) + (S\varphi^{(m)})(t) + \sum_{j=0}^{m-1} A_j(t) t^j [\varphi^{(j)}(t) + (S\varphi^{(j)})(t)] - \varphi(t) + (S\varphi)(t) = 2f(t), \ t \in \gamma, \tag{10}$$

где $(S\psi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\gamma (\tau - t)^{-1} \psi(\tau) d\tau$ — сингулярный интеграл с ядром Коши. В силу тождественных преобразований система уравнений (1) и СИДУ (10), т. е. краевая задача (9), эквивалентны в том смысле, что они одновременно разрешимы или нет, и решения системы уравнений (1) выражаются через решения краевой задачи (9), т. е. СИДУ (10), по формуле

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \varphi^+(t) t^{-k-1} dt, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

3. Исследование системы уравнений (1). Как известно ([7], с. 365; [10]), исследование краевой задачи (9), т. е. СИДУ (10) приводится к исследованию полного сингулярного интегрального уравнения (СИУ) соответствующего вида. Для этого воспользуемся интегральными представлениями, построенными в ([7], [10]), для функций и их производных. Согласно ([7], с. 367; [10]) любую пару функций $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$, аналитических соответственно в областях D^+ и D^-, $\varphi^-(\infty) = 0$, и таких, что краевые значения $\varphi^{+(m)}(t)$, $\varphi^-(t)$ на γ соответственно функций $\varphi^{+(m)}(z)$ и $\varphi^-(z)$ удовлетворяют условию Гёльдера или принадлежат пространству L_p, $p > 1$, в силу леммы 2 можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi^+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma P_0(z, \tau) \rho(\tau) d\tau + D_0(z), \quad && z \in D^+, \\ \varphi^-(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma Q_0(z, \tau) \rho(\tau) d\tau, && z \in D^-. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь функция $\rho(t)$ однозначно определяется по функциям $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$, а

$$P_0(z,\tau)=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\left[(\tau-z)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)+\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k\tau^{m-k-1}z^k\right],$$

$$Q_0(z,\tau)=\frac{1}{\tau-z},$$

$$D_0(z)=\sum_{k=0}^{m-1}\varphi_k z^k,\quad \alpha_k=\frac{1}{k}-\frac{C^1_{m-1}}{k-1}+\frac{C^2_{m-1}}{k-2}-\dots+(-1)^k-1\frac{C^{k-1}_{m-1}}{1},$$

где C^j_n — биномиальные коэффициенты, φ_k — коэффициенты Фурье функции $\varphi^+(t)$, являющейся краевым значением на γ функции $\varphi^+(z)$.

Используя свойства представлений (12), краевую задачу (9), т. е. СИДУ (10), приводим к исследованию следующего СИУ:

$$K\rho=K_0\rho+T\rho=f+B, \tag{13}$$

где

$$K_0\rho=0{,}5[t^m a_m(t)+1]\rho(t)+0{,}5[t^m a_m(t)-1](S\rho)(t),$$

$$T\rho=\int_\gamma k(t,\tau)\rho(\tau)d\tau, \tag{14}$$

$$k(t,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}A_j(t)t^j\left[\frac{\partial^j P_0(t,\tau)}{\partial t^j}+\sum_{k=j}^{m-1}\alpha_k\tau^{m-k-1}k(k-1)\dots(k-j+1)t^j\right],$$

$$B(t)=D_0^{(j)}(t)\sum_{j=0}^{m-1}A_j(t)t^j, \tag{15}$$

S — сингулярный оператор Коши, а функции $D_0^{(j)}(t)$ и $\partial^j P_0(t,\tau)/\partial t^j$ являются предельными значениями на контуре γ соответственно функций $D_0^{(j)}(z)$ и $\partial^j P(z,\tau)/\partial z^j$.

Лемма 3. *Если $a_n^{(\nu)}$ удовлетворяют условию* (2), *то определенный формулой* (14) *оператор $T:C\to C$, $T:L_p\to L_p$, $p>1$, компактен.*

Действительно, на основании ([7], с. 368) функции $\frac{\partial^j P_0(t,\tau)}{\partial t^j}$ принадлежат по крайней мере пространству H_1, а функции $A_j(t)$ принадлежат $H_\alpha^{(r)}$ в силу их структуры. Тогда компактность оператора $T:C\to C$ следует из теоремы Арцела–Асколи, а компактность оператора $T:L_p\to L_p$ — из работы ([11], с. 419).

