ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 11 (546)

УДК 519.614

П.А. САВЕНКО, Л.П. ПРОЦАХ

МЕТОД НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ В РЕШЕНИИ ДВУМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЫ

1. Нелинейные спектральные задачи возникают в различных областях анализа и математической физики. Наиболее полно развиты теория и методы решения таких задач с одномерным спектральным параметром (см., напр., [1]–[9]).

В данной работе рассматривается нелинейная спектральная задача с двумерным спектральным параметром. Использование методов неявных функций позволяет изучить качественные характеристики существующего спектра голоморфных оператор-функций, а также строить сравнительно несложные алгоритмы для численного нахождения спектральных линий или связных компонент спектральных областей.

2. Пусть E — комплексное банахово пространство, $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ — открытое связное множество в комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$, элементы которого запишем в виде $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$, где $\lambda_i \in \Lambda_i \subset \mathbb{C}$ $(i = 1, 2)$. Пусть задана оператор-функция

$$A(\lambda_1, \lambda_2) = T(\lambda_1, \lambda_2) - I,$$

где $T(\lambda_1, \lambda_2)$ — линейный непрерывный оператор, действующий в пространстве E и аналитически зависящий от двумерного параметра (λ_1, λ_2), I — единичный в E оператор. Таким образом, каждому значению $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$ ставится в соответствие оператор $A(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{L}(E, E)$.

Для нелинейной спектральной задачи

$$A(\lambda_1, \lambda_2)x = 0 \tag{1}$$

в работе находятся собственные значения $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \in \boldsymbol{\Lambda}$ и соответствующие им собственные векторы $x^{(0)} \in E$ $(x^{(0)} \neq 0)$ такие, что $A(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})x^{(0)} = 0$.

Функция

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = \det(T(\lambda_1, \lambda_2) - I)$$

в случае конечномерного пространства E является определителем, порядок которого совпадает с размерностью пространства. В случае, когда $T(\lambda_1, \lambda_2)$ — вполне непрерывный оператор, действующий в функциональном гильбертовом пространстве, функцию $F(\lambda_1, \lambda_2)$ определим, как

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = \det \begin{pmatrix} t_{11}(\lambda_1, \lambda_2) - 1 & t_{12}(\lambda_1, \lambda_2) & \dots & t_{1n}(\lambda_1, \lambda_2) & \dots \\ t_{21}(\lambda_1, \lambda_2) & t_{22}(\lambda_1, \lambda_2) - 1 & \dots & t_{2n}(\lambda_1, \lambda_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1}(\lambda_1, \lambda_2) & t_{n2}(\lambda_1, \lambda_2) & \dots & t_{nn}(\lambda_1, \lambda_2) - 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

полагая, что при $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$ имеет место неравенство $|F(\lambda_1, \lambda_2)| \leq C$, где C — некоторая вещественная константа. Возможность такого представления функции $F(\lambda_1, \lambda_2)$ в случае бесконечномерного пространства E вытекает из определения вполне непрерывного оператора ([10], с. 54), согласно которому вполне непрерывный оператор может быть представлен выражением $T(\lambda_1, \lambda_2)u = T_n(\lambda_1, \lambda_2)u + T_\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2)u$, где $T_n(\lambda_1, \lambda_2)$ — вырожденный оператор, а норму оператора $T_\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2)$ можно сделать меньше любого наперед заданного малого числа $\varepsilon > 0$.

Очевидно, $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \in \boldsymbol{\Lambda}$ будет собственным значением задачи (1), если точка $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$ является корнем уравнения

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = 0. \tag{2}$$

Параллельно будем рассматривать также вспомогательную, соответствующую (1), однопараметрическую спектральную задачу

$$\widetilde{A}(\lambda_1)x \equiv A(\lambda_1, f(\lambda_1))x = 0, \tag{3}$$

в которой полагается $\lambda_2 = f(\lambda_1)$, где $f(\lambda_1)$ — некоторая однозначная дифференцируемая функция, отображающая область Λ_1 в область $\Lambda_1' \subset \Lambda_2$. Очевидно, $\widetilde{A}(\lambda_1) \in \mathcal{L}(E, E)$ при $\lambda_1 \in \Lambda_1$. Спектр оператор-функции $\widetilde{A}(\lambda_1)$ обозначим через $s(\widetilde{A})$.

