ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 1 (452)

УДК 517.984.6 : 517.929

Л.Ф. РАХМАТУЛЛИНА

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА ИЗОТОННОГО ОПЕРАТОРА

Для изотонного интегрального вполне непрерывного оператора

$$(Ax)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b K(t,s)x(s)ds \quad (K(t,s) \geq 0, (t,s) \in [a,b] \times [a,b])$$

в пространстве $C[a,b]$ непрерывных на $[a,b]$ функций справедливо утверждение: спектральный радиус $\rho(A)$ оператора A меньше единицы тогда и только тогда, когда выполнено условие A: существует такая непрерывная функция v, что

$$v(t) \geq 0, \quad r(t) \stackrel{\text{def}}{=} v(t) - (Av)(t) \geq 0, \quad t \in [a,b],$$

причем множество нулей невязки r не более чем счетно. Это утверждение играет существенную роль в теории линейных дифференциальных уравнений. В теории функционально-дифференциальных уравнений возникает потребность в установлении оценки $\rho(A) < 1$ для изотонного оператора $A : C[a,b] \to C[a,b]$, который не является интегральным ([1], с. 133). Приведенное выше утверждение является частным случаем теоремы Г.Г. Исламова [2], [3], согласно которой для изотонного слабо компактного оператора $A : C[a,b] \to C[a,b]$ неравенство $\rho(A) < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда выполняется условие A, причем $r(t) > 0$ в специальных точках отрезка $[a,b]$, называемых "существенными точками". Ослабить условие о нулях невязки r и отказаться от требования слабой компактности удается за счет специальных свойств оператора [4]. Ниже предлагается дальнейшее развитие идей работы [4].

Пусть $T \subset R^1$ — измеримое по Лебегу множество, $\operatorname{mes} T \leq +\infty$. Через C обозначим банахово пространство ограниченных непрерывных функций $x : T \to R^1$ с нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{t \in T} |x(t)|$. Пусть $\gamma : T \to R^1$ — непрерывная функция, $\gamma(t) > 0$, $t \in T$; C^γ — банахово пространство таких непрерывных функций $x : T \to R^1$, что

$$\frac{x}{\gamma} \in C; \quad \|x\|_{C^\gamma} = \sup_{t \in T} \frac{|x(t)|}{\gamma(t)}.$$

Через L_∞ обозначим банахово пространство измеримых ограниченных в существенном функций $x : T \to R^1$, $\|x\|_{L_\infty} = \operatorname{vrai}\sup\limits_{t \in T} |x(t)|$. Если $\gamma : T \to R^1$ — измеримая функция, $\gamma(t) > 0$ почти всюду на T, то L_∞^γ — банахово пространство таких измеримых функций $x : T \to R^1$, что $\frac{x}{\gamma} \in L_\infty$, $\|x\|_{L_\infty^\gamma} = \operatorname{vrai}\sup\limits_{t \in T} \frac{|x(t)|}{\gamma(t)}$.

В пространствах C^γ и L_∞^γ естественным образом вводится полуупорядоченность. А именно, для $x \in C^\gamma$ полагают $x > 0$, если $x(t) \geq 0$ для любого $t \in T$ и $x(t) \not\equiv 0$ на T; $x = 0$, если $x(t) \equiv 0$ на T; $x_1 < x_2$, если $x_2 - x_1 > 0$. Аналогично для L_∞^γ: $x > 0$, если $x(t) \geq 0$ почти всюду на T и

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-15-96195, № 99-01-01278) и Конкурсного центра по исследованиям в области фундаментального естествознания, Санкт-Петербург.

$x(t) > 0$ на множестве положительной меры; $x = 0$, если $x(t) = 0$ почти всюду на T; $x_1 < x_2$, если $x_2 - x_1 > 0$.

Ниже символом B^γ будем обозначать одно из пространств C^γ и L_∞^γ. При этом в формулировках и доказательствах утверждений в случае пространства C^γ символы "vrai sup" и "vrai inf" заменяются на эквивалентные им символы "sup" и "inf". Естественно, что в некоторых случаях доказательства упрощаются.

Определение. Линейный оператор $A : B^\gamma \to B^\gamma$ называется изотонным, если для любого $x \in B^\gamma$ из $x > 0$ следует $Ax \geq 0$. Отсюда $Ax_1 \leq Ax_2$, если $x_1 < x_2$.

