ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 1 (452)

УДК 511.361

П.Л. ИВАНКОВ

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПОСТОЯННЫХ, ВХОДЯЩИХ В ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

В работах [1], [2] получены точные по высоте оценки однородных линейных форм от значений функций вида
$$\psi(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}z^{\nu}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{p(x)}{q(x)}$$
и их производных ($p(x)$, $q(x)$ – многочлены). В указанных работах предполагается, что $p(x)\equiv 1$. От последнего ограничения в некоторых случаях можно отказаться.

Пусть
$$A(z)=A_{\beta,\alpha}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}z^{\nu}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{x+\alpha}{x(x+\beta)},$$
где α — положительное рациональное число, причем числа α и 2α не являются целыми; $\beta=2\alpha+1$. Пусть, далее, $a\in\mathbb{N}$, $a\alpha\in\mathbb{N}$, b — отличное от нуля целое число из некоторого мнимого квадратичного поля $\mathbb{I}$;
$$A_1(z)=A(z),\quad A_2(z)=zA'(z);$$
$$\xi_1=A_1\Bigl(\frac{1}{a^3b}\Bigr),\quad \xi_2=A_2\Bigl(\frac{1}{a^3b}\Bigr);$$
$$C_1=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)}2^{-\beta-1/2}\Bigl|\exp\frac{1}{2a^3b}\Bigr|; \tag{1}$$
$$C_2=\Gamma(\alpha+1)2^{\beta-1/2}\Bigl|\exp\frac{1}{2a^3b}\Bigr|\max_{j=1,2}\biggl(\Bigl(\frac{\alpha+1}{a^3|b|}\Bigr)^{2-j}\frac{|A_{\beta+2-j,\,\alpha}\,(-\frac{1}{a^3b})|}{\Gamma(\beta+3-j)}\biggr);C=C_1C_2.$$

Теорема. *Неравенство*
$$\begin{gathered}|h_1\xi_1+h_2\xi_2|<C(H\ln H)^{-1}\ln\ln H,\\ H=\max(|h_1|,|h_2|),\end{gathered} \tag{2}$$
имеет бесконечно много решений в целых числах h_1, h_2 из поля $\mathbb{I}$, а неравенство, получающееся из (2) заменой C на $C-\varepsilon$, при любом положительном ε может иметь лишь конечное число таких решений.

Пусть n — натуральное число; рассмотрим при $l,j=1,2$ многочлены
$$P_{lj}(z)=\sum_{s=0}^{n}p_{ljs}z^s, \tag{3}$$
где
$$p_{ljs}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_s}\frac{K_{js}(\zeta)\prod\limits_{x=0}^{2n+l-2}(\zeta-x)}{\chi_{j+1}(\zeta-s)}\,\frac{d\zeta}{\prod\limits_{x=0}^{s-1}(\zeta-x)(\zeta+\beta-x)\prod\limits_{x=1}^{n-s}(\zeta+\alpha-n+x)}. \tag{4}$$

В последнем выражении $K_{js}(\zeta)=\frac{\alpha+1}{\zeta+\alpha-s+1}$, если $j=1$, $1\le s\le n$, и $K_{js}(\zeta)\equiv 1$ во всех остальных случаях; $\chi_1(\zeta)\equiv 1$, $\chi_2(\zeta)=\zeta$, $\chi_3(\zeta)=\zeta(\zeta+\beta)$; γ_s есть объединение положительно ориентированных окружностей радиусов $\frac{1}{2a}$ с центрами в точках $-\beta+k$, $k=0,1,\ldots,s$.

