УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Т. 114, кн. 2 МАТЕМАТИКА *1954*

ОБЪЁМ ПИРАМИДЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Б. Л. Лаптев

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1. Если вопрос о вычислении площади треугольника был решен Лобачевским уже в его первой работе 1829—30 г. „О началах геометрии" *, а именно, было установлено, что площадь треугольника пропорциональна недостатку в сумме его углов до π, то вычисление объема пирамиды представило бóльшие трудности. Лобачевский рассматривал пирамиду простейшего вида — прямоугольно-треугольную, то-есть пирамиду, все грани которой прямоугольные треугольники, и искал выражение для объема этой пирамиды через три её двугранных угла, отличных от прямого. Однако простого выражения, аналогичного площади треугольника, ему получить не удалось. В первой работе он указал один путь вычислений, основанный на представлении искомого объема как суммы и разности объемов четырёх асимптотических пирамид **, однако окончательное выражение через значения трансцендентной функции $L(x)$ ***, которую он здесь обозначал еще $\Phi(x)$ ****, Лобачевский не дал, повидимому, ввиду его сложности. Впоследствии в работе 1836 г. „Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам" Лобачевский, изучив свойства функции $L(x)$, привел этот результат в развернутом виде, доведя вычисления до конца, а также, идя другим путем, нашел и более простое выражение для искомого объема. Поскольку проследить получение этих важных формул у Лобачевского нелегко, так как выводы рассеяны в обширных вычислениях, имеющих своей целью отыскание значения определённых интегралов, и не всегда достаточно ясных, мы в настоящей работе даем последовательный связный вывод этих формул, придерживаясь в основном хода рассуждений Лобачевского, производя лишь некоторую модернизацию расчетов и возможные упрощения.

В вычислениях мы будем пользоваться гиперболическими функциями, допуская это несущественное отступление от техники счета Лобачевского для большей доступности выводов. Радиус кривизны пространства обозначим k. При записывании соотношений между элементами прямоугольного треугольника ABC мы будем прибегать к известной схеме Непера (см. чертеж 1), пользуясь правилом:

---

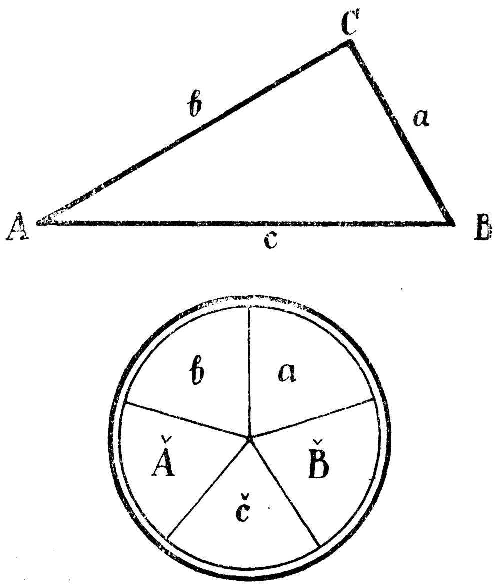
* Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., 1, стр. 221.

** То-есть пирамида с бесконечно удаленной вершиной.

*** Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., III, стр. 408—412.

**** Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., 1, стр. 254—255.

Синус элемента равен произведению косинусов элементов противолежащих или тангенсов элементов прилежащих, причем:



Черт. 1.

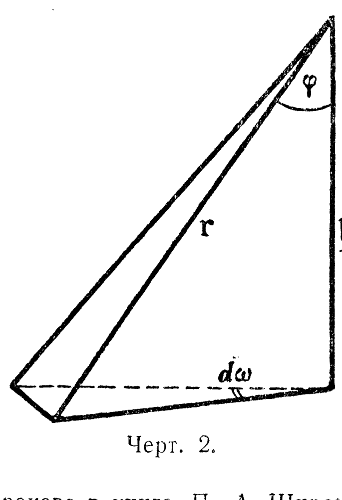
1) Если элементом является отрезок, то следует брать гиперболическую функцию отношения отрезка к радиусу кривизны пространства.

2) Для отмеченных знаком ∨ элементов следует брать кофункцию *.

Для большей краткости мы часто будем прибегать к языку величин бесконечно-малых, рассматривая бесконечно узкую пирамиду, бесконечно тонкий треугольный клин, бесконечно тонкую треугольную пластинку и т. д. Применение этих терминов для величин элементов двойных или однократных интегралов помогает освещать геометрический ход рассуждений Лобачевского, а путь перехода к аналитически более строгим выводам при этом всегда достаточно ясен.

§ 2. ОБЪЁМ ПРЯМОУГОЛЬНО-ТРЕУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ, КАК ИНТЕГРАЛ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНОГО КЛИНА

3. Получим формулу для объема бесконечно тонкого прямоугольно-треугольного клина, то-есть для элементарной треугольной пирамиды, конечные грани которой представляют собой два равных, имеющих общий катет h, прямоугольных треугольника, плоскости которых образуют бесконечно малый двугранный угол $d\omega$ **. Угол, прилежащий катету h, назовем φ, а гипотенузу r (см. черт. 2).



Черт. 2.