Ниже будет использована норма в пространстве B^γ, отличная от нормы $\|\cdot\|_{B^\gamma}$, но эквивалентная ей. А именно, пусть $v \in B^\gamma$, $\operatorname*{vrai\,inf}\limits_{t\in T} \frac{v(t)}{\gamma(t)} > 0$. Положим $\|x\|_v = \operatorname*{vrai\,sup}\limits_{t\in T} \frac{|x(t)|}{v(t)}$ и обозначим через $\|A\|_v$ норму оператора $A : B^\gamma \to B^\gamma$, соответствующую норме $\|\cdot\|_v$.

Утверждение. *Пусть $A : B^\gamma \to B^\gamma$ — линейный ограниченный изотонный оператор. Тогда* $\|A\|_v = \|Av\|_v$.

Доказательство. Имеем $\|Av\|_v \leq \|A\|_v\|v\|_v = \|A\|_v$. Пусть $\|x\|_v = 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $U \subset T$, $\operatorname{mes} U = 0$, что $\frac{|x(t)|}{v(t)} < 1 + \varepsilon$ для $t \in T \setminus U$. Следовательно, для $\|x\|_v = 1$ $|(Ax)(t)| \leq (1+\varepsilon)(Av)(t)$ почти всюду на T. Отсюда

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T} \frac{|(Ax)(t)|}{v(t)} \leq (1+\varepsilon) \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T} \frac{(Av)(t)}{v(t)},$$
$$\|A\|_v = \sup_{\|x\|_v=1} \|Ax\|_v = \sup_{\|x\|_v=1} \left\{ \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T} \frac{|(Ax)(t)|}{v(t)} \right\} \leq (1+\varepsilon)\|Av\|_v.$$

Ввиду произвольности ε $\|A\|_v \leq \|Av\|_v$. $\square$

Лемма. *Пусть $A : B^\gamma \to B^\gamma$ — линейный ограниченный изотонный оператор. Неравенство $\rho(A) < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда существует такой элемент $v \in B^\gamma$, что*

$$v > 0, \quad \beta = \operatorname*{vrai\,inf}_{t\in T} \frac{v(t) - (Av)(t)}{\gamma(t)} > 0.$$

Отметим, что при $T = [a,b]$, $\gamma(t) \equiv 1$ это утверждение хорошо известно.

Доказательство. Необходимость. В качестве v можно взять решение уравнения $x - Ax = \gamma$. Тогда $v = \gamma + A\gamma + A^2\gamma + \ldots$, $v > 0$, $\frac{1}{\gamma(t)}[v(t) - (Av)(t)] = 1$ почти всюду на T.

Достаточность. Воспользуемся нормой $\|\cdot\|_v$. Имеем

$$\|A\|_v = \|Av\|_v = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T} \frac{(Av)(t)}{v(t)}.$$

Зафиксируем произвольно β_1, $0 < \beta_1 < \beta$, и выберем такое множество $U \subset T$, $\operatorname{mes} U = 0$, что $\frac{1}{\gamma(t)}(v(t) - (Av)(t)) > \beta_1$ для $t \in T \setminus U$ и $\sup\limits_{t\in T\setminus U} \frac{v(t)}{\gamma(t)} < \infty$. Тогда $\frac{(Av)(t)}{v(t)} < 1 - \frac{\beta_1}{\frac{v(t)}{\gamma(t)}}$ для $t \in T \setminus U$. Отсюда

$$\|Av\|_v \leq \sup_{t\in T\setminus U} \frac{(Av)(t)}{v(t)} \leq 1 - \frac{\beta_1}{\sup\limits_{t\in T\setminus U} \frac{v(t)}{\gamma(t)}} < 1.$$

Следовательно, $\rho(A) < 1$. $\square$

Требования относительно v и $r = v - Av$ можно ослабить за счет дополнительных ограничений на оператор A. Одним из таких ограничений (естественных при рассмотрении ряда краевых задач) является свойство $\mathcal{M}$.

Будем говорить, что линейный оператор $A : B^\gamma \to B^\gamma$ обладает *свойством* $\mathcal{M}$, если

$$\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in T} \frac{(Ax)(t)}{\gamma(t)} > 0$$

для любого $x \in B^\gamma$, $x > 0$.

