ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 10 (533)

УДК 517.983.51

*М.В. ФАЛАЛЕЕВ*

# ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В УСЛОВИЯХ СЕКТОРИАЛЬНОСТИ И РАДИАЛЬНОСТИ

В статье исследуются линейные вырожденные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах (т. е. с необратимым оператором при производной). Уравнениями такого типа описываются многочисленные задачи математической физики прикладного характера. В то же время они разрешимы в классе непрерывных функций лишь при определенном соотношении между правыми частями уравнений и начальными условиями. Описать эти соотношения, равно как и вывести формулы для самих (непрерывных) решений, можно либо непосредственно получая эти решения по какой-либо методике, либо (как это делает автор) выстраивая обобщенные решения. В последнем случае обобщенное решение оказывается суммой сингулярной и регулярной составляющих. Условия, при которых обращается в нуль сингулярная составляющая решения, и являются условиями разрешимости в классе обычных (непрерывных, но не только) функций, а регулярная составляющая обобщенного решения в этом случае оказывается искомым (классическим) решением. К настоящему времени при построении обобщенных решений используются по преимуществу две методики. Первая предполагает непосредственное восстановление обеих частей искомого обобщенного решения [1], но в этом случае о единственности построенного решения можно говорить лишь в подклассе, определяемом видом решения. Второй подход, о котором далее и будет идти речь, предполагает использование конструкции фундаментальной оператор-функции, обобщающей идею фундаментального решения из [2] на уравнения в банаховых пространствах. При этом подходе в полной мере удается решить вопросы как о построении самих обобщенных решений, так и описании (довольно широких) классов единственности построенных решений. В работах [3] и [4] во фредгольмовом случае были построены фундаментальные оператор-функции для ряда дифференциальных, интегральных и интегродифференциальных операторов в классе обобщенных функций с ограниченным слева носителем. В [5] результаты из [3] и [4] были обобщены на случай спектральной ограниченности [6], в представляемой работе конструкция фундаментальной оператор-функции перенесена на секториальный и радиальный [6], [7] случаи.

## 1. Фундаментальные оператор-функции для секториально ограниченных операторных пучков

Пусть $E_1$, $E_2$ — банаховы пространства, оператор $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ необратим, $A$ — замкнутый линейный оператор из $E_1$ в $E_2$, $\overline{D(A)} \equiv E_1$. Следуя [6] и [7], $B$-резольвентным множеством оператора $A$ называем множество $\rho^B(A) \equiv \{\mu \in C : (\mu B - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)\}$, при $\mu \in \rho^B(A)$ операторы $R^B_\mu(A) = (\mu B - A)^{-1}B \in \mathcal{L}(E_1)$, $L^B_\mu(A) = B(\mu B - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$ называются [6], [7] соответственно правой и левой $B$-резольвентами оператора $A$. Если же $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in \rho^B(A)$, то операторы $R^B_{(\mu,p)}(A) \equiv \prod\limits_{q=0}^{p} R^B_{\mu_q}(A)$ и $L^B_{(\mu,p)}(A) \equiv \prod\limits_{q=0}^{p} L^B_{\mu_q}(A)$ называют соответственно правой и левой $p$-резольвентами оператора $A$ относительно $B$ (или, короче, правой и левой $(B,p)$-резольвентами оператора $A$).

Оператор $A$ называется $p$-секториальным относительно $B$ [6], [7] с числом $p \in \{0\} \cup N$ (или, короче, $(B,p)$-секториальным), если

а) существуют $a \in R$, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ такие, что сектор

$$S^B_{a,\theta}(A) \equiv \{\mu \in C : |\arg(\mu - a)| < \theta,\ \mu \neq a\} \subset \rho^B(A),$$

б) существует $K \in R_+$ такое, что $\forall \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^B_{a,\theta}(A)$

$$\max\{\|R^B_{(\mu,p)}(A)\|_{\mathcal{L}(E_1)}, \|L^B_{(\mu,p)}(A)\|_{\mathcal{L}(E_2)}\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q - a|}.$$

В условиях а) и б), не ограничивая общности [6], [7], можно считать $a = 0$, что принято записывать как $S^B_{a,\theta}(A) \equiv S^B_\theta(A)$.