Используя условие $\alpha-\beta\notin\mathbb{Z}$, нетрудно проверить, что в рассматриваемом случае из леммы 4 работы [3] следует, что при $l=1,2$

$$\sum_{j=1}^{2} P_{lj}(z)A_j(z)=R_l(z), \tag{5}$$

где

$$R_l(z)=\sum_{\nu=n}^{\infty} z^{\nu}\prod_{x=0}^{2n+l-2}(\nu-x)\prod_{x=1}^{\nu-n}(x+\alpha)\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{x(x+\beta)}. \tag{6}$$

Лемма 1. *Пусть*

$$V_{kl}=\frac{\Gamma(\beta-k+2n+l-1)e^n}{\Gamma(\beta-\alpha-k+n)2^{2n}n^{n+\alpha+l-1}},$$

где k — неотрицательное целое число, не превосходящее n. Тогда при $n\to\infty$

$$V_{kl}=O(1), \tag{7}$$

если $0\le k\le n$;

$$V_{kl}=2^{-k+\beta+l-3/2}\Big(1+\frac{1}{n}e^{O(k+1)}\Big), \tag{8}$$

если $0\le k\le n/2$. Постоянные в символах O зависят только от α и β.

Доказательство. Заметим, что все числа V_{kl} положительны, и при $k\le n-1$ выполняется неравенство

$$\frac{V_{kl}}{V_{k+1,\,l}}=\frac{\beta-k+2n+l-2}{\beta-\alpha-k+n-1}>1.$$

Таким образом, V_{kl} при фиксированном l достигает максимального значения при $k=0$. С помощью формулы Стирлинга легко проверить, что $V_{0l}\to 2^{\beta+l-3/2}$ при $n\to\infty$. Отсюда следует (7). Чтобы доказать (8), заметим сначала, что при $0\le k\le n/2$ выполняются равенства

$$\Big(1+\frac{\beta-k+l-1}{2n}\Big)^{\beta-k+2n+l-3/2}=e^{\beta-k+l-1}\Big(1+\frac{(k+1)^2}{n}e^{O(k+1)}\Big),$$
$$\Big(1+\frac{\beta-k-\alpha}{n}\Big)^{-\beta+\alpha+k-n+1/2}=e^{-\beta+\alpha+k}\Big(1+\frac{(k+1)^2}{n}e^{O(k+1)}\Big).$$

С помощью этих равенств и формулы Стирлинга получаем

$$V_{kl}=2^{-k+\beta+l-3/2}e^{-\alpha-l+1}\Big(1+\frac{\beta-k+l-1}{2n}\Big)^{\beta-k+2n+l-3/2}\Big(1+\frac{\beta-\alpha-k}{n}\Big)^{-\beta+\alpha+k-n+1/2}\times$$
$$\times\Big(1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)=2^{-k+\beta+l-3/2}\Big(1+\frac{1}{n}e^{O(k+1)}\Big). \quad \square$$

Лемма 2. *Если $zA_{\beta+2-j,\,\beta-\alpha-1}(-z)\ne 0$, то при $n\to\infty$*

$$P_{lj}(z)=(-1)^{n+l-j}(\alpha+1)^{2-j}\frac{\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+3-j)}2^{2n+\beta+l-3/2}\times$$
$$\times\, n^{n+\alpha+l-1}e^{z/2-n}z^{2-j}A_{\beta+2-j,\,\beta-\alpha-1}(-z)\Big(1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big); \tag{9}$$

если $z \neq 0$, то при $n \to \infty$

$$R_l(z) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)} 2^{-\beta-l+1/2-2n} n^{\alpha-\beta-n} e^{n+z/2} z^{2n+l-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{10}$$

где постоянные в символе O в обоих случаях зависят только от α, β, z.