Теорема 1. *Пусть линейный ограниченный оператор* $A : B^\gamma \to B^\gamma$ *обладает свойством* $\mathcal{M}$. *Если существует такой элемент* $v \in B^\gamma$, *что* $v > 0$, $r \stackrel{\text{def}}{=} v - Av > 0$, *то* $\rho(A) < 1$.

Доказательство. Если $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in T} \frac{r(t)}{\gamma(t)} > 0$, то $\rho(A) < 1$ в силу леммы.

Пусть $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in T} \frac{r(t)}{\gamma(t)} = 0$. Применяя оператор A к обеим частям равенства $v - Av = r$, получим $Av - A^2v = Ar$. Отсюда и из неравенства $v - Av > 0$ имеем

$$r_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} v(t) - (A^2v)(t) \geq (Ar)(t)$$

почти всюду на T. Поэтому

$$\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in T} \frac{r_1(t)}{\gamma(t)} \geq \operatorname*{vrai\,inf}_{t\in T} \frac{(Ar)(t)}{\gamma(t)} > 0.$$

В силу леммы $\rho(A^2) < 1$, отсюда $\rho(A) < 1$. $\square$

Будем говорить, что линейный оператор $A : B^\gamma \to B^\gamma$ обладает *свойством* $\mathcal{N}$, если существует такое измеримое множество $\Delta \subset T$ и такой элемент $\varphi \in B^\gamma$, что

$$\varphi > 0, \quad \operatorname*{vrai\,inf}_{t\in\Delta} \frac{\varphi(t) - (A\varphi)(t)}{\gamma(t)} > 0.$$

Теорема 2. *Пусть линейный ограниченный изотонный оператор* $A : B^\gamma \to B^\gamma$ *обладает свойством* $\mathcal{N}$. *Если существует такой элемент* $v \in B^\gamma$, *что* $v>0$, $r \stackrel{\text{def}}{=} v - Av>0$, $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in T\setminus\Delta} \frac{r(t)}{\gamma(t)}>0$, *то* $\rho(A) < 1$.

Доказательство. Если $\operatorname{mes}(T \setminus \Delta) = 0$, то выполнено условие леммы.

Пусть $\operatorname{mes}(T \setminus \Delta) > 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ $v_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} v + \varepsilon\varphi > 0$. Положим $r_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} v_\varepsilon - Av_\varepsilon = r + \varepsilon\psi$, где $\psi = \varphi - A\varphi$. В силу свойства $\mathcal{N}$

$$\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in\Delta} \frac{r_\varepsilon(t)}{\gamma(t)} > 0. \tag{1}$$

Обозначим $\omega^+ = \{t \in T \setminus \Delta : \psi(t) \geq 0\}$, $\omega^- = \{t \in T \setminus \Delta : \psi(t) < 0\}$ (ω^+ и ω^- определяются с точностью до множества нулевой меры).

Пусть $\operatorname{mes}\omega^+ > 0$. Так как при $t \in \omega^+$ $r_\varepsilon(t) \geq r(t)$, то

$$\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in\omega^+} \frac{r_\varepsilon(t)}{\gamma(t)} > 0 \tag{2}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Если $\operatorname{mes}\omega^- = 0$, то отсюда с учетом (1) $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in T} \frac{r_\varepsilon(t)}{\gamma(t)} > 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Если $\operatorname{mes}\omega^- > 0$ и $m_1 = \operatorname*{vrai\,inf}_{t\in\omega^-} \frac{\psi(t)}{\gamma(t)}$, $m_2 = \operatorname*{vrai\,inf}_{t\in\omega^-} \frac{r(t)}{\gamma(t)}$, то для $\varepsilon \in (0, -m_2/m_1)$ $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in\omega^-} \frac{r_\varepsilon(t)}{\gamma(t)} \geq m_2 + \varepsilon m_1 > 0$ и с учетом (1) и (2) $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in T} \frac{r_\varepsilon(t)}{\gamma(t)} > 0$. Если $\operatorname{mes}\omega^+ = 0$, то $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in T\setminus\Delta} \frac{r_\varepsilon(t)}{\gamma(t)} = \operatorname*{vrai\,inf}_{t\in\omega^-} \frac{r_\varepsilon(t)}{\gamma(t)} > 0$ для $\varepsilon \in (0, -m_2/m_1)$. Отсюда и из (1) $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in T} \frac{r_\varepsilon(t)}{\gamma(t)} > 0$.