Если в условии б) при добавлении в $R^B_{(\mu,p)}(A)$ $(L^B_{(\mu,p)}(A))$ еще одного множителя вида $(\lambda B - A)^{-1}A$ $(A(\lambda B - A)^{-1})$, $\lambda \in \rho^B(A)$, константу $K$ уже не удается выбрать не зависящей от аргумента, т. е.

$$\|R^B_{(\mu,p)}(A)(\lambda B - A)^{-1}Ax\|_{E_1} \leq \frac{\mathrm{const}(x)}{|\lambda| \prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q|}$$

$$\left(\|A(\lambda B - A)^{-1}L^B_{(\mu,p)}(A)y\|_{E_2} \leq \frac{\mathrm{const}(y)}{|\lambda| \prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q|}\right),$$

то в этом случае $(B,p)$-секториальный оператор $A$ принято [6], [7] называть сильно $(B,p)$-секториальным справа (слева).

Если же в определении сильно $(B,p)$-секториального слева оператора $A$ дополнительно выполнено условие

$$\|(\lambda B - A)^{-1}L^B_{(\mu,p)}(A)y\|_{\mathcal{L}(E_2)} \leq \frac{C}{|\lambda| \prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q|},$$

$C \in R_+$, $\lambda, \mu_q \in \rho^B(A)$, то оператор $A$ принято называть [6], [7] просто сильно $(B,p)$-секториальным.

Отметим, что сильно $(B,p)$-секториальные операторы $A$ являются также и сильно $(B,p)$-секториальными справа [6], [7]. Известной является

**Теорема** ([6], [7]). а) *Если оператор $A$ $(B,p)$-секториален, то оператор-функции*

$$\mathcal{U}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^B_\mu(A)e^{\mu t}d\mu, \quad \mathcal{F}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^B_\mu(A)e^{\mu t}d\mu$$

*являются аналитическими и равномерно ограниченными полугруппами операторов, где контур интегрирования $\Gamma \subset S^B_\theta(A)$ такой, что $|\arg\mu| \to \theta$ при $|\mu| \to +\infty$.*

б) *Если оператор $A$ сильно $(B,p)$-секториален слева (справа), то существуют единицы полугрупп $\mathcal{U}(t)$ и $\mathcal{F}(t)$, т. е. в сильной топологии существуют предельные операторы*

$$P = \lim_{t\to 0+} \mathcal{U}(t) \in \mathcal{L}(E_1), \quad Q = \lim_{t\to 0+} \mathcal{F}(t) \in \mathcal{L}(E_2),$$

*являющиеся проекторами в $E_1$ и $E_2$ соответственно, причем $BP = QB$, $AP = QA$.*

в) *Проекторы $P$ и $Q$ порождают разложения пространств $E_1$ и $E_2$ в прямые суммы $E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = \ker P \oplus \operatorname{im} P$, $E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = \ker Q \oplus \operatorname{im} Q$, действия операторов $B$, $A$ расщепляются, операторы $B_0 : E_1^0 \to E_2^0$, $B_1 : E_1^1 \to E_2^1$ ограничены, оператор $A_0 : E_1^0 \to E_2^0$ имеет ограниченный обратный, причем операторы $A_0^{-1}B_0 \in \mathcal{L}(E_1^0)$ и $B_0A_0^{-1} \in \mathcal{L}(E_2^0)$ нильпотентны со степенью нильпотентности не выше числа $p$. Если $A$ сильно $(B,p)$-секториален, то $B_1 : E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратим.*

Новые утверждения сформулированы в виде теорем 1–8.