Доказательство. Пусть $j=1$. Легко видеть, что $p_{l10}=0$. Преобразовав интегралы и применив теорему о вычетах, получим

$$P_{l1}(z) = (-1)^{n+l-1}(\alpha+1)\sum_{s=1}^{n}\frac{z^s}{2\pi i}\int_{\gamma_s}\frac{\prod_{x=0}^{2n+l-2}(-\zeta+x)}{\prod_{x=0}^{n-1}(-\zeta-\alpha+x)}\frac{\prod_{x=0}^{s-2}(-\zeta-\alpha+x)}{\prod_{x=0}^{s}(-\zeta+x)\prod_{x=0}^{s-1}(\zeta+\beta-x)}d\zeta =$$

$$(-1)^{n+l-1}(\alpha+1)\sum_{s=1}^{n} z^s \sum_{k=0}^{s-1}\frac{\Gamma(\beta-k+2n+l-1)\Gamma(\beta-\alpha-k+s-1)}{\Gamma(\beta-\alpha-k+n)\Gamma(\beta-k+s+1)}\frac{(-1)^{s-k-1}}{k!(s-k-1)!} =$$

$$(-1)^{n+l-1}(\alpha+1)2^{2n}e^{-n}n^{n+\alpha+l-1}\sum_{s=1}^{n} z^s \sum_{k=0}^{s-1} V_{kl}\frac{\Gamma(\beta-\alpha-k+s-1)}{\Gamma(\beta-k+s+1)}\frac{(-1)^{s-k-1}}{k!(s-k-1)!},$$

где V_{kl} определены в лемме 1. Преобразуем двойную сумму, входящую в последнее выражение: разобьем ее на две суммы, отвечающие изменению s на промежутках $1 \le s \le n/2$ и $n/2 < s \le n$. В первой из получившихся сумм заменим V_{kl} на правую часть равенства (8); вторая сумма в силу (7) будет величиной порядка $O(1/n)$. К получившемуся выражению прибавим и затем вычтем из него сумму

$$\sum_{s=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{\infty} z^s \sum_{k=0}^{s-1} 2^{-k+\beta+l-3/2}\frac{\Gamma(\beta-\alpha-k+s-1)}{\Gamma(\beta-k+s+1)}\frac{(-1)^{s-k-1}}{k!(s-k-1)!},$$

являющуюся, очевидно, величиной порядка $O(1/n)$. В результате получим

$$P_{l1}(z) = (-1)^{n+l-1}(\alpha+1)2^{\beta+l+2n-3/2}n^{n+\alpha+l-1}e^{-n} \times$$
$$\times\left(\sum_{s=1}^{\infty} z^s \sum_{k=0}^{s-1} 2^{-k}\frac{\Gamma(\beta-\alpha-k+s-1)(-1)^{s-k-1}}{\Gamma(\beta-k+s+1)k!(s-k-1)!} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{11}$$

Перемножив разложения по степеням z функций $e^{z/2}$ и $A_{\beta+1,\,\beta-\alpha-1}(-z)$, легко убедиться, что двойная сумма, входящая в правую часть равенства (11), равна

$$\frac{\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+2)} z e^{z/2} A_{\beta+1,\,\beta-\alpha-1}(-z).$$

Так как последнее число по предположению отлично от нуля, то при $j=1$ равенство (9) справедливо; аналогично доказывается его справедливость и при $j=2$.

Чтобы доказать, что при $n \to \infty$

$$R_l(z) \sim \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)} 2^{-\beta-l+1/2-2n} n^{\alpha-\beta-n} e^{n+z/2} z^{2n+l-1},$$

достаточно заметить, что

$$R_l(z) = z^{2n+l-1}\prod_{x=1}^{2n+l-1}\frac{1}{\beta+x}\prod_{x=1}^{n+l-1}(\alpha+x)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{\alpha+n+l-1+x}{\beta+2n+l-1+x}$$

и что бесконечный ряд, входящий в правую часть этого равенства, допускает почленный переход к пределу при $n \to \infty$. После этого остается применить формулу Стирлинга. Для доказательства

(10) потребуются более сложные рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых было доказано равенство (9). Ввиду отсутствия здесь принципиально новых моментов эти рассуждения не приводятся. □