Таким образом, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ v_ε удовлетворяет условиям леммы. Следовательно, $\rho(A) < 1$. $\square$

Будем говорить, что линейный оператор $A : B^\gamma \to B^\gamma$ обладает *свойством* $\mathcal{MN}$, если он обладает свойством $\mathcal{N}$ и $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in T\setminus\Delta} \frac{(Ax)(t)}{\gamma(t)} > 0$ для любого $x \in B^\gamma$, $x > 0$.

Теорема 3. *Пусть линейный ограниченный изотонный оператор* $A : B^\gamma \to B^\gamma$ *обладает свойством* $\mathcal{MN}$, *причем* $\varphi - A\varphi > 0$. *Если существует такой элемент* $v \in B^\gamma$, *что* $v > 0$, $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in T\setminus\Delta} \frac{v(t)}{\gamma(t)} > 0$; $r \stackrel{\text{def}}{=} v - Av > 0$, *то* $\rho(A) < 1$.

Доказательство. Если $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in T} \frac{r(t)}{\gamma(t)} > 0$, то $\rho(A) < 1$ в силу теоремы 2. В противном случае, повторяя схему доказательства теоремы 1 с заменой T на $T \setminus \Delta$, в силу теоремы 2 получим $\rho(A^2) < 1$. Следовательно, $\rho(A) < 1$. $\square$

Замечание 1. В силу леммы условия теорем 1, 2 и 3 относительно v и r необходимы для выполнения неравенства $\rho(A) < 1$.

Если T — замкнутое ограниченное множество, то в случае пространства C^γ можно положить $\gamma(t) \equiv 1$.

Следствие из теоремы 2 [4]. Пусть $T = [a, b]$ и для линейного ограниченного изотонного оператора $A : C[a, b] \to C[a, b]$ выполнено условие: существуют такие $t_1, \ldots, t_k \in [a, b]$, что $(Ax)(t_i) = 0$, $i = 1, \ldots, k$, для любого $x \in C[a, b]$. Справедливо соотношение $\rho(A) < 1$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $v \in C[a, b]$, что $v(t) > 0$ и $r(t) > 0$ при $t \in [a, b] \setminus \{t_1, \ldots, t_k\}$.

В условиях следствия оператор A обладает свойством $\mathcal{N}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять в качестве Δ объединение таких окрестностей точек $t_1, \ldots, t_k$, что для $\varphi(t) \equiv 1$ $(A\varphi)(t) \le q < 1$, $t \in \Delta$.

Замечание 2. Если удовлетворяющий условиям следствия оператор A слабо компактен, то утверждение может быть получено на основе теоремы Г.Г. Исламова [3].

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered}(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} t(1-t)\ddot{x}(t) - \int_0^1 x(s)\, d_s R(t,s) = f(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = x(1) = 0\end{gathered} \tag{3}$$

в предположениях: $R(t, \cdot)$ при почти каждом $t \in [0, 1]$ не возрастает на $[0, 1]$; $R(\cdot, s)$ при каждом $s \in [0, 1]$ и $f(\cdot)$ суммируемы на $[0, 1]$. Следуя [5], [6], решением уравнения $(\mathcal{L}x)(t) = f(t)$ называем удовлетворяющую ему почти всюду на $[0, 1]$ функцию $x : [0, 1] \to R^1$, которая обладает свойствами

1) $x(t)$ непрерывна на $[0, 1]$;
2) производная $\dot{x}(t)$ абсолютно непрерывна на каждом замкнутом отрезке, содержащемся в интервале $(0, 1)$;
3) произведение $t(1 - t)\ddot{x}(t)$ суммируемо на $[0, 1]$.

Линейное пространство функций, удовлетворяющих условиям 1)–3), обозначим через D.

Краевая задача

$$t(1-t)\ddot{x}(t) = z(t), \quad x(0) = x(1) = 0$$

для любой суммируемой функции z имеет единственное решение $x \in D$ [6]

$$x(t) = \int_0^1 W(t,s) z(s)\, ds,$$

где

$$W(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{1-t}{1-s}, & 0 \le s \le t \le 1; \\ -\dfrac{t}{s}, & 0 \le t < s \le 1. \end{cases}$$

Определим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$ равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 W(t,s) \int_0^1 x(\tau)\, d_\tau R(s,\tau)\, ds$$

и обозначим $g(t) = \int\limits_0^1 W(t,s) f(s)\, ds$. Задача (3) эквивалентна уравнению

$$x = Ax + g$$

в пространстве $C[0,1]$. Это следует из того, что $g \in D$ и $Ax \in D$ для любого $x \in C[0,1]$. Таким образом, неравенство $\rho(A) < 1$ гарантирует однозначную разрешимость задачи (3) для любой суммируемой f.