**Теорема 1.** *Если оператор $A$ сильно $(B,p)$-секториален, то дифференциальный оператор $(B\delta'(t)-A\delta(t))$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ (обобщенных функций с ограниченным слева носителем [2]) фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}(t)=\mathcal{U}(t)B_1^{-1}Q\theta(t)-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q)}(t).$$

**Доказательство.** В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции [3], [4] для доказательства проверим справедливость равенства

$$(B\delta'(t)-A\delta(t))*\mathcal{E}(t)*u(t)=u(t)\ \ \forall u(t)\in K'_+(E_2).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}(B\delta'(t)-A\delta(t))*\mathcal{E}(t)*u(t)=\Bigg(&B\mathcal{U}'(t)B_1^{-1}Q\theta(t)+B\mathcal{U}(0)B_1^{-1}Q\delta(t)-\\&-\sum_{q=0}^{p}B(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q+1)}(t)-A\mathcal{U}(t)B_1^{-1}Q\theta(t)+\\&+\sum_{q=0}^{p}A(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q)}(t)\Bigg)*u(t)=\\=\Bigg(&\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma(\mu B-A)(\mu B-A)^{-1}Be^{\mu t}d\mu\,B_1^{-1}Q\theta(t)+BPB_1^{-1}Q\delta(t)+\\&+AA_0^{-1}(I-Q)\delta(t)+\sum_{q=0}^{p-1}(AA_0^{-1}B_0-B)(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q+1)}(t)\Bigg)*u(t)=\\&=Q\delta(t)+(I-Q)\delta(t)=I\delta(t)*u(t)=u(t).\quad\square\end{aligned}$$

Задачу Коши

$$B\dot{x}=Ax+f(t),\quad x(0)=x_0,\tag{1}$$

в обобщенных функциях [1], [2] можно переписать в виде $B\dot{\widetilde{x}}=A\widetilde{x}+f(t)\theta(t)+Bx_0\delta(t)$ или [3], [4] в сверточном виде $(B\delta'(t)-A\delta(t))*\widetilde{x}=f(t)\theta(t)+Bx_0\delta(t)$.

**Теорема 2.** *Если выполнены условия теоремы 1, то рассматриваемая задача Коши (1) имеет в классе $K'_+(E_1)$ единственное решение вида*

$$\widetilde{x}(t)=\mathcal{E}(t)*(f(t)\theta(t)+Bx_0\delta(t)).$$

В развернутом виде представление для $\widetilde{x}(t)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\widetilde{x}(t)=\Bigg[&\mathcal{U}(t)Px_0+\int_0^t\mathcal{U}(t-s)B_1^{-1}Qf(s)ds(t)-\\&-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I-Q)f^{(q)}(t)\Bigg]\theta(t)-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}\omega\delta^{(q)}(t),\end{aligned}\tag{2}$$

где

$$\omega=(I-P)x_0+\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I-Q)f^{(q)}(0).$$

Доказательство единственности решения в классе $K'_+(E_1)$ аналогично доказательству соответствующей теоремы из ([2], с. 194–195).

Отметим также, что в силу нильпотентности оператора $A_0^{-1}B_0$ порядок сингулярности полученного обобщенного решения не превышает $(p-1)$.

**Следствие.** Если выполнены условия теоремы 2 и $\omega = 0$, то обобщенное решение $\widetilde{x}(t)$ окажется совпадающим с классическим (непрерывным), построенным в [6] и [7].

Утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, можно получить для дифференциально-разностных операторов, соответствующих уравнениям вида

$$B\frac{\partial^N u}{\partial t^N} = A(u(t,\overline{x}-\overline{\mu}) - u(t,\overline{x})) + f(t,\overline{x}),$$

$f(t,\overline{x})$ — быстро убывающая [4] по $\overline{x} \in R^n$ функция при $|\overline{x}| \to +\infty$ в $R^n$.