Теорема 1. *Пусть при каждом $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \boldsymbol{\Lambda}$ оператор $A(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{L}(E, E)$ является фредгольмовым оператором с нулевым индексом, оператор-функция $A(\cdot, \cdot) : \boldsymbol{\Lambda} \to \mathcal{L}(E, E)$ голоморфна, а функция $F(\lambda_1, \lambda_2)$ дифференцируема в области $\boldsymbol{\Lambda}$ и $s(\widetilde{A}) \neq \Lambda_1$.*

Тогда

1) *каждая точка спектра $\lambda_1^{(0)} \in s(\widetilde{A})$ изолирована, является собственным значением оператора $\widetilde{A}(\lambda_1) \equiv A(\lambda_1, f(\lambda_1))$, ей отвечает конечномерное собственное подпространство $N(A(\lambda_1^{(0)}))$ и конечномерное корневое подпространство;*
2) *каждый элемент $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, f(\lambda_1^{(0)})) \in \boldsymbol{\Lambda}$ является точкой спектра оператора $A(\lambda_1, \lambda_2)$;*
3) *если $F'_{\lambda_2}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки $\lambda_1^{(0)} \in \Lambda_1$ существует непрерывная дифференцируемая функция $\lambda_2 = \varphi(\lambda_1)$, которая является решением уравнения (3), т. е. в некоторой бицилиндрической области $\boldsymbol{\Lambda}_0 = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \boldsymbol{\Lambda}_0 : |\lambda_1 - \lambda_1^{(0)}| < \varepsilon_1$, $|\lambda_2 - \lambda_2^{(0)}| < \varepsilon_2\}$ существует непрерывный спектр оператор-функции $A(\lambda_1, \lambda_2)$, где ε_1, ε_2 — некоторые вещественные константы.*

Доказательство теоремы вытекает из теоремы 1 ([4], с. 68) и теоремы о существовании неявной функции (см., напр., [11], с. 379; [12], с. 27). Вначале покажем, что из условий сформулированной теоремы вытекают условия теоремы 1 ([4], с. 68) относительно существования дискретного спектра оператор-функции $\widetilde{A}(\lambda_1)$. Поскольку согласно условиям теоремы при каждом $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \boldsymbol{\Lambda}$ оператор $A(\lambda_1, \lambda_2)$ является фредгольмовым с нулевым индексом, а оператор-функция $A(\cdot, \cdot) : \boldsymbol{\Lambda} \to \mathcal{L}(E, E)$ — голоморфной, то при каждом $\lambda_1^{(0)} \in \Lambda_1$ оператор $\widetilde{A}(\lambda_1)$ является также фредгольмовым с нулевым индексом, а оператор-функция $\widetilde{A}(\lambda_1) : \Lambda_1 \to \mathcal{L}(E, E)$ — голоморфной. Итак, согласно теореме 1 ([4], с. 68) каждая точка $\lambda_1^{(0)} \in s(\widetilde{A})$ изолирована, является собственным значением оператора $\widetilde{A}(\lambda_1)$, ей отвечает конечномерное собственное подпространство и конечномерное корневое подпространство, а оператор-функция $\widetilde{A}^{-1}(\lambda_1)$ имеет в точке $\lambda_1^{(0)}$ полюс, порядок которого равняется наибольшей длине корневых цепочек, соответствующих $\lambda_1^{(0)}$. Следовательно, каждая точка $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) = (\lambda_1^{(0)}, f(\lambda_1^{(0)}))$ является собственным значением оператора $\widetilde{A}(\lambda_1) \equiv A(\lambda_1, f(\lambda_1))$. Итак, $F(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \equiv F(\lambda_1^{(0)}, f(\lambda_1^{(0)})) = 0$.