Для оценки спектрального радиуса оператора A воспользуемся сначала оценкой его нормы без предположения о монотонности $R(\cdot,\cdot)$ по второму аргументу при условии, что $R(s) = \operatorname*{var}_{\tau\in[0,1]} R(s,\tau)$ суммируема на $[0,1]$. Так как

$$\|A\| \le \max_{t\in[0,1]} \Big\{ -\int_0^1 W(t,s) R(s)\, ds \Big\},$$

то $\rho(A) \le \|A\| < 1$, если

$$(1-t)\int_0^t \frac{R(s)}{1-s}\, ds + t\int_t^1 \frac{R(s)}{s}\, ds < 1, \quad t \in [0,1]. \tag{4}$$

Это условие однозначной разрешимости задачи (3) получено в [6] в предположении, что $R(t,\cdot)$ не возрастает на $[0,1]$.

В предположении о невозрастании $R(t,\cdot)$ оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$ изотонный, причем $(Ax)(0) = (Ax)(1) = 0$ для любого $x \in C[0,1]$. Воспользуемся теперь следствием из теоремы 2. Положим

$$v(t) = -(1-t)\ln(1-t) - t\ln t = -\int_0^1 W(t,s)\, ds, \quad t \in [0,1]$$

(считаем $t\ln t|_{t=0} = 0$). Тогда

$$r(t) = -\int_0^1 W(t,s) \Big\{ 1 + \int_0^1 v(\tau) d_\tau R(s,\tau) \Big\}\, ds.$$

Таким образом, если почти всюду на $[0,1]$

$$-\int_0^1 [(1-\tau)\ln(1-\tau) + \tau\ln\tau] d_\tau R(t,\tau) \le 1, \tag{5}$$

причем на множестве положительной меры неравенство строгое, то $r(t) > 0$, $t \in (0,1)$, и, следовательно, $\rho(A) < 1$.

Решение задачи (3) имеет представление [6]

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s)\, ds,$$

где $G(t,s)$ — функция Грина этой задачи. Из равенства

$$\int_0^1 G(t,s) f(s)\, ds = g(t) + (Ag)(t) + (A^2 g)(t) + \cdots$$

следует, что решение задачи (3) не принимает положительных значений, если $f(t) \ge 0$. Таким образом, каждое из неравенств (4) и (5) гарантирует неравенство $G(t,s) \le 0$ в квадрате $[0,1] \times [0,1]$.

В случае уравнения с сосредоточенным отклонением аргумента

$$t(1-t)\ddot{x}(t) - p(t)x[h(t)] = f(t), \quad t \in [0,1],$$
$$x(\xi) = 0, \ \text{ если } \ \xi \notin [0,1],$$

в предположениях, что h измерима, p, f суммируемы на $[0,1]$, $p(t) \le 0$, неравенства (4) и (5) принимают вид соответственно

$$-(1-t)\int_0^t \frac{p(s)\sigma(s)}{1-s}\,ds - t\int_t^1 \frac{p(s)\sigma(s)}{s}\,ds < 1, \tag{6}$$

где $\sigma(t)$ — характеристическая функция множества $\omega = \{t \in [0,1] : h(t) \in [0,1]\}$,

$$\sigma(t)p(t)\{(1-h(t))\ln(1-h(t)) + h(t)\ln h(t)\} \le 1 \tag{7}$$

почти всюду на $[0,1]$, причем, если $\operatorname{mes}\{[0,1] \setminus \omega\} = 0$, то неравенство строгое на множестве положительной меры. В последнем неравенстве в случае $h(t) \notin [0,1]$ функцию в фигурных скобках можно считать определенной произвольно.