Лемма 3. *Если* $\beta = 2\alpha + 1$, *то*

$$\Delta(z) = |P_{lj}(z)|_{l,j=1,2} = \pm z^{2n}.$$

Доказательство. Из (5) и (6) следует, что $\Delta(z)$ есть z^{2n} с некоторым коэффициентом. Чтобы найти этот коэффициент, заметим, что из (4) вытекают равенства

$$p_{11n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{(\alpha+1)\prod\limits_{x=0}^{2n-1}(\zeta - x)d\zeta}{(\zeta+\alpha-n+1)\prod\limits_{x=0}^{n}(\zeta-x)\prod\limits_{x=0}^{n-1}(\zeta+\beta-x)} =$$

$$= \pm \left.\frac{(\alpha+1)\prod\limits_{x=0}^{2n-1}(\zeta-x)}{\prod\limits_{x=0}^{n}(\zeta-x)\prod\limits_{x=0}^{n-1}(\zeta+\beta-x)}\right|_{\zeta=-\alpha+n-1} = \pm 1,$$

если $\beta = 2\alpha + 1$;

$$p_{12n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{\prod\limits_{x=0}^{2n-1}(\zeta-x)}{\prod\limits_{x=0}^{n}(\zeta-x)(\zeta+\beta-x)} d\zeta = 0,$$

т. к. контур интегрирования охватывает все полюсы подинтегральной функции, и степень числителя на две единицы больше степени знаменателя;

$$p_{22n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{\prod\limits_{x=0}^{2n}(\zeta-x)}{\prod\limits_{x=0}^{n}(\zeta-x)(\zeta+\beta-x)} d\zeta = \pm 1.$$

Таким образом, искомый коэффициент при z^{2n}, равный произведению $p_{11n}p_{22n}$, действительно с точностью, быть может, до знака равен единице. □

Лемма 4. *Пусть* $a = q_1^{\mu_1}\dots q_t^{\mu_t}$ *— каноническое разложение числа* a *на простые множители,* m *— натуральное число,*

$$\nu_{im} = \left[\frac{m}{q_i}\right] + \left[\frac{m}{q_i^2}\right] + \cdots$$

Тогда при любом целом g *выполняется включение*

$$\frac{1}{m!}\prod_{x=1}^{m}(g+ax)\prod_{i=1}^{t} q_i^{\nu_{im}} \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство почти дословно совпадает с доказательством леммы 2.8 ([4], с. 149).

Лемма 5. *Если* $\beta = 2\alpha+1$, *то числа* $v_{ljs} = a^{3(n-s)+l-j}p_{ljs}$ *являются целыми рациональными* $(l, j = 1, 2;\ s = 0, 1, \dots, n)$; *при* $l = 1$ *все они делятся на* a, *за исключением числа* $v_{11n} = p_{11n} = \pm 1$.

Доказательство. Пусть $j = 1$, $0 < s \le n$ (при доказательстве леммы 2 уже отмечалось, что $p_{l10} = 0$). Через $f(\zeta)$ обозначим подинтегральную функцию из правой части равенства (4). По теореме о вычетах

$$p_{l1s} = -\sigma_{0s} - \sum_{k=1}^{n-s+1} \sigma_{ks},$$

где σ_{0s} — вычет функции $f(\zeta)$ относительно бесконечно удаленной точки, а σ_{ks} — вычеты этой функции относительно точек $\zeta_k = -\alpha + n - k$, $k = 1, \ldots, n-s+1$. Разложив $f(\zeta)$ в ряд Лорана в окрестности точки $\zeta = \infty$, нетрудно убедиться в том, что коэффициент при ζ^{-1} представляется в виде суммы нескольких слагаемых, каждое из которых есть произведение целых рациональных чисел и чисел α и β, причем последние входят в такое произведение в количестве, не превосходящем $n-s+l-1$. Так как $3(n-s)+l-1 \geq n-s+l-1$, то число $a^{3(n-s)+l-1}\sigma_{0s}$ является целым; при $s < n$ оно, очевидно, делится на a. Если $1 \leq k \leq n-s$, то после несложных преобразований, с учетом равенства $\beta = 2\alpha+1, \sigma_{ks}$ оно запишется в виде

$$\pm\frac{(\alpha+1)\prod\limits_{x=1}^{2k+l-3}(\alpha+n-k+1+x)\prod\limits_{x=1}^{2(n-k-s)+1}(\alpha-n+k+s+x)}{(k-1)!(n-s-k+1)!}.$$