**Теорема 3.** *Если выполнены условия теоремы* 1, *то дифференциально-разностный оператор* $(B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - A\delta(t)\cdot(\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x})))$ *имеет на классе* $K'(R^1_+ \otimes R^n; E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию*

$$\mathcal{E}_1(t,\overline{x}) = B_1^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A_1B_1^{-1}t)^k}{k!}Q\theta(t)\cdot(\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))^k + \sum_{q=0}^{p}(-A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q)}(t)\cdot\mathcal{B}_{q+1}(\overline{x}),$$

*где введены обозначения*

$$(\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))^k = \underbrace{(\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x})) * \cdots * (\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))}_{k} = \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu C_k^\nu\delta(\overline{x}-\nu\overline{\mu}),$$

$$\mathcal{B}_{q+1}(\overline{x}) = \sum_{\nu=0}^{\infty}C_{q+\nu}^q\delta(\overline{x}-\nu\overline{\mu}), \quad (\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))^0 = \mathcal{B}_0(\overline{x}) = \delta(\overline{x}).$$

**Доказательство.** Обобщенные функции $\mathcal{B}_{q+1}(\overline{x})$ удовлетворяют равенствам $(\delta(\overline{x}-\overline{\mu})-\delta(\overline{x}))*\mathcal{B}_{q+1}(\overline{x}) = -\mathcal{B}_q(\overline{x}) \quad \forall q \in N\cup\{0\}$, которые проверяются непосредственно. Поэтому если $k > l$, то

$$(\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))^k * \mathcal{B}_q(\overline{x}) = (-1)^q(\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))^{k-q}.$$

Проверим справедливость равенства

$$[B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - A\delta(t)\cdot(\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))] * \mathcal{E}_1(t,\overline{x}) * u(t,\overline{x}) = u(t,\overline{x}).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&[B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - A\delta(t)\cdot(\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))] * \mathcal{E}_1(t,\overline{x}) * u(t,\overline{x}) = \\
&= \Bigg[BB_1^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(A_1B_1^{-1})^k t^{k-1}}{(k-1)!}Q\theta(t)\cdot(\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))^k + BB_1^{-1}Q\delta(t)\cdot\delta(\overline{x}) + \\
&\quad + B\sum_{q=0}^{p}(-A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q+1)}(t)\cdot\mathcal{B}_{q+1}(\overline{x}) - \\
&\quad - AB_1^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A_1B_1^{-1}t)^k}{k!}Q\theta(t)\cdot(\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))^{k+1} + \\
&\quad + A\sum_{q=1}^{p}(-A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q)}(t)\cdot\mathcal{B}_q(\overline{x}) + AA_0^{-1}(I-Q)\delta(t)\cdot\delta(\overline{x})\Bigg] * u(t,\overline{x}) = \\
&= \Bigg[A_1B_1^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A_1B_1^{-1})^k t^k}{k!}Q\theta(t)\cdot(\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))^{k+1} + \\
&\quad + Q\delta(t)\cdot\delta(\overline{x}) + B_0\sum_{q=0}^{p-1}(-A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q+1)}(t)\cdot\mathcal{B}_{q+1}(\overline{x}) - \\
&\quad - A_1B_1^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A_1B_1^{-1}t)^k}{k!}Q\theta(t)\cdot(\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))^{k+1} -
\end{aligned}$$

$$- B_0 \sum_{q=0}^{p-1} (-A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q+1)}(t)\cdot \mathcal{B}_{q+1}(\overline{x}) + (I-Q)\delta(t)\cdot\delta(\overline{x})\Big] * u(t,\overline{x}) =$$

$$= [Q\delta(t)\cdot\delta(\overline{x}) + (I-Q)\delta(t)\cdot\delta(\overline{x})] * u(t,\overline{x}) = I\delta(t)\cdot\delta(\overline{x}) * u(t,\overline{x}) = u(t,\overline{x}). \quad \square$$

Теорема 3 допускает обобщение на дифференциально-разностные операторы высокого порядка.