В некоторых случаях условие (7) оказывается менее ограничительным, чем (6). Так, для $p(t) = \text{const}$, $h(t) = \theta t$, $0 < \theta < 1/2$, условие (7) дает неравенство

$$-p < \frac{1}{\max\limits_{t\in[0,1]} v(\theta t)}.$$

Из (6) получаем

$$-p < \frac{1}{\max\limits_{t\in[0,1]} v(t)} = 1/\ln 2 < \frac{1}{\max\limits_{t\in[0,1]} v(\theta t)}.$$

Условия (5) и (7) однозначной разрешимости задачи (3) уточняют условия, полученные для уравнения второго порядка в [6].

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered}(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x}(t) - p(t)\{\dot{x}[h(t)] + x[h(t)]\} = f(t), \quad t \in [a,b],\\ x(\xi) = \dot{x}(\xi) = 0, \ \text{ если } \ \xi \notin [a,b]\\ x(a) = \dot{x}(b) = 0\end{gathered} \tag{8}$$

в предположениях: f суммируема, h измерима на $[a,b]$, $p \in L_\infty$, $p\sigma > 0$, где $\sigma(t)$ — характеристическая функция множества $\omega = \{t \in [a,b] : h(t) \in [a,b]\}$. Решением уравнения $(\mathcal{L}x)(t) = f(t)$ называется функция $x : [a,b] \to R^1$, имеющая абсолютно непрерывную производную $\dot{x}(t)$ и удовлетворяющая этому уравнению почти всюду на $[a,b]$.

Подстановка $x(t) = \int\limits_a^b W(t,s)z(s)\,ds$, где

$$W(t,s) = \begin{cases}(t-s)-(t-a), & a \le s \le t \le b;\\ -(t-a), & a \le t < s \le b,\end{cases}$$

— функция Грина задачи $\ddot{x}(t) = z(t)$, $x(a) = \dot{x}(b) = 0$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством решений x задачи (8) и множеством решений z уравнения

$$z(t) = p(t)\sigma(t)\int_a^b K(t,s)z(s)\,ds + f(t). \tag{9}$$

Здесь

$$K(t,s)=\begin{cases} s-a, & a\le s\le h(t)\le b,\\ 1+h(t)-a, & a\le h(t)<s\le b,\\ 0 & \text{в остальных точках.}\end{cases}$$

Отметим, что наличие первой производной в уравнении не позволяет эффективно свести задачу (8) к эквивалентному ей уравнению в пространстве $C[a,b]$.

Обозначим

$$(Az)(t)=p(t)\sigma(t)\int_a^b K(t,s)z(s)\,ds. \tag{10}$$

Рассмотрим сначала оператор A, определяемый равенством (10), как оператор, действующий в пространстве L_∞. Оценивая норму этого оператора (без предположения о знаке p), получим $\|A\|<1$, если

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}|p(t)|\sigma(t)\int_a^b K(t,s)\,ds<1.$$

Для $t\in\omega$

$$\int_a^b K(t,s)\,ds=\frac{1}{2}(h(t)-a)^2+(1+h(t)-a)(b-h(t))\overset{\text{def}}{=}\psi(t).$$

Таким образом, неравенство

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}\{\sigma(t)|p(t)|[\tfrac{1}{2}(h(t)-a)^2+(b-h(t))(1+h(t)-a)]\}<1 \tag{11}$$

гарантирует оценку $\rho(A)\le\|A\|<1$.

Оператор A при $p(t)\ge 0$ изотонен. Воспользуемся теперь для оценки его спектрального радиуса теоремой 2. Положим $\varphi(t)\equiv 1$, тогда

$$(A\varphi)(t)=p(t)\sigma(t)\int_a^b K(t,s)\,ds=p(t)\sigma(t)\psi(t).$$

Если $t\in\omega$, то $\psi(t)>0$. Зафиксируем число q, $0<q<1$, и положим $\Delta=\{t\in[a,b]:0\le p(t)\sigma(t)\psi(t)\le q\}$.

Рассмотрим возможные случаи.