Взяв элемент объема в полярных координатах

$$d^3v = k^2 \sin\varphi \,\mathrm{sh}^2 \frac{r}{k}\, d\varphi\, d\omega\, dr\,^{***}, \qquad (2.1)$$

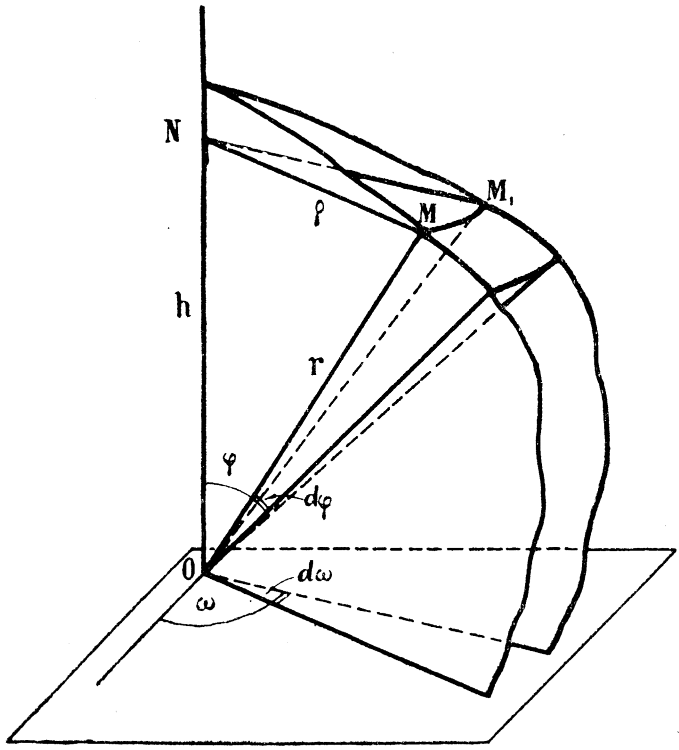
интегрируем его по переменному r в пределах от 0 до r. Это даст объем бесконечно узкой пирамиды, то-есть элементарной (второго порядка малости) четырехугольной пирамиды, боковые ребра которой имеют конечную вели-

* См. изложение этого правила у П. А. Широкова в книге П. А. Широков, В. Ф. Каган. Строение неевклидовой геометрии. Гостехиздат, стр. 60, 1950.

** Все конечные размеры рассматриваются в элементарной фигуре с точностью до величин бесконечно малых.

*** Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. III, стр. 47. Здесь r — длина радиуса-вектора точки; ω — первый полярный угол (долгота), а φ — угол, образованный радиусом-вектором с перпендикуляром к плоскости угла ω $\left(\text{дополнение к широте до } \frac{\pi}{2}\right)$ (см. черт 3).

чину r и проектируются на ребро бесконечно-малого двугранного угла $d\omega$, образованного двумя её противоположными гранями, в виде отрезка h, причем боковые ребра, лежащие в каждой из этих граней, образуют с отрезком h угол φ, а между собой бесконечно малый угол $d\varphi$ (см. сноску ** на стр. 54).



Черт. 3.

Итак, проинтегрировав (2.1), получаем объем бесконечно-узкой пирамиды

$$d^2v = \frac{1}{2}\,k^2\left(\operatorname{sh}\frac{r}{k}\operatorname{ch}\frac{r}{k} - \frac{r}{k}\right)\sin\varphi\,d\varphi\,d\omega\,^*. \tag{2.2}$$

Придадим этой формуле другой вид, заменяя $r\sin\varphi\,d\varphi$ его выражением из тождества

$$d(r\cos\varphi) = dr\cos\varphi - r\sin\varphi\,d\varphi. \tag{2.3}$$

Получаем

$$d^2v = \frac{k^2}{2}\left\{d(r\cos\varphi) - dr\cos\varphi + k\operatorname{sh}\frac{r}{k}\operatorname{ch}\frac{r}{k}\sin\varphi\,d\varphi\right\}d\omega =$$

$$= \frac{k^2}{2}\left\{d(r\cos\varphi) - k\operatorname{ch}^2\frac{r}{k}\,d\left(\operatorname{th}\frac{r}{k}\cos\varphi\right)\right\}d\omega\,^{**}. \tag{2.4}$$

Но из треугольника OMN имеем (см. черт. 4):

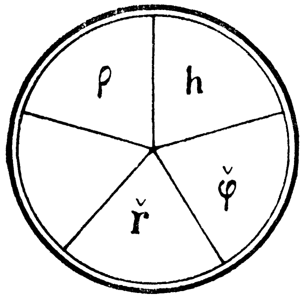
$$\operatorname{th}\frac{h}{k} = \operatorname{th}\frac{r}{k}\cos\varphi. \tag{2.5}$$

* Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. III, стр. 203, формула (57).

** Там же, стр. 206, формула (60а).

Таким образом, объем бесконечно-узкой пирамиды представлен в следующем виде:

$$d^2v = \frac{k^2}{2}\left\{d(r\cos\varphi) - k\,\mathrm{ch}^2\frac{r}{k}\,d\left(\mathrm{th}\,\frac{h}{k}\right)\right\}d\omega. \tag{2.6}$$



Черт. 4.

Для вычисления объема прямоугольно-треугольного клина $MONM_1$ (см. черт. 3) достаточно проинтегрировать объем (2.6) по φ от 0 до данного φ, причем считать h при интегрировании величиной постоянной, а тогда второй член в скобках обращается в нуль. Учитывая, что $r = h$ при $\varphi = 0$, получаем искомый объем бесконечно-тонкого прямоугольно-треугольного клина

$$dv = \frac{1}{2}k^2 d\omega \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi} d(r\cos\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}k^2(r\cos\varphi - h)\,d\omega\,^*. \tag{2.7}$$

4. Рассматривая предельный случай (2.7) при $h \to \infty$, мы получим объем бесконечно-тонкого асимптотического прямоугольно-треугольного клина, две грани которого представляют собою два равных асимптотических прямоугольных треугольника с общим бесконечным катетом, плоскости которых образуют бесконечно-малый угол $d\omega$ (см. черт. 5). При этом предельном переходе конечный катет MN, величину которого обозначим ρ, следует считать постоянным. Из соотношений (см. черт. 4)

$$\mathrm{ch}\,\frac{r}{k} = \mathrm{ch}\,\frac{h}{k}\,\mathrm{ch}\,\frac{\rho}{k}, \tag{2.8}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{th}\,\frac{\rho}{k}}{\mathrm{sh}\,\frac{h}{k}}, \tag{2.9}$$