**Теорема 4.** *Если выполнены условия теоремы* 1, *то дифференциально-разностный оператор* $(B\delta^{(N)}(t)\cdot\delta(\overline{x}) - A\delta(t)\cdot(\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x})))$ *имеет на классе* $K'(R^1_+\otimes R^n; E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t,\overline{x}) = B_1^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}\frac{t^{N\cdot k-1}}{(N\cdot k-1)!}Q\theta(t)\cdot(\delta(\overline{x}-\overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))^{k-1} +$$

$$+ \sum_{q=0}^{p}(-A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q\cdot N)}(t)\cdot\mathcal{B}_{q+1}(\overline{x}).$$

Если для пары операторов $A$ и $B$ выполнены условия теоремы 1, то обобщенное решение задачи Коши

$$B\frac{\partial u}{\partial t} = A(u(t,\overline{x}-\overline{\mu}) - u(t,\overline{x})) + f(t,\overline{x}), \quad u(0,\overline{x}) = u_0(\overline{x}),$$

где $u_0(\overline{x})$ и $f(t,\overline{x})$ — функции, быстро убывающие [4] по $\overline{x}\in R^n$ при $|\overline{x}|\to+\infty$, $u_0(\overline{x})\in D(B)$, представимо в виде

$$\widetilde{u}(t,\overline{x}) = \mathcal{E}_1(t,\overline{x}) * (Bu_0(\overline{x})\delta(t) + f(t,\overline{x})\theta(t)).$$

Из этого представления можно получить утверждения о непрерывных решениях такой задачи Коши.

Еще одним типом уравнений, к которым может быть применена предлагаемая здесь методология, является дифференциальное уравнение

$$B\frac{\partial^{2N}u}{\partial^N x\partial^N y} = Au + f(x,y).$$

**Теорема 5.** *Если выполнены условия теоремы* 1, *то дифференциальный оператор* $(B\delta^{(N)}(x)\cdot\delta^{(N)}(y) - A\delta(x)\cdot\delta(y))$ *имеет на классе* $K'_+(R^2_+; E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию*

$$\mathcal{E}_N(x,y) = B_1^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}\cdot\frac{x^{N\cdot k-1}}{(N\cdot k-1)!}\cdot\frac{y^{N\cdot k-1}}{(N\cdot k-1)!}Q\theta(x,y) -$$

$$- \sum_{q=0}^{\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{(qN)}(x)\cdot\delta^{(qN)}(y).$$

**Доказательство.** Проверим справедливость равенства $\forall u(x,y)\in K'(R^2_+; E_2)$

$$[B\delta^{(N)}(x)\cdot\delta^{(N)}(y) - A\delta(x)\cdot\delta(y)] * \mathcal{E}_N(x,y) * u(x,y) = u(x,y).$$

Действительно,

$$[B\delta^{(N)}(x)\cdot\delta^{(N)}(y) - A\delta(x)\cdot\delta(y)] * \mathcal{E}_N(x,y) * u(x,y) =$$

$$= \Big[BB_1^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}\cdot\frac{x^{N\cdot(k-1)-1}}{(N\cdot(k-1)-1)!}\cdot\frac{y^{N\cdot(k-1)-1}}{(N\cdot(k-1)-1)!}Q\theta(x,y) +$$

$$+ BB_1^{-1}Q\delta(x,y) - B\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{((q+1)N)}(x)\cdot\delta^{((q+1)N)}(y) -$$

$$- AB_1^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}\cdot\frac{x^{N\cdot k-1}}{(N\cdot k-1)!}\cdot\frac{y^{N\cdot k-1}}{(N\cdot k-1)!}Q\theta(x,y) +$$

$$+ A\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{(qN)}(x)\cdot\delta^{(qN)}(y)\Big] * u(x,y) =$$

$$= \Big[Q\delta(x,y) + \sum_{q=0}^{p-1}(AA_0^{-1}B_0 - B)(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{((q+1)N)}(x)\cdot\delta^{((q+1)N)}(y) +$$

$$+ (I-Q)\delta(x,y)\Big] * u(x,y) = I\delta(x,y) * u(x,y) = u(x,y). \quad \square$$

Естественным обобщением теоремы 5 является следующая теорема, доказательство которой дословно повторяет все проведенные только что рассуждения, поэтому ограничимся лишь ее формулировкой.