Отметим, что решение СИДУ (10) согласно ([7], [10]) строится по формуле

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma[P_0(t,\tau)-Q_0(t,\tau)]\rho(\tau)d\tau+D_0(t),\quad t\in\gamma, \tag{16}$$

а функция $\varphi^+(t)$ представима в виде

$$\varphi^+(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma P_0(t,\tau)\rho(\tau)d\tau+D_0(t), \tag{17}$$

где $P_0(t,\tau)$, $Q_0(t,\tau)$, $D_0(t)$ — краевые значения на γ соответственно функций $P_0(z,\tau)$, $Q_0(z,\tau)$, $D_0(z)$.

Согласно работам ([7], [12], с. 436) СИДУ (10) и СИУ (13) являются эквивалентными в том смысле, что они одновременно разрешимы или нет, и каждому решению $\varphi(t)$ СИДУ (10) соответствует решение, возможно не единственное, $\rho(t)$ СИУ (13) и наоборот. При этом связь между их решениями осуществляется по формуле (16). Однако, чтобы связь между решениями СИДУ (10) и СИУ (13) была однозначной, необходимо, чтобы были известны ([12], с. 406) величины

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(t)t^{-k-1}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma [\varphi^+(t) - \varphi^-(t)]t^{-k-1}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi^+(t)t^{-k-1}dt, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{18}$$

где $\varphi(t)$ — решение СИДУ (10). С другой стороны, φ_k, $k = \overline{0, m-1}$, — коэффициенты Фурье функции (17). Если величины (18), которые называются начальными условиями СИДУ (10), известны, то СИДУ (10) и СИУ (13) эквивалентны в том смысле, что они одновременно разрешимы или нет, и каждому решению $\varphi(t)$ СИУ (13) соответствует одно и только одно решение $\rho(t)$ СИУ (13) и наоборот. Отметим, что на основании формул Сохоцкого определяемые формулой (18) величины φ_k, $k = \overline{0, m-1}$, являются коэффициентами функции $D_0(z)$. Поэтому при сведении СИДУ (10) к СИУ (13) функция $D_0(z)$ должна быть задана заблаговременно, т. е. (18) является необходимым и достаточным условием определенности СИДУ (10). Из эквивалентности СИДУ (10) и системы уравнений (1) следует, что решения системы (1) определяются однозначным образом по формулам (17), (11), если известны величины (18), которые будем называть ее начальными условиями.

Теперь исследование разрешимости системы уравнений (1) будем проводить на основе исследования СИУ (13) в силу их эквивалентности, если будут заданы начальные условия (18) системы (1). При этом систему уравнений (1) будем называть нетеровой, если нетерово СИУ (13), а индекс СИУ (13) будем называть индексом системы (1).

Сначала рассмотрим случай нулевых начальных условий: $\varphi_k = 0$, $k = \overline{0, m-1}$. В этом случае функция $D_0(z) \equiv 0$, а значит, определенная формулой (15) функция $B_0(t) \equiv 0$.

Теорема 1. *Если начальные условия нулевые, а величины $a_n^{(\nu)}$ удовлетворяют условиям* (2), *то система уравнений* (1) *нетерова тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$a_m(t) \neq 0, \quad t \in \gamma. \tag{19}$$

В этом случае индекс системы уравнений (1) *равен $-m - \varkappa$, где $\varkappa = \operatorname{ind} a_m(t)$.*

Доказательство. В силу условий теоремы система уравнений (1) и СИУ (13) являются эквивалентными. Согласно работам ([7], с. 177; [12]) СИУ (13) является нетеровым тогда и только тогда, когда выполнены условия $[t^m a_m(t) + 1] + [t^m a_m(t) - 1] = 2t^m a_m(t) \neq 0$, $[t^m a_m(t) + 1] - [t^m a_m(t) - 1] = 2 \neq 0$, $t \in \gamma$. Отсюда следует (19). При этом индекс СИУ (13) равен $-\operatorname{ind} t^m a_m(t) = -m - \varkappa$, где $\varkappa = \operatorname{ind} a_m(t)$. $\square$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *а величины f_n удовлетворяют одному из условий* (2) *или* (3) *и выполнено условие* (19). *Тогда если $m + \varkappa \leqslant 0$, то однородная система уравнений* (1) *имеет не менее чем $|\varkappa + m|$ линейно независимых решений, а неоднородная система уравнений* (1) *безусловно разрешима и ее общее решение зависит от не менее чем $|m + \varkappa|$ произвольных постоянных. Если же $m + \varkappa > 0$, то неоднородная система уравнений* (1) *разрешима, если будут выполнены не менее чем $m + \varkappa$ условий разрешимости*

$$\int_\gamma f(t)\Psi_j(t)dt = 0, \tag{20}$$

где $f(t)$ — правая часть СИУ (13), *а $\psi_j(t)$ — линейно независимые решения однородного СИУ, союзного СИУ* (13).