полагая

$$h \to \infty, \quad \rho = \mathrm{const}, \tag{2.10}$$

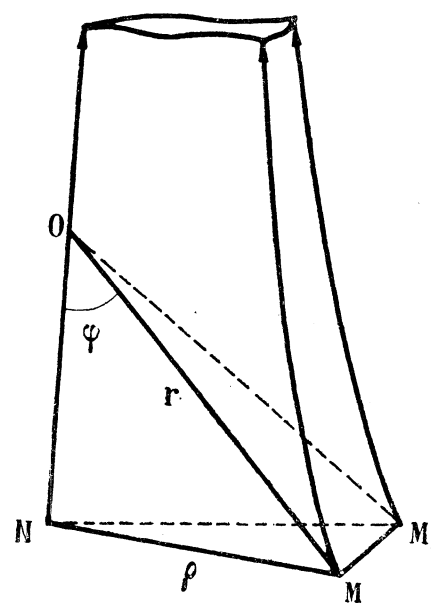
имеем

$$r \to \infty, \quad \varphi \to 0. \tag{2.11}$$

Чтобы найти предел (2.7) при условиях (2.10) и (2.11), учтем, что

$$r\cos\varphi - h =$$

$$= (r - h) - r(1 - \cos\varphi) =$$



Черт. 5.

$$= (r - h) - 2r\sin^2\frac{\varphi}{2} \tag{2.12}$$

* Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. III, стр. 204, формула (58).

Нетрудно показать, что второй член в правой части (2.12) имеет пределом нуль. Действительно,

$$r \sin^2 \frac{\varphi}{2} < \frac{r\varphi^2}{4} < \frac{\operatorname{sh} r \varphi^2}{4} = \frac{\operatorname{sh} r \cdot \sin \varphi}{4} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cdot \varphi, \tag{2.13}$$

но из треугольника OMN, согласно схеме Непера,

$$\operatorname{sh} r \sin \varphi = \operatorname{sh} \rho. \tag{2.14}$$

Итак,

$$r \sin^2 \frac{\varphi}{2} < \frac{\operatorname{sh} \rho}{4} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cdot \varphi, \tag{2.15}$$

откуда, учитывая, что предел 2-го множителя равен единице, имеем при (2.10) и (2.11)

$$\lim_{h \to \infty} \left(r \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = 0. \tag{2.16}$$

Итак,

$$\lim_{h \to \infty} (r \cos \varphi - h) = \lim_{h \to \infty} (r - h). \tag{2.17}$$

Но из (2.8)

$$\operatorname{ch} \frac{\rho}{k} = \frac{\operatorname{ch} \frac{r}{k}}{\operatorname{ch} \frac{h}{k}} = e^{\frac{r-h}{k}} \frac{\left(1 + e^{-\frac{2r}{k}}\right)}{\left(1 + e^{-\frac{2h}{k}}\right)}, \tag{2.18}$$

откуда при наших условиях (2.10) и (2.11) находим

$$\lim_{h \to \infty} (r - h) = k \ln \operatorname{ch} \frac{\rho}{k}. \tag{2.19}$$

Таким образом, вследствие (2.17)

$$\lim_{h \to \infty} (r \cos \varphi - h) = k \ln \operatorname{ch} \frac{\rho}{k}, \tag{2.20}$$

и для объема бесконечно-тонкого асимптотического прямоугольно-треугольного клина получаем из (2.7)

$$dv = \frac{1}{2} k^3 \ln \operatorname{ch} \frac{\rho}{k} \, d\omega. * \tag{2.21}$$

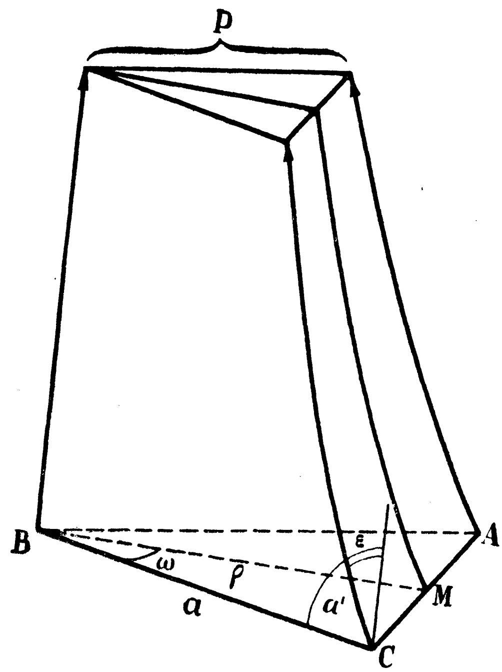
5. Объем асимптотической прямоугольно-треугольной пирамиды можно найти, интегрируя объем бесконечно-тонкого асимптотического прямоугольно-треугольного клина (2.21).

Рассматриваемая пирамида получается из конечной прямоугольно-треугольной пирамиды (см. § 1) при удалении одной из вершин в бесконечность. Если принять конечную грань ABC за основание рассматриваемой пирамиды, то её боковые рёбра, из которых одно,

---

* Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. 1, стр. 208, формула (66).

проходящее через вершину острого угла B основания, перпендикулярно к плоскости основания, будут параллельны между собою в одном направлении (см. черт. 6), на котором бесконечно-удаленная вершина названа P.



Черт. 6.

При интегрировании (2.21) — объема клина $PBMM_1$ изменение ω (при перемещении M по гипотенузе CA) будет происходить в пределах от 0 до B, причем ρ будет являться функцией ω. Зависимость ρ от ω (см. черт. 7 для треугольника MBC) имеет вид

$$\operatorname{th}\frac{\rho}{k}=\frac{\operatorname{th}\frac{a}{k}}{\cos\omega}, \qquad (2.22)$$

где a — катет основания, прилежащий к вершине B.