**Теорема 6.** *Если выполнены условия теоремы* 1, *то дифференциальный оператор* $(BD^\alpha\delta(\overline{x}) - A\delta(\overline{x}))$ *имеет на классе* $K'(R_+^m; E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_\alpha = B_1^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}\prod_{i=1}^{m}\frac{x_i^{\alpha_i\cdot k-1}}{(\alpha_i\cdot k-1)!}Q\theta(\overline{x}) - \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)D^{q\cdot\alpha}\delta(\overline{x}),$$

*где*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}}, \quad D^{q\cdot\alpha}\delta(\overline{x}) = \delta^{(q\cdot\alpha_1)}(x_1)\cdot\ldots\cdot\delta^{(q\cdot\alpha_m)}(x_m).$$

Если выполнены условия теоремы 1, функция $f(x,y)\in C(R_+^2)$ и принимает значения в $E_2$, то краевая задача

$$B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = Au + f(x,y), \quad u|_{x=0} = \alpha(y), \quad u|_{y=0} = \beta(x)$$

имеет обобщенное решение

$$u = \mathcal{E}_1(x,y) * (f(x,y)\theta(x,y) + B\alpha'(y)\delta(x)\cdot\theta(y) + B\beta'(x)\theta(x)\cdot\delta(y) + B\beta(0)\delta(x)\cdot\delta(y)).$$

Отсюда при необходимости можно получить условия разрешимости этой начально-краевой задачи в классе $C^2(R_+^2)$.

## 2. Фундаментальные оператор-функции для радиально ограниченных операторных пучков

Предпошлем необходимые в дальнейшем сведения из ([7], гл. 3).

Пусть $E_1$, $E_2$ — банаховы пространства, оператор $B\in\mathcal{L}(E_1,E_2)$ необратим, $A\in\mathcal{C}l(E_1,E_2)$.

Оператор $A$ называется $p$-радиальным относительно $B$ [7] с числом $p\in\{0\}\cup N$ (или короче $(B,p)$-радиальным), если

а) $\exists a\in R \quad \forall\mu>a \quad \mu\in\rho^B(A)$,

б) $\exists K\in R_+ \quad \forall\mu>a, \quad \forall n\in N$

$$\max\{\|R^B_{(\mu,p)}(A)\|^n_{\mathcal{L}(E_1)}, \|L^B_{(\mu,p)}(A)\|^n_{\mathcal{L}(E_2)}\} \le \frac{K}{\prod\limits_{q=0}^{p}(\mu_q - a)^n}.$$

Как и в случае секториальности, без ограничения общности ([7], с. 119) можно считать $a=0$.

Соответственно $(B,p)$-радиальный оператор $A$ называется [7] сильно $(B,p)$-радиальным справа (слева), если $\forall\lambda,\ \mu_0,\mu_1,\dots,\mu_p\in R_+$

$$\|R^B_{(\mu,p)}(A)(\lambda B-A)^{-1}Ax\|_{E_1}\le\frac{\mathrm{const}(x)}{\lambda\prod\limits_{q=0}^{p}\mu_q}$$

$$\left(\|A(\lambda B-A)^{-1}L^B_{(\mu,p)}(A)y\|_{E_2}\le\frac{\mathrm{const}(y)}{\lambda\prod\limits_{q=0}^{p}\mu_q}\right).$$

Оператор $A$ называется просто сильно $(B,p)$-радиальным [7], если он сильно $(B,p)$-радиален слева и

$$\|R^B_{(\mu,p)}(A)(\lambda B-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_2)}\le\frac{C}{\lambda\prod\limits_{q=0}^{p}\mu_q}.$$

Как и для секториальных операторов, из сильной $(B,p)$-радиальности оператора $A$ следует его правая сильная $(B,p)$-радиальность [7]. Известна