Доказательство. Заметим сначала, что под решением системы уравнений (1) в данном случае понимается бесконечномерный вектор вида $\{0, 0, \dots, 0, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots\}$, где $\varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots$ — решения системы (1). Согласно работам ([7], [12]) при $m + \varkappa \leqslant 0$ однородное СИУ (13) имеет не менее чем $|m + \varkappa|$ линейно независимых решений, а неоднородное СИУ (13) безусловно разрешимо, и его общее решение зависит от не менее чем $|\varkappa + m|$ произвольных постоянных. Если же $m+\varkappa>0$, то неоднородное СИУ (13), вообще говоря, не разрешимо. Для его разрешимости нужно выполнить не менее чем $\varkappa+m$ условий (20). Из эквивалентности системы уравнений (1) и СИУ (13) в условиях теоремы следуют ее утверждения. $\square$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2, *выполнено условие* (19) *и система уравнений* (1) *разрешима. Тогда если величины f_n удовлетворяют условиям* (3), *то решения системы уравнений* (1) *удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=m}^{\infty} |k^{r+m}\varphi_k|^q < \infty, \quad 1<q\leqslant 2. \tag{21}$$

Если же величины f_n удовлетворяют условию (2), *то при $0<\alpha<1$ решения системы уравнений* (1) *удовлетворяют условию*

$$|\varphi_k| \leqslant m_3 k^{-r-m-\alpha}, \quad k\geqslant m, \tag{22}$$

а при $\alpha=1$ решения системы уравнений (1) *удовлетворяют условию*

$$|\varphi_k| \leqslant m_4 k^{-r-m-1+\varepsilon}, \tag{23}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

Доказательство. В силу условий теоремы на основании свойств функции $P_0(z,\tau)$ и [9] коэффициенты и регулярное ядро СИУ (13) принадлежит пространству $H_\alpha^{(r)}$ по переменной t. Тогда если величины f_n удовлетворяют условию (3), т. е. правая часть СИУ (13) — функция $f(t)\in L_p^{(r)}$, $p\geqslant 2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, то согласно [3] решение СИУ (13) принадлежит пространству $L_p^{(r)}$, $p\geqslant 2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$. Тогда на основании свойств функции $P_0(z,\tau)$ и сингулярного интеграла определяемая формулой (17) функция $\varphi^+(t)$ принадлежит $L_p^{(r+m)}$, $p\geqslant 2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$. Отсюда на основании [9] следует оценка (21). Если же величины $a_n^{(\nu)}$ и f_n удовлетворяют условиям (2), то при $0<\alpha<1$ согласно ([7], [12]) решения СИУ (13) принадлежат пространству $H_\alpha^{(r)}$, $0<\alpha<1$. Тогда определяемая формулой (7) функция $\varphi^+(t)$ принадлежит $H_\alpha^{(r+m)}$, $0<\alpha<1$. Поэтому на основании [9] получим оценки (22). При $\alpha=1$ определяемая формулой (17) функция φ^+ принадлежит $H_{1-\varepsilon}^{(r+m)}$. Отсюда следует оценка (23). $\square$

Пусть условие (19) не выполняется. Будем предполагать, что функция $a_m(t)$ имеет нули на контуре γ в точках $b_1,b_2,\dots,b_s$ порядков $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_s$ соответственно. Тогда согласно ([3], с. 263) справедливо представление

$$a_m(t) = M(t)\prod_{k=1}^{m}(t^{-1}-b_k^{-1})^{\mu_k}, \tag{24}$$

где функция $M(t)\neq 0$ на γ. Обозначим

$$r_0=\max\{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_s\}, \quad \varkappa=-\operatorname{ind} M(t), \quad \mu=\sum_{k=1}^{s}\mu_k. \tag{25}$$

Теорема 4. *Пусть начальные условия нулевые; величины $a_n^{(\nu)}$ удовлетворяют условиям* (2), *в которых $r\geqslant r_0$, где число r_0 определено соотношением* (25); *справедливо представление* (24), *где функция $M(t)\neq 0$ на γ, и величины f_n удовлетворяют одному из условий* (2) *или* (3), *в которых $r\geqslant r_0$. Если $\varkappa+m+\mu\leqslant 0$, где числа $\varkappa$ и μ определяются по формуле* (24), *то однородная система уравнений* (1) *имеет не менее чем $|\varkappa+m+\mu|$ линейно независимых решений, а неоднородная система уравнений* (1) *безусловно разрешима и ее общее решение зависит от не менее чем $|\varkappa+m+\mu|$ произвольных постоянных. Если же $\varkappa+m+\mu>0$, то неоднородная система уравнений* (1) *будет разрешимой, если выполнены не менее чем $\varkappa+m+\mu$ условий* (20).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и система уравнений (1) разрешима. Если величины f_n удовлетворяют условиям (3), то решения системы уравнений (1) удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=m}^{\infty} |k^{r+m-r_0}\varphi_k|^q < +\infty, \quad 1 < q \leqslant 2,$$