Откуда

$$\operatorname{sch}\frac{\rho}{k}=\sqrt{1-\frac{\operatorname{th}^2\frac{a}{k}}{\cos^2\omega}}. \qquad (2.23)$$

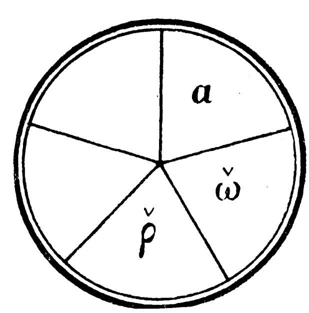
Таким образом, объем асимптотической прямоугольнотреугольной пирамиды выразится следующим интегралом:

$$v=-\frac{k^3}{4}\int\limits_0^B \ln\left(1-\frac{\operatorname{th}^2\frac{a}{k}}{\cos^2\omega}\right)d\omega. \qquad (2.24)$$

Этот интеграл не выражается в конечном виде через элементарные функции. Если воспользоваться равенством

$$\operatorname{th}\frac{a}{k}=\cos a', \qquad (2.25)$$

где a' обозначает угол параллельности, соответствующий отрезку a, то (2.24) получает следующий вид



Черт. 7.

$$v=-\frac{k^3}{4}\int\limits_0^B \ln\left(1-\frac{\cos^2 a'}{\cos^2\omega}\right)d\omega. \qquad (2.26)$$

6. Интеграл (2.26) нетрудно выразить через значения трансцен-

дентной функции $L(x)$ Лобачевского, — совпадающий при $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant + \frac{\pi}{2}$ с интегралом

$$L(x) = -\int_0^x \ln \cos t dt. \qquad (2.27)$$

Этот интеграл (2.27) впервые рассматривался Лобачевским еще в сочинении „О началах геометрии", где он обозначил его символом $\Phi(x)$ *.

В сочинении „Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам" Лобачевский для функции $L(x)$ дает представление в виде суммы следующего тригонометрического ряда

$$L(x) = x \ln 2 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \sin 2nx, \qquad (2.28)$$

сходящегося при $-\infty < x < +\infty$. Поскольку ряд сходится равномерно, и члены его непрерывные функции, то и $L(x)$ — непрерывная функция. График этой функции, таблица её значений и вывод важнейших её свойств приведены в примечаниях к III тому сочинений Лобачевского **.

В дальнейшем нам будут необходимы следующие свойства функции $L(x)$ ***:

$$L\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \ln 2, \qquad (2.29)$$

$$L(-x) = -L(x), \qquad (2.30)$$

$$L(x + m\pi) = L(x) + m\pi \ln 2, \qquad (2.31)$$

$$L(x) - L\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \ln 2 + L\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}. \qquad (2.32)$$

Если a и b лежат на отрезке $[2m\pi, (2m+1)\pi]$, где m — целое число, то

$$\int_a^b \ln \sin x dx = L\left(\frac{\pi}{2} - b\right) - L\left(\frac{\pi}{2} - a\right). \qquad (2.33)$$

7. Выразим интеграл (2.26) через значения $L(x)$. Преобразуя разность квадратов косинусов к логарифмическому виду

$$\cos^2 \omega - \cos^2 a' = \sin(a' - \omega) \sin(a' + \omega), \qquad (2.34)$$

учитывая, что

$$0 \leqslant \omega \leqslant B < a' < \frac{\pi}{2}, \qquad (2.35)$$

---

* Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. 1, стр. 254—255.

** Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. III, стр. 299—303 и 408—412.

*** Там же, стр. 184—187 и 286.

и применяя (2.27) и (2.33), находим окончательное выражение для объема асимптотической прямоугольно-треугольной пирамиды через значения функции $L(x)$ *:

$$v=\frac{k^3}{4}\left\{L\left(B+\frac{\pi}{2}-a'\right)+L\left(B-\frac{\pi}{2}+a'\right)-2L(B)\right\}. \tag{2.36}$$

Если ввести в рассмотрение угол ε, дополнительный до прямого к углу a',

$$\varepsilon=\frac{\pi}{2}-a', \tag{2.37}$$

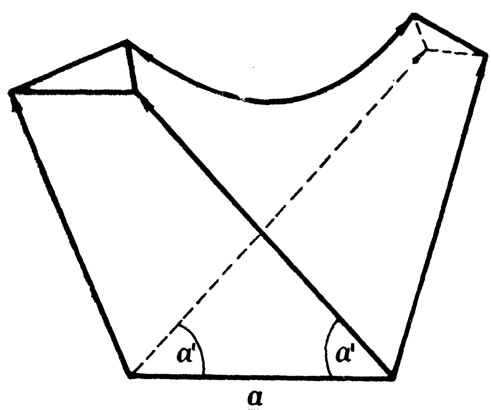
то вместо (2.36) получаем

$$v=\frac{k^3}{4}\{L(B+\varepsilon)+L(B-\varepsilon)-2L(B)\}. \tag{2.38}$$

8. В случае, если вершина A пирамиды тоже бесконечно удалена, то-есть, если ребра CA, BA и PA параллельны в одном направлении, будем иметь

$$B=a', \tag{2.39}$$

и формулу для объема такой дважды асимптотической прямоугольно-треугольной пирамиды (см. черт. 8) получим из (2.36), учитывая (2.39),



Черт. 8.

$$v=\frac{k^3}{4}\left\{\frac{\pi}{2}\ln 2+L\left(2a'-\frac{\pi}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-2L(a')\right\}. \tag{2.40}$$

Если воспользоваться формулой (2.32), то выражение (2.40) получит вид

$$v=\frac{k^3}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}-a'\right)\ln 2-\right.$$
$$\left.-L\left(\frac{\pi}{2}-a'\right)\right\}^{**} \tag{2.41}$$

или, согласно (2.37),

$$v=\frac{k^3}{2}\{\varepsilon\ln 2-L(\varepsilon)\}. \tag{2.42}$$

§ 3. ОБЪЕМ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНО-ТРЕУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ КАК ИНТЕГРАЛ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

9. Этот путь отыскания объема асимптотической пирамиды дает возможность найти значение определённого интеграла, который встретится в дальнейшем при вычислении объема конечной пирамиды (см. § 5).