Пусть λ_1, λ_2 — независимые переменные в области $\boldsymbol{\Lambda}$, а $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \in \boldsymbol{\Lambda}$ является точкой спектра оператора $A(\lambda_1, \lambda_2)$. Поскольку $F(\lambda_1, \lambda_2)$ является дифференцируемой функцией в окрестности точки $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})$ и $F'_{\lambda_2}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \neq 0$, то согласно теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})$ существует непрерывная дифференцируемая функция $\lambda_2 = \varphi(\lambda_1)$, которая является решением уравнения (2). Отсюда вытекает существование непрерывного спектра оператор-функции $A(\cdot, \cdot) : \boldsymbol{\Lambda} \to \mathcal{L}(E, E)$ в некоторой бицилиндрической области $\boldsymbol{\Lambda}_0 = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \boldsymbol{\Lambda}_0 : |\lambda_1 - \lambda_1^{(0)}| < \varepsilon_1, |\lambda_2 - \lambda_2^{(0)}| < \varepsilon_2\}$. $\square$

3. Для примера рассмотрим частный случай задачи (1), полагая, что оператор T является λ-матрицей ([13], с. 64) $T_M(\lambda_1, \lambda_2)$ от двух переменных, т. е. будем считать, что ее коэффициенты являются полиномами

$$t_{ij}(\lambda_1,\lambda_2)=p_{ij}^{(n_i,m_j)}(\lambda_1,\lambda_2)\equiv a_{ij}^{(0,0)}+a_{ij}^{(1,0)}\lambda_1+a_{ij}^{(0,1)}\lambda_2+\cdots+a_{ij}^{(n_i,m_j)}\lambda_1^{n_i}\lambda_2^{m_j}, \tag{4}$$

где $a_{ij}^{(\nu,\mu)}$ — вещественные или комплексные числа. Предположим, что $n_i\le k$ $(i=1\div n)$, $m_j\le l$ $(j=1\div n)$. Очевидно, оператор-функция $A_M(\lambda_1,\lambda_2)=T_M(\lambda_1,\lambda_2)-I_M$ является голоморфной и дифференцируемой по Фреше в любой точке $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}\in\boldsymbol{\Lambda}$, где $\lambda_i\in\Lambda_i=\mathbb{C}$. Поскольку при любом фиксированном значении $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}\in\boldsymbol{\Lambda}$ выполняется равенство ([13], с. 45)

$$\dim(\ker T_M(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)}))=\dim(\ker T_M^*(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)})),$$

то при каждом $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}\in\boldsymbol{\Lambda}$ оператор-функция $A_M(\lambda_1,\lambda_2)$ является фредгольмовым оператором с нулевым индексом, действующим в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Положим $\lambda_2=\lambda_1=\lambda$ в $T_M(\lambda_1,\lambda_2)$, где $\lambda\in\Lambda_1$. Обозначим $F(\lambda_1,\lambda_2)=\widetilde{F}(\lambda)$, $t_{ij}(\lambda_1,\lambda_2)=\widetilde{t}_{ij}(\lambda)$. В силу (4)

$$\widetilde{t}_{ij}(\lambda)=\widetilde{p}_{ij}^{(n_i,m_j)}(\lambda)\equiv a_{ij}^{(0,0)}+(a_{ij}^{(1,0)}+a_{ij}^{(0,1)})\lambda+(a_{ij}^{(2,0)}+a_{ij}^{(1,1)}+a_{ij}^{(0,2)})\lambda^2+\cdots+a_{ij}^{(n_i,m_j)}\lambda^{n_i+m_j},$$

а функция $\widetilde{F}(\lambda)$ в уравнении $\widetilde{F}(\lambda)=0$ является полиномом, степень которого не больше $m=(k+l)n$. Таким образом, согласно основной теореме алгебры многочленов ([11], с. 439) уравнение $\widetilde{F}(\lambda)=0$ имеет не больше m корней, откуда вытекает существование решений вспомогательной задачи (3). Соответствующее корням этого уравнения $\lambda_1^{(\nu)}\in\Lambda_1$ множество пар элементов $\{\lambda_1^{(\nu)},\lambda_2^{(\nu)}\}\in\Lambda_1\times\Lambda_2$ будет дискретным множеством собственных значений оператора $A_M(\lambda_1,\lambda_2)$.