1) Пусть $0<\operatorname{mes}\Delta<b-a$. Тогда оператор A обладает свойством $\mathcal{N}$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in\Delta}\{p(t)\sigma(t)\psi(t)\}\le q.$$

Следовательно,

$$\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in\Delta}\{1-p(t)\sigma(t)\psi(t)\}\ge 1-q>0.$$

Положим $v(t)=p(t)\sigma(t)$. Тогда

$$r(t)=p(t)\sigma(t)\Big\{1-\int_a^b K(t,s)p(s)\sigma(s)\,ds\Big\}.$$

В силу выбора множества Δ

$$\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in[a,b]\setminus\Delta}\{p(t)\sigma(t)\}>0.$$

Так как $[a,b]\setminus\Delta\subset\omega$, то

$$\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in[a,b]\setminus\Delta}r(t)\ge\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in[a,b]\setminus\Delta}\{p(t)\sigma(t)\}\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in\omega}\Big\{1-\int_a^b K(t,s)p(s)\sigma(s)\,ds\Big\}.$$

Таким образом, если выполнено неравенство

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} \sigma(t)\bigg\{ \int_a^{h(t)} (s-a)p(s)\sigma(s)\,ds + (1+h(t)-a)\int_{h(t)}^b p(s)\sigma(s)\,ds \bigg\} < 1, \tag{12}$$

то $\rho(A) < 1$ в силу теоремы 2 (здесь $p(s)$ для $s \notin [a,b]$ следует считать доопределенной произвольно).

2) Если $\operatorname{mes}\Delta = 0$, то $p(t)\sigma(t)\psi(t) \geq q$ почти всюду на $[a,b]$. Следовательно, $\sigma(t) = 1$ почти всюду на $[a,b]$ и $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in[a,b]} p(t) > 0$. Положим $v(t) = p(t)$. Тогда

$$r(t) = p(t)\bigg\{ 1 - \int_a^b K(t,s)p(s)\,ds \bigg\}$$

и в силу леммы $\rho(A) < 1$, если

$$\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in[a,b]} \bigg\{ 1 - \int_a^b K(t,s)p(s)\,ds \bigg\} > 0,$$

т. е. если выполнено неравенство (12).

3) Если $\operatorname{mes}\Delta = b-a$, то $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}\{p(t)\sigma(t)\psi(t)\} \leq q$ и $\rho(A) < 1$ в силу (11).

Так как $L_\infty \subset L_1$, L_1 — пространство суммируемых на $[a,b]$ функций, и для $z \in L_\infty$

$$\|z\|_{L_1} = \int_a^b |z(t)|\,dt \leq (b-a)\|z\|_{L_\infty},$$

то спектральный радиус оператора A как оператора, действующего в пространстве суммируемых функций, также меньше единицы ([7], с. 75).

Итак, если выполнено неравенство (12), то $\rho(A) < 1$ и, следовательно, уравнение (9) и задача (8) однозначно разрешимы для любого $f \in L_1$. Решение z уравнения (9) имеет представление

$$z = f + Af + A^2 f + \cdots$$

Для решения x задачи (8) имеем

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)\,ds = \int_a^b W(t,s)z(s)\,ds.$$

Таким образом, если $f > 0$, то $x < 0$ и, следовательно, для функции Грина $G(t,s)$ задачи (8) выполняется неравенство $G(t,s) \leq 0$ в квадрате $[a,b]\times[a,b]$.

Пример 3. Задача Коши

$$\dot{x}(t) - \frac{2t}{t^2+1}x(t) = z(t), \quad t \in T = [0,\infty), \quad x(0) = 0$$

для каждого $x \in L_\infty$ имеет единственное решение

$$x(t) = (t^2+1)\int_0^t \frac{z(s)}{s^2+1}\,ds,$$

принадлежащее пространству C^γ, где $\gamma(t) = t^2+1$. Сформулируем условия, при которых задача Коши для уравнения с отклоняющимся аргументом

$$\dot{x}(t) - \frac{2t}{t^2+1}x(t) - p(t)x_h(t) = f(t), \quad t \in T, \quad x(0) = 0 \tag{13}$$

также имеет единственное принадлежащее пространству C^γ решение для любого $f \in L_\infty$. Здесь $h : [0,\infty) \to R^1$ — измеримая ограниченная в существенном на каждом конечном промежутке функция; $p(t)\sigma(t) \geq 0$, $t \in [0,\infty)$, $\sigma(t)$ — характеристическая функция множества $\{t \in [0,\infty) : h(t) \geq 0\}$;

$$x_h(t) = \begin{cases} x[h(t)], & \text{если } \ h(t) \geq 0; \\ 0, & \text{если } \ h(t) < 0. \end{cases}$$