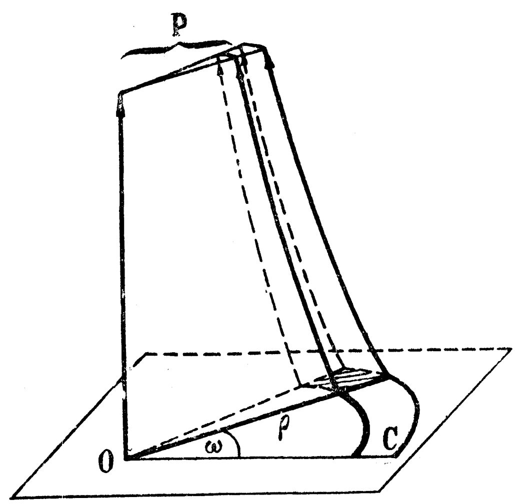
---

* Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. III, стр. 222, формула (89).
** Там же, стр. 356.

Найдем объем элементарной бесконечно-узкой асимптотической пирамиды, основанием которой служит элемент площади в полярной системе координат (ρ, ω) и боковые ребра которой параллельны перпендикуляру, восстановленному в полюсе к плоскости этой полярной системы (см. черт. 9).

Для этого достаточно продифференцировать по ρ объем бесконечно-тонкого асимптотического клина (2.21), что дает

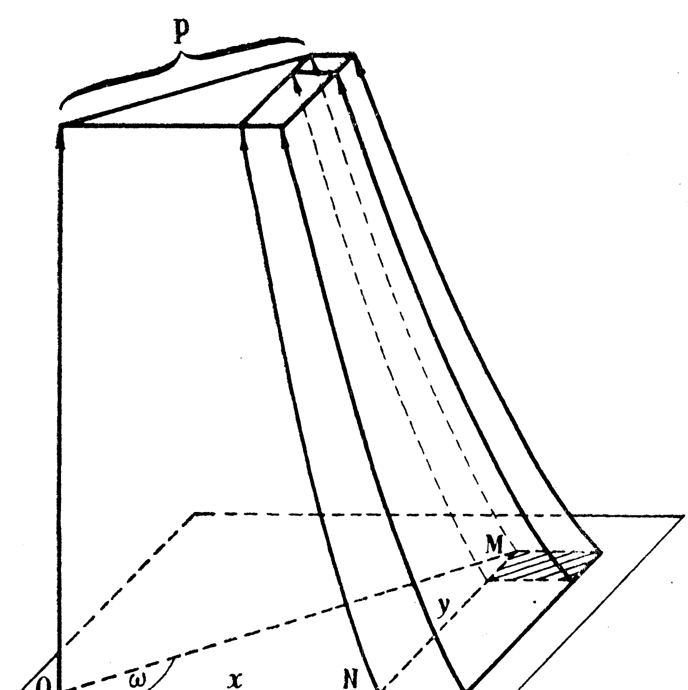
$$d^2v = \frac{1}{2} k^2 \operatorname{th} \frac{\rho}{k} d\rho\, d\omega\, *. \quad (3.1)$$



Черт. 9.

10. Далее найдем объем d^2w элементарной бесконечно-узкой асимптотической пирамиды, основанием которой служит элемент площади в прямоугольных декартовых координатах, а направление параллельных боковых ребер прежнее (см. черт. 10). Этот объем получен из (3.1) по формулам преобразования элемента двойного интеграла

$$d^2w = \frac{1}{2} k^2 \operatorname{th} \frac{\rho}{k} \cdot \frac{\partial(\rho,\ \omega)}{\partial(x,\ y)} dxdy. \quad (3.2)$$



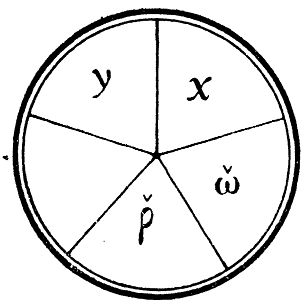
Черт. 10.

* Н. И. Лобачевский. Полн. собр., соч. т. III, стр. 223, формула (89а).

Для вычисления якобиана имеем (см. черт. 11 схемы Непера для треугольника ONM):

$$\operatorname{th}\frac{x}{k} = \operatorname{th}\frac{\rho}{k}\cos\omega, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{sh}\frac{y}{k} = \operatorname{sh}\frac{\rho}{k}\sin\omega. \tag{3.4}$$



Черт. 11.

Дифференцируя (3.3), находим, пользуясь (3.4),

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \omega)} = k\operatorname{ch}\frac{x}{k}\operatorname{th}\frac{\rho}{k}. \tag{3.5}$$

Таким образом, получаем из (3.2) объем искомой элементарной асимптотической пирамиды

$$d^2w = \frac{k}{2}\frac{dxdy}{\operatorname{ch}\frac{x}{k}}, \tag{3.6}$$

что в обозначениях Лобачевского имеет вид

$$d^2w = -\frac{k^2}{2}dydx', \tag{3.7}$$

где x' — угол параллельности отрезка x.

11. Интегрируя (3.6) по y от 0 до y, находим объем бесконечнотонкой асимптотической трямоугольно-треугольной пластинки, две грани которой представляют собою два бесконечно близких асимптотических прямоугольных треугольника, плоскости которых параллельны плоскости YOP в направлении OP, где OP — перпендикуляр к плоскости XOY. Плоскости этих треугольников пересекают плоскость XOY по конечным катетам, перпендикулярным к оси XO и отсекающим на ней отрезки x и $x+dx$ (см. черт. 10)

$$dw = +\frac{k}{2}\frac{ydx}{\operatorname{ch}\frac{x}{k}} \tag{3.8}$$

или

$$dw = -\frac{k^2}{2}ydx'\text{*}. \tag{3.9}$$

12. Объем асимптотической прямоугольно-треугольной пирамиды мы получим, интегрируя объем элементарной пластинки (3.8). Это дает

$$w = \frac{k}{2}\int_0^a \frac{ydx}{\operatorname{ch}\frac{x}{k}}. \tag{3.10}$$

* Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. III, стр. 224, формула (95).