Из леммы 4 следует, что это число станет целым после умножения на $a^{2(n-s)+l-1}\prod\limits_{i=1}^{t} q_i^{\nu_{i,n-s}}$. Так как $\nu_{i,n-s} \leq \mu_i(n-s)$, то число $\tau_{ks} = a^{3(n-s)+l-1}\sigma_{ks} \in \mathbb{Z}$. Проверим, что при $l=1$, $s<n$ и $1 \leq k \leq n-s$ число τ_{ks} делится на a. Если $s = n-1$, то $k=1$, $\sigma_{ks} = \sigma_{1,n-1} = \pm(\alpha+1)^2$, и число $\tau_{1,n-1} = \pm a^3(\alpha+1)^2$ делится на a. В остальных случаях достаточно проверить, что число $a^{n-s}\prod\limits_{i=1}^{t} q_i^{-\nu_{i,n-s}}$ делится на a. Пусть $1 \leq s \leq n-2$ и $q_i \geq 3$. Тогда $\nu_{i,n-s} < \frac{n-s}{q_i-1} \leq \frac{n-s}{2}$. Поэтому $\mu_i(n-s) - \nu_{i,n-s} \geq \mu_i(n-s) - \frac{n-s}{2} \geq \mu_i$, следовательно, τ_{ks} делится на $q_i^{\mu_i}$. Если $\mu_i \geq 2$, то $\mu_i(n-s) - \nu_{i,n-s} \geq \mu_i(n-s) - (n-s) \geq \mu_i$, и τ_{ks} делится на $q_i^{\mu_i}$. Осталось рассмотреть случай $q_i = 2$, $\mu_i = 1$. В этом случае $\nu_{i,n-s} < n-s$, поэтому $\mu_i(n-s) - \nu_{i,n-s} \geq n-s-(n-s-1) \geq 1 = \mu_i$, т. е. τ_{ks} делится на $q_i^{\mu_i} = 2$. Таким образом, во всех случаях τ_{ks} делится на $q_i^{\mu_i}$. Следовательно, при указанных ограничениях на индексы k и s число τ_{ks} делится на a. Аналогично можно показать, что число $a^{3(n-s)+l-1}\sigma_{n-s+1,s}$ является целым и делится на a при $s<n$. Мы видим, что при $j=1$ числа v_{ljs} являются суммами нескольких целых чисел, и при $s<n$ все слагаемые делятся на a. Таким образом, в рассмотренном случае лемма справедлива. Случай $j=2$ рассматривается аналогично. $\square$

Доказательство теоремы. Пусть

$$h_{nj} = (a^3b)^n P_{1j}\left(\frac{1}{a^3b}\right), \quad j=1,2;$$
$$r_n = h_{n1}\xi_1 + h_{n2}\xi_2, \quad H_n = \max(|h_{n1}|, |h_{n2}|).$$

Из леммы 5 следует, что r_n — линейная форма от чисел ξ_1 и ξ_2 с целыми в поле $\mathbb{I}$ коэффициентами. Очевидно,

$$r_n = (a^3b)^n R_1\left(\frac{1}{a^3b}\right).$$

По теореме 5 ([5], с. 224) числа ξ_1, ξ_2 и $A_{\beta+2-j,\beta-\alpha-1}\left(-\frac{1}{a^3b}\right)$ отличны от нуля. Поэтому из леммы 2 вытекают соотношения

$$|r_n| = C_1(a^3|b|)^{-n}2^{-2n}n^{-n-\alpha-1}e^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right); \tag{12}$$

$$H_n = C_2(a^3|b|)^n 2^{2n} n^{n+\alpha}e^{-n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right); \tag{13}$$

$$\frac{\ln\ln H_n}{\ln H_n} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{\ln\ln n}{\ln n}+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right); \tag{14}$$

$$CH_n^{-1}\frac{\ln\ln H_n}{\ln H_n} = C_1(a^3|b|)^{-n}2^{-2n}n^{-n-\alpha-1}e^n\left(1+\frac{\ln\ln n}{\ln n}+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right), \tag{15}$$