Задача (13) эквивалентна уравнению $x = Ax + g$, где

$$(Ax)(t) = (t^2+1)\int_0^t \frac{p(s)}{s^2+1} x_h(s)\,ds, \quad g(t) = (t^2+1)\int_0^t \frac{f(s)}{s^2+1}\,ds.$$

Оператор A действует в пространстве C^γ и непрерывен, если

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\infty)} \frac{h^2(t)+1}{t^2+1}\sigma(t) = \nu < \infty \tag{14}$$

и

$$\int_0^\infty p(s)\sigma(s)\,ds < \infty. \tag{15}$$

При этом $\|A\| \leq \nu \int\limits_0^\infty p(s)\sigma(s)\,ds$. Отметим, что условие (14) выполняется, например, для функции $h(t) = kt^\alpha + \tau$, где $k, \tau, \alpha = \text{const}$, $k > 0$, $0 < \alpha \leq 1$.

Оператор $A : C^\gamma \to C^\gamma$ изотонен. Он обладает свойством $\mathcal{N}$. Действительно, для $\varphi(t) = t^2+1$ и $\Delta = [0,\delta]$, где $\delta > 0$ выбрано так, что $\int\limits_0^\delta p(s)\sigma(s)\,ds < \frac{1}{\nu}$, имеем

$$\min_{t\in[0,\delta]} \frac{\varphi(t) - (A\varphi)(t)}{t^2+1} \geq 1 - \nu\int_0^\delta p(s)\sigma(s)\,ds > 0.$$

Положим

$$v(t) = (t^2+1)\operatorname{arctg} t = (t^2+1)\int_0^t \frac{ds}{s^2+1}.$$

Имеем

$$\inf_{t\in(\delta,\infty)} \frac{v(t)}{t^2+1} = \operatorname{arctg}\delta > 0, \quad \frac{r(t)}{t^2+1} = \int_0^t \frac{1}{s^2+1}\{1 - p(s)\sigma(s)v[h(s)]\}\,ds.$$

Пусть почти всюду на $[0,\infty)$ выполнено неравенство

$$p(s)\sigma(s)[h^2(s)+1]\operatorname{arctg} h(s) \leq 1, \tag{16}$$

причем это неравенство строгое на множестве положительной меры, содержащемся в $[0,\delta]$. Тогда $\frac{r(t)}{t^2+1} \geq 0$, $t \in [0,\infty)$,

$$\inf_{t\in(\delta,\infty)} \frac{r(t)}{t^2+1} = \int_0^\delta \frac{1}{s^2+1}\{1 - p(s)\sigma(s)v[h(s)]\}\,ds > 0.$$

Итак, если выполнены (14)–(16), то $\rho(A) < 1$ в силу теоремы 2 и, следовательно, уравнение $x = Ax + g$ и задача (13) имеют единственное решение $x \in C^\gamma$ при любом $f \in L_\infty$.

Замечание 3. Оценка (16) иногда оказывается менее ограничительной, чем условие, получаемое на основе неравенства $\|A\| < 1$. Так, для $h(t) = t$ и

$$p(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ t \in [0,\varepsilon), \quad \varepsilon > 0; \\ \dfrac{1}{(t^2+1)\operatorname{arctg}\, t}, & \text{если } \ t \in [\varepsilon,\infty), \end{cases}$$

$$\|A\| = \int_0^\infty p(s)\,ds = \ln\frac{\pi}{2} - \ln\operatorname{arctg}\varepsilon$$

может быть сколько угодно большой.

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. Исламов Г.Г. *Об оценке спектрального радиуса линейного положительного вполне непрерывного оператора* // Функц.-дифференц. уравнения и краев. задачи матем. физ. – Пермь, 1978. – С. 119–122.
3. Исламов Г.Г. *Об оценке сверху спектрального радиуса* // Докл. РАН. – 1992. – Т. 322. – № 5. – С. 836–838.
4. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. *Об оценке спектрального радиуса линейного оператора в пространстве непрерывных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 11. – С. 23–28.
5. Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л. *Сингулярные краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем. – 1987. – Т. 30. – С. 105–201.
6. Лабовский С.М. *О положительных решениях двухточечной краевой задачи для линейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 10. – С. 1695–1704.
7. Красносельский М.А. , Вайникко Г.М., Забрейко П.П. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 455 с.

Пермский государственный технический университет

Поступила 03.03.1998