Если учесть зависимость между элементами треугольника $\acute{O}N\acute{M}$ (см. предшеств. схему, в которой ω следует заменить постоянным углом B)

$$\operatorname{sh}\frac{x}{k} = \operatorname{th}\frac{y}{k}\operatorname{ctg}B, \tag{3.11}$$

то интеграл (3.10) получит вид

$$w = \frac{k}{2}\operatorname{ctg}B\int_0^b \frac{y\,dy}{\operatorname{ch}^2\frac{y}{k} + \operatorname{sh}^2\frac{y}{k}\operatorname{ctg}^2 B}. \tag{3.12}$$

Или, выражая гиперболические функции через $\operatorname{ch}\frac{2y}{k}$, получим

$$w = \frac{k}{2}\sin 2B\int_0^b \frac{y\,dy}{\operatorname{ch}\frac{2y}{k} - \cos 2B}. \tag{3.13}$$

Сравнивая (3.13) с формулой (2.38) для объема той же асимптотической пирамиды, мы найдем значение интеграла

$$\int_0^b \frac{y\,dy}{\operatorname{ch}^2\frac{y}{k} - \cos 2B} = \frac{k^2}{2\sin 2B}\{L(B+\varepsilon) + L(B-\varepsilon) - 2L(B)\}^{*}. \tag{3.14}$$

Для удобства применений этих формул вместо a' пользуемся ε, согласно (2.37). Таким образом, ε — острый угол, определенный из уравнения

$$\operatorname{th}\varepsilon = \operatorname{th}\frac{b}{k}\operatorname{ctg}B, \tag{3.15}$$

как это следует из соотношений (см. (3.11)),

$$\operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{th}\frac{b}{k}\operatorname{ctg}B, \tag{3.16}$$

$$\operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{ctg}a'. \tag{3.17}$$

§ 4. ОБЪЕМ ПРЯМОУГОЛЬНО-ТРЕУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ КАК АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СУММА ОБЪЕМОВ ЧЕТЫРЕХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНО-ТРЕУГОЛЬНЫХ ПИРАМИД

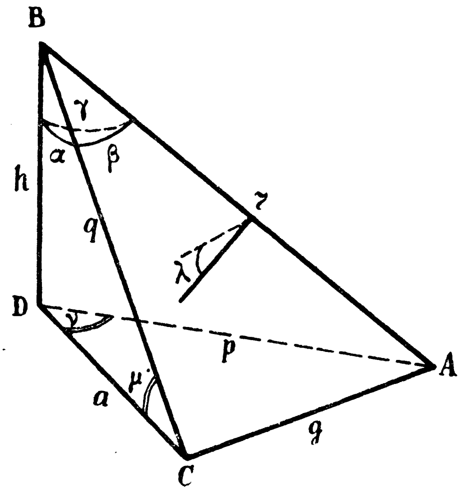
14. Введем следующие обозначения для элементов прямоугольно-треугольной пирамиды (см. черт. 12). Ребра AC и BD, перпендикулярные соответственно к граням BCD и ADC, назовем

$$AC = g,$$
$$BD = h.$$

* Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. III, стр. 224, формулы (97) и (98).

Двугранные углы при этих рёбрах, соответственно равные острым углам прямоугольных треугольников BCD и ADC, назовём μ и ν:

$$\angle BCD = \mu,$$
$$\angle ADC = \nu.$$



Черт. 12.

Общий катет этих двух треугольников назовем a:

$$CD = a.$$

Двугранный угол при этом ребре будет прямым, как и двугранные углы при рёбрах

$$AD = p,$$
$$BC = q.$$

Двугранный угол при шестом ребре $AB = r$ обозначим λ; он будет острым, как это следует из прямоугольного сферического треугольника $A_0C_0D_0$ (см. черт. 12, 13), высекаемого на сфере с центром в B плоскостями граней BAC, BCD и BDA, плоские углы которых при вершине B мы обозначим

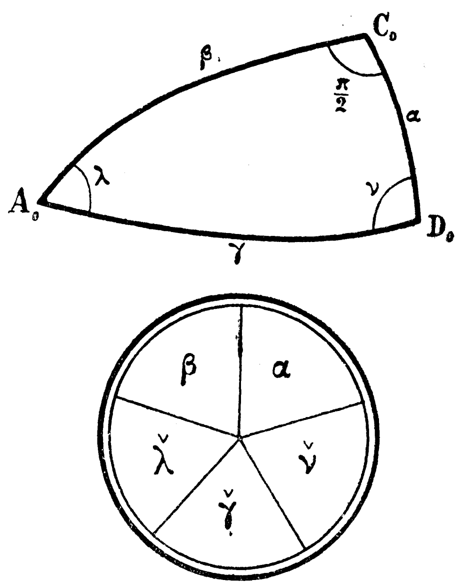
$$\angle ABC = \beta,$$
$$\angle CBD = \alpha,$$
$$\angle DBA = \gamma.$$

Еще в „О началах геометрии“ Лобачевский показал, что объем пирамиды $ABCD$ можно представить как алгебраическую сумму объемов четырех прямоугольно-треугольных асимптотических пирамид *.

Пользуясь этим же приемом, Лобачевский дает в „Применении воображаемой геометрии“ уже развернутое выражение для объема пирамиды $ABCD$ через значения функции $L(x)$ — от двугранных углов λ, μ, ν. Следуя ходу его рассуждений **, продолжим ребро DB (см. черт. 14) за вершину B: получим полупрямую DD_1. Продолжим ребро CB за вершину B на отрезок

$$BE = \bar{\alpha}, \qquad (4.1)$$

где $\bar{\alpha}$ обозначает отрезок, для которого угол α является углом па-



Черт. 13.