**Теорема** ([7]). а) *Если оператор $A$ $(B,p)$-радиален, то оператор-функции*

$$\mathcal{U}_1(t)=\exp\left(\frac{\mu t}{p+1}((\mu R^B_\mu(A))^{p+1}-I)\right),$$

$$\left(\mathcal{F}_1(t)=\exp\left(\frac{\mu t}{p+1}((\mu L^B_\mu(A))^{p+1}-I)\right)\right),\quad \mu\in R_+,\quad t\ge 0,$$

*являются равномерно ограниченными и сильно непрерывными.*

б) *Если оператор $A$ сильно $(B,p)$-радиален справа (слева), тогда в сильной топологии существуют предельные операторы*

$$P_1=\lim_{\mu\to+\infty}(\mu R^B_\mu(A))^{p+1}\in\mathcal{L}(E_1),\quad Q_1=\lim_{\mu\to+\infty}(\mu L^B_\mu(A))^{p+1}\in\mathcal{L}(E_2),$$

*являющиеся проекторами в $E_1$ и $E_2$ соответственно, причем $BP=QB$, $AP=QA$.*

в) *Проекторы $P_1$ и $Q_1$ порождают разложения пространств $E_1$ и $E_2$ в прямые суммы $E_1=E_1^0\oplus E_1^1=\ker P_1\oplus\operatorname{im}P_1$, $E_2=E_2^0\oplus E_2^1=\ker Q_1\oplus\operatorname{im}Q_1$, действия операторов $B$, $A$ расщепляются, $A_0:E_1^0\to E_2^0$ имеет ограниченный обратный. Если $A$ сильно $(B,p)$-радиален, то $B_1:E_1^1\to E_2^1$, непрерывно обратим и оператор $A_0^{-1}B_0\in\mathcal{L}(E_1^0)$ нильпотентен степени не выше $p$.*

Так же, как и в первом пункте статьи, доказываются следующие новые утверждения.

**Теорема 7.** *Если оператор $A$ сильно $(B,p)$-радиален, то дифференциальный оператор $(B\delta'(t)-A\delta(t))$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию*

$$\mathcal{E}_1(t)=\mathcal{U}_1(t)B_1^{-1}Q_1\theta(t)-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q)}(t).$$

**Теорема 8.** *Если выполнены условия теоремы 7, то задача Коши (1) имеет в классе $K'_+(E_1)$ единственное решение*

$$\widetilde{x}_1(t)=\mathcal{E}_1(t)*(f(t)\theta(t)+Bx_0\delta(t)).$$

Развернутое представление для $\widetilde{x}_1(t)$ имеет вид (2), необходимо лишь заменить $\mathcal{U}(t)$ на $\mathcal{U}_1(t)$, $P$ на $P_1$ и $Q$ на $Q_1$.

**Следствие.** Если выполнены условия теоремы 7 и

$$\omega_1 = (I - P_1)x_0 + \sum_{q=0}^{p} (A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I - Q_1)f^{(q)}(0) = 0,$$

то обобщенное решение $\widetilde{x}_1(t)$ окажется классическим (непрерывным), построенным в ([7], с. 158).

Теоремы о дифференциально-разностных и дифференциальных операторах в частных производных для радиального случая формулируются и доказываются аналогично теоремам 3–6 с соответствующими этому случаю модификациями.

## Литература


1. Сидоров Н.А., Фалалеев М.В. *Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 4. – С. 726–728.
2. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1981. – 512 с.
3. Фалалеев М.В. *Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах* // Сиб. матем. журн. – 2000. – Т. 41. – № 5. – С. 1167–1182.
4. Sidorov N., Loginov B., Sinithin A., Falaleev M. *Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications.* – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.
5. Фалалеев М.В. *Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов и полугруппы операторов с ядрами в банаховых пространствах* // Материалы конф. “Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий”. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2004. – С. 41.
6. Свиридюк Г.А. *К общей теории полугрупп операторов* // УМН. – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 47–74.
7. Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. *Линейные уравнения Соболевского типа*: Учеб. пособие. – Челябинск: Изд-во Челябинск. гос. ун-та, 2002. – 179 с.



*Иркутский государственный университет*



*Поступила* 26.04.2005