если же величины f_n удовлетворяют условиям (2), то при $0 < \alpha < 1$ решения системы уравнений (1) удовлетворяют условиям

$$|\varphi_k| \leqslant m_5 k^{-r-m-\alpha+r_0}, \quad k \geqslant m,$$

а при $\alpha = 1$ решения системы уравнений (1) удовлетворяют условиям

$$|\varphi_k| \leqslant m_6 k^{-r-m-1+\varepsilon+r_0}, \quad k \geqslant m.$$

Доказательства теорем 4 и 5 проводятся по аналогии с доказательствами соответственно теорем 2 и 3, но с использованием результатов работ [3], [7] по теории разрешимости исключительного случая СИУ.

Рассмотрим теперь случай ненулевых начальных условий. Тогда систему уравнений (1) можно записать в виде

$$\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{k=m}^{\infty} a_{n-k}^{(\nu)} k^{\nu}\varphi_k = f_n + f_n^{(1)}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{26}$$

где $f_n^{(1)} = \sum\limits_{\nu=0}^{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1} a_{n-k}^{(\nu)} k^{\nu}\varphi_k$, $n = 0, 1, \ldots$ Так как величины $a_n^{(\nu)}$ и φ_k, $k = \overline{0, m-1}$, известны, причем $a_n^{(\nu)}$ удовлетворяют условиям (2), то величины $f_n^{(1)}$ определяются однозначно и удовлетворяют условиям $|f_n^{(1)}| \leqslant m_7 n^{-r-\alpha-1}$, $n \neq 0$. Тогда величины $f_n^{(2)} = f_n + f_n^{(1)}$ удовлетворяют условию $|f_n^{(r)}| \leqslant m_8 n^{-r-\alpha-1}$, $n \neq 0$, если величины f_n удовлетворяют условию (2), и условию $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |n^r f_n^{(2)}|^q < +\infty$, если f_n удовлетворяют условиям (3). Введем новые неизвестные

$$\Phi_k = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant k \leqslant m-1; \\ \varphi_k, & k \geqslant m. \end{cases} \tag{27}$$

Тогда в терминах неизвестных величин Φ_k и известных величин $f_k^{(2)}$ систему уравнений (26) можно записать в виде

$$\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k}^{(\nu)} k^{\nu}\Phi_k = f_n^{(2)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{28}$$

Система (28) в силу (27) имеет нулевые начальные условия $\Phi_k = 0$, $k = \overline{0, m-1}$. При этом решения систем уравнений (1) и (28) при $k \geqslant m$ совпадают, т. е. $\varphi_k = \Phi_k$, $k \geqslant m$, совпадают также определители этих систем. Таким образом, исследование системы уравнений (1) с ненулевыми начальными условиями легко приводится к исследованию системы уравнений (28) с нулевыми начальными условиями.

Литература

1. Гохберг И.Ц., Фельдман А.И. *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.* – М.: Наука, 1971. – 352 с.
2. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.* – М.: Наука, 1978. – 296 с.
3. Прёсдорф З. *Некоторые классы сингулярных уравнений.* – М.: Мир, 1979. – 493 с.
4. Беркович Ф.Д. *Об одной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений в классах растущих последовательностей* // ДАН СССР. – 1965. – Т. 149. – № 3. – С. 495–498.

5. Беркович Ф.Д. *Об одной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с комплексно сопряженными неизвестными* // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 3. – С. 12–23.
6. Билай В.В., Тихоненко Н.Я. *К теории разрешимости и приближенному решению систем уравнений Винера–Хопфа с разностными и суммарными индексами* // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 33. – № 9. – С. 1120–1126.
7. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
8. Иванов В.В. *Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.* – Киев: Наук. думка, 1968. – 287 с.
9. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
10. Крикунов Ю.М. *О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегродифференциального уравнения* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1952. – Т. 112. – № 10. – С. 191–199.
11. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 741 с.
12. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Наука, 1968. – 511 с.

Южноукраинский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 26.12.2003
окончательный вариант 21.02.2005