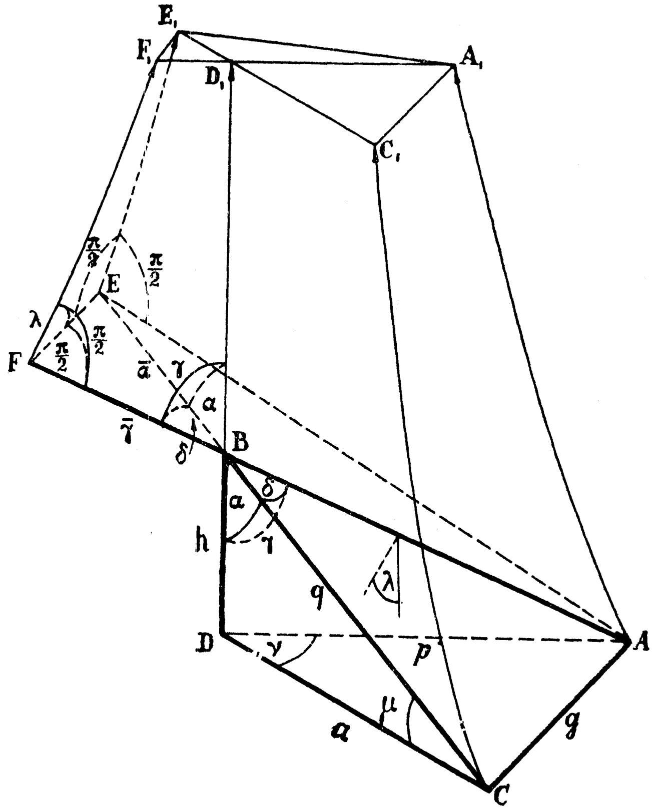
* Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. I, стр. 244.
** Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. II, стр. 246—249.

раллельности, и в точке E восставим в плоскости CBD перпендикуляр EE_1 к BE в сторону полупрямой BD_1. Тогда, согласно (4.1),

$$EE_1 \parallel DD_1. \tag{4.2}$$

Аналогично, продолжим ребро AB за вершину B на отрезок BF,

$$BF = \bar{\gamma}, \tag{4.3}$$



Черт. 14.

где $\bar{\gamma}$ обозначает отрезок, для которого угол γ является углом параллельности, и в точке F восставим в плоскости ABD перпендикуляр FF_1 к BF в сторону полупрямой BD_1.

Тогда, согласно (4.3),

$$FF_1 \parallel DD_1. \tag{4.4}$$

Так как двугранный угол между гранями DBC и ABC прямой ($AC \perp$ плоскости DBC), то EE_1 будет перпендикулярен и к плоскости ABC (или BEF), но

$$FF_1 \parallel EE_1, \tag{4.5}$$

как это следует из (4.2) и (4.4), а потому FE будет проекцией FF_1 на плоскость BEF. По теореме о трех перпендикулярах, отсюда следует, поскольку $FF_1 \perp BF$ по построению, что $FE \perp BF$. Таким образом, треугольник BFE прямоугольный при вершине F. Проведя через A и B полупрямые AA_1 и CC_1, параллельные DD_1, и обозначая буквой P общую бесконечно-удаленную точку параллельных между собою полупрямых AA_1, CC_1, DD_1, EE_1, FF_1, мы выделяем следующие 4 асимптотические прямоугольно-треугольные пирамиды:

(P_1) $PDAC$,

(P_2) $PEAC$,

(P_3) $PEAF$,

(P_4) $PEBF$,

причем основания трех последних пирамид лежат в одной плоскости, а ребро EP, перпендикулярное к плоскости основания, общее. Очевидно, что объем пирамиды $ABCD$ можно представить через объемы v_1, v_2, v_3, v_4 этих пирамид следующим образом (см. черт.):

$$v = v_1 - v_2 + v_3 - v_4. \tag{4.6}$$

15. Для вычисления объема каждой из 4-х пирамид мы применяем формулу (2.36), причем параметры a' и B для этих пирамид имеют соответственно значения

	a'	B	
(P_1)	$(CD)' = a'$	$\angle CDA = \nu$	(4.7)
(P_2)	$(CE)' = a' - \mu$	$\angle CEA = \psi$	(4.8)
(P_3)	$(FE)' = \lambda$	$\angle FEA = \frac{\pi}{2} - \nu + \psi$	(4.9)
(P_4)	$(FE)' = \lambda$	$\angle FEB = \frac{\pi}{2} - \nu$	(4.10)

где для получения значений $\angle FEA$ и $\angle FEB$ рассматриваем трехгранный угол DD_1, FF_1, EE_1 и учитываем, что сумма двугранных углов в трехгранном угле, ребра которого параллельны в одном направлении, равна π, а двугранные углы при ребрах DD_1 и FF_1 соответственно равны ν и $\frac{\pi}{2}$. Применяя (2.36) и учитывая данные (4.7) — (4.10), находим объем пирамиды $ABCD$

$$v = \frac{k^3}{4}\left\{L\left(\nu + \frac{\pi}{2} - a'\right) + L\left(\nu - \frac{\pi}{2} + a'\right) - 2L(\nu) -\right.$$

$$- L\left(\psi + \frac{\pi}{2} - a' + \mu\right) - L\left(\psi - \frac{\pi}{2} + a' - \mu\right) + 2L(\psi) +$$

$$+ L(\pi - \nu + \psi - \lambda) + L(\lambda - \nu + \psi) - 2L\left(\frac{\pi}{2} - \nu + \psi\right) -$$

$$\left. - L(\pi - \nu - \lambda) - L(\lambda - \nu) + 2L\left(\frac{\pi}{2} - \nu\right)\right\}.$$

Если учесть свойства $L(x)$ (2.31) и (2.30) и воспользоваться обозначением (2.37), то найдём следующую формулу для искомого объема

$$v = \frac{k^3}{4}\left\{L(\nu + \varepsilon) + L(\nu - \varepsilon) - 2L(\nu) -\right.$$

$$- L(\psi + \varepsilon + \mu) - L(\psi - \varepsilon - \mu) + 2L(\psi) +$$

$$+ L(\psi - \nu + \lambda) + L(\psi - \nu - \lambda) - 2L\left(\psi + \frac{\pi}{2} - \nu\right) +$$

$$\left. + L(\nu + \lambda) + L(\nu - \lambda) + 2L\left(\frac{\pi}{2} - \nu\right)\right\}. \qquad (4.11)$$

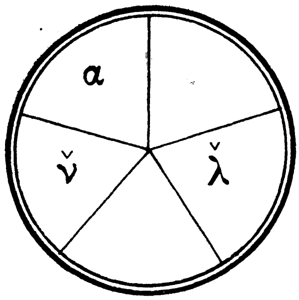
Остаётся выразить ε и ψ через λ, μ, ν.