Рассмотрим уравнение (2), полагая, что коэффициенты матрицы $T_M(\lambda_1,\lambda_2)$ определяются по формулам (4). Существование и непрерывность частных производных $F'_{\lambda_1}(\lambda_1,\lambda_2)$, $F'_{\lambda_2}(\lambda_1,\lambda_2)$ очевидны. Если в точках $\{\lambda_1^{(\nu)},\lambda_2^{(\nu)}\}\in\Lambda_1\times\Lambda_2$ производная $F'_{\lambda_2}(\lambda_1,\lambda_2)$ отлична от нуля, то, решая в окрестности каждой точки $\lambda_1^{(\nu)}\in\Lambda_1$ задачу Коши

$$\frac{dw_\nu}{d\lambda_1}=-\frac{F'_{\lambda_1}(\lambda_1,\lambda_2)}{F'_{\lambda_2}(\lambda_1,\lambda_2)}, \tag{5}$$

$$w(\lambda_1^{(\nu)})=\lambda_2^{(\nu)}, \tag{6}$$

находим ν-ю компоненту непрерывного спектра оператора $A_M(\lambda_1,\lambda_2)$.

4. Отметим основные этапы применения предложенного подхода к численному решению нелинейной двумерной спектральной задачи.

— Вначале, полагая $\lambda_2=\lambda_1$, рассматриваем соответствующую (1) одномерную спектральную задачу $\widetilde{A}(\lambda_1)x=0$, которая в случае бесконечномерного пространства E путем соответствующей аппроксимации ([4], с. 101) может быть сведена к нахождению собственных значений n-мерной матрицы, коэффициенты которой аналитически зависят от параметра λ_1. Эта задача в свою очередь с использованием уравнения $\det(T_M(\lambda_1)-I_M)=0$ может быть сведена к нахождению корней полинома соответствующей степени. Найденному таким образом множеству корней $\lambda_1^{(\nu)}$ будет соответствовать множество собственных значений $\boldsymbol{\lambda}_\nu=(\lambda_1^{(\nu)},\lambda_2^{(\nu)})$ двумерной спектральной задачи.

— На основании теоремы о существовании неявной функции устанавливаем в окрестностях точек $\boldsymbol{\lambda}_\nu=(\lambda_1^{(\nu)},\lambda_2^{(\nu)})$ существование непрерывного спектра. В случае вещественных переменных λ_1, λ_2 это будут спектральные линии $w_\nu(\lambda_1)$. В случае комплексных λ_1, λ_2 функции $w_\nu(\lambda_1)$ будут описывать ν-е связные двумерные компоненты комплексного спектра в окрестности точек $\boldsymbol{\lambda}_\nu=(\lambda_1^{(\nu)},\lambda_2^{(\nu)})$.

— Для нахождения спектральных линий или компонент непрерывного комплексного спектра в окрестностях точек $\boldsymbol{\lambda}_\nu=(\lambda_1^{(\nu)},\lambda_2^{(\nu)})$ решаем задачу Коши (5), (6) численными методами.

Литература

1. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов* // УМН. – 1957. – Т. 12. – Вып. 2. – С. 43–118.
2. Трофимов В.П. *О корневых подпространствах операторов, аналитически зависящих от параметра* // Математические исследования. – Кишинев, 1968. – Т. 3. – Вып. 3. – С. 117–125.
3. Крейн С.Г., Трофимов В.П. *О нетеровых операторах, голоморфно зависящих от параметров* // Тр. матем. фак-та Воронежск. ун-та. – Воронеж, 1970. – С. 63–85.
4. Вайникко Г.М. *Анализ дискретизационных методов.* – Тарту, 1976. – 162 с.
5. Жук П.Ф. *Об асимптотических свойствах метода наискорейшего спуска в задачах на собственные значения* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1981. – Т. 21. – № 2. – С. 271–285.
6. Соловьев С.И. *Аппроксимация симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 10. – С. 60–68.
7. Абрамов А.А., Юхно Л.Ф. *Об одном методе отыскания наименьшего собственного значения нелинейной самосопряженной спектральной задачи* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38. – № 7. – С. 1095–1105.
8. Асланян М.А., Картышов С.В. *Модификация одного численного метода решения нелинейной спектральной задачи* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38. – № 5. – С. 713–717.
9. Савенко П.О. *Нелинейные задачи синтеза излучаемых систем* (*теория и методы решения*). – Львов: ИППММ НАН Украины, 2002. – 320 с.
10. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике.* – М.: Наука, 1970. – 512 с.
11. Смирнов В.И. *Курс высшей математики.* Т. 1. – М.: Наука, 1965. – 450 с.
12. Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 527 с.
13. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. *Матрицы и вычисления.* – М.: Наука, 1984. – 320 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики
им. Я.С. Подстригача НАН Украины

Поступила
02.08.2006