где константы C_1, C_2 и C определены в (1). Из соотношений (12)–(15) следует, что при всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$|h_{n1}\xi_1 + h_{n2}\xi_2| = |r_n| < C(H_n \ln H_n)^{-1} \ln\ln H_n,$$

и первая часть утверждения теоремы доказана. Из тех же соотношений (12)–(15) вытекает, что при любом $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$|r_n| > (C - \varepsilon)(H_n \ln H_n)^{-1} \ln\ln H_n. \tag{16}$$

Пусть, далее, имеется линейная форма

$$r = h_1\xi_1 + h_2\xi_2, \quad H = \max(|h_1|, |h_2|), \tag{17}$$

с целыми в поле $\mathbb{I}$ коэффициентами, причем при некотором n выполняются равенства $h_j = ch_{nj}$, $j = 1, 2$. Покажем, что в этом случае число c является целым в поле $\mathbb{I}$. С этой целью рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} ch_{n1} & ch_{n2} \\ a(a^3b)^n P_{21}(\frac{1}{a^3b}) & a(a^3b)^n P_{22}(\frac{1}{a^3b}) \end{vmatrix},$$

где многочлены во второй строке соответствуют указанному n. По лемме 3 этот определитель, являющийся целым числом (в силу леммы 5), равен $\pm ca$, т.е. $ca \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$. Из леммы 5 вытекает, что h_{n1} есть сумма нескольких целых чисел, делящихся на a, и числа ± 1. Поэтому, т.к. $ca \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$, целое число ch_{n1} есть сумма нескольких целых чисел и числа $\pm c$. Следовательно, c — целое число. Отсюда следует, что неравенство (16) выполняется для всех форм r рассматриваемого вида (с заменой H_n на H) за исключением, быть может, конечного их числа. Заметим, далее, что с некоторой константой выполняется неравенство

$$\frac{H_{n+1}}{H_n} < C_3 \frac{\ln H_n}{\ln\ln H_n}.$$

Поэтому, если форма (17) линейно независима с каждой из форм r_n, то можно применить лемму 1 ([6], с. 78). В соответствии с этой леммой при $H \geq C_4$ выполняется неравенство

$$|r| \geq C_5 H^{-1},$$

где C_4, C_5 — некоторые постоянные. Таким образом, во всех случаях неравенство, получающееся из (2) заменой C на $C - \varepsilon$, может иметь лишь конечное число решений в целых числах h_1 и h_2 из поля $\mathbb{I}$. $\square$

Литература

1. Коробов А.Н. *Оценки некоторых линейных форм* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1981. – Т. 191. – № 6. – С. 36–40.
2. Галочкин А.И. *О неулучшаемых по высоте оценках некоторых линейных форм* // Матем. сб. – 1984. – Т. 124. – № 3. – С. 416–430.
3. Иванков П.Л. *Оценки снизу линейных форм от значений функции Куммера с иррациональным параметром* // Матем. заметки. – 1991. – Т. 49. – № 2. – С. 55–63.
4. Фельдман Н.И. *Приближения алгебраических чисел.* – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 200 с.
5. Шидловский А.Б. *Трансцендентные числа.* – М.: Наука, 1987. – 447 с.
6. Попов А.Ю. *Приближения некоторых степеней числа e* // Диофантовы приближения. Ч. 1. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – С. 77–85.

Московский государственный технический университет

Поступила 23.07.1998