Из сферического треугольника $A_0C_0D_0$ имеем (см. черт. 15)

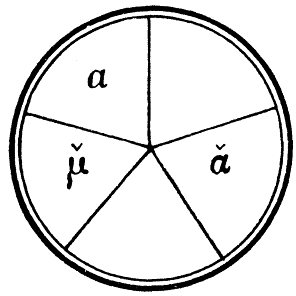
$$\cos\lambda = \cos\alpha \sin\nu. \qquad (4.12)$$

Из прямоугольного треугольника CBD (см. черт. 16)

$$\cos\alpha = \sin\mu \operatorname{ch}\frac{a}{k}. \tag{4.13}$$



Черт. 15.



Черт. 16.

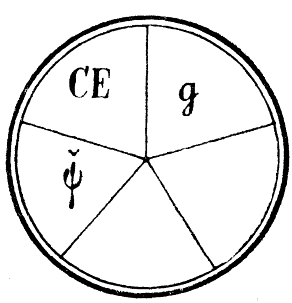
Исключая $\cos\alpha$ из (4.12) и (4.13), находим, пользуясь обозначением (2.37) и соотношением

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \frac{1}{\sin a'}, \tag{4.14}$$

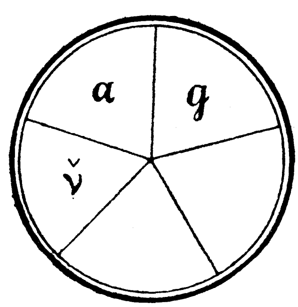
уравнение, определяющее острый угол ε как функцию λ, μ, ν,:

$$\cos\varepsilon = \frac{\sin\mu\sin\nu}{\cos\lambda}. \tag{4.15}$$

Для определения ψ рассматриваем треугольники ACE и ACD. Имеем (см. черт. 17 и 18)



Черт. 17.



Черт. 18.

$$\operatorname{sh}\frac{CE}{k} = \operatorname{th}\frac{g}{k}\operatorname{ctg}\psi, \tag{4.16}$$

$$\operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{th}\frac{g}{k}\operatorname{ctg}\nu. \tag{4.17}$$

Исключая из (4.16) и (4.17) $\operatorname{th}\frac{g}{k}$ и пользуясь равенствами (4.8) и (3.17) и обозначением (2.37), находим уравнение, определяющее острый угол ψ как функцию μ, ν и ε

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\nu\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{ctg}(\varepsilon+\mu), \tag{4.18}$$

а так как ε, согласно (4.15), выражено через λ, μ, ν, то вычисления закончены.

Объем пирамиды $ABCD$ выражен формулой (4.11), где острые углы ε и ψ определены уравнениями (4.15) и (4.18), то-есть объем выражен как функция углов λ, μ, ν.

§ 5. ОБЪЕМ ПРЯМОУГОЛЬНО-ТРЕУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ КАК ИНТЕГРАЛ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

16. Этот путь вычислений Лобачевского приводит к более простому по сравнению с (4.11) выражению объема прямоугольно-треугольной пирамиды через три её двугранных угла[1].

Рассмотрим элементарную пластинку, высекаемую из прямоугольно-треугольной пирамиды $ABCD$ двумя плоскостями, проходящими через B, перпендикулярными к плоскости BCD и образующими бесконечно-малый угол $d\omega$ между собой. Её конечными гранями служат два прямоугольных треугольника, имеющие общую вершину B, причём не пересекающиеся их катеты лежат на бесконечно близких расходящихся прямых, перпендикулярных к плоскости, содержащей пересекающиеся катеты.

Обозначим

$$\angle DBN = \omega,$$
$$\angle NBM = \theta,$$
$$DN = y,$$
$$NM = z,$$
$$BN = l,$$
$$BM = \rho.$$

Чтобы найти объем этой пластинки, достаточно проинтегрировать по θ объем бесконечно узкой пирамиды $BMM_1M_1^*M^*$ (см. черт. 19). Но выражение для объема этой пирамиды мы получим из (2.2), если вместо угла φ введем его выражение через θ

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta. \tag{5.1}$$

Итак, объем бесконечно-узкой пирамиды $BMM_1M_1^*M^*$ имеет вид

$$d^2v = \frac{k^3}{2}\left(\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}\operatorname{ch}\frac{\rho}{k} - \frac{\rho}{k}\right)\cos\theta\, d\theta\, d\omega. \tag{5.2}$$

Чтобы получить объем искомой пластинки, надо проинтегрировать (5.2) по θ в пределах от 0 до θ, считая ω, h, y, l — постоянными, ρ — переменным, зависящим от θ, согласно соотношениям, связывающим элементы треугольника BNM. Из (5.2) получаем

$$dv = \frac{k^3}{2}d\omega\left\{\int_0^\theta \operatorname{sh}\frac{\rho}{k}\operatorname{ch}\frac{\rho}{k}\cos\theta\, d\theta - \frac{1}{k}\int_0^\theta \rho\cos\theta\, d\theta\right\}. \tag{5.3}$$

Обозначив

$$I_1 = \int_0^\theta \operatorname{sh}\frac{\rho}{k}\operatorname{ch}\frac{\rho}{k}\cos\theta\, d\theta, \tag{5.4}$$

$$I_2 = \int_0^\theta \rho\cos\theta\, d\theta \tag{5.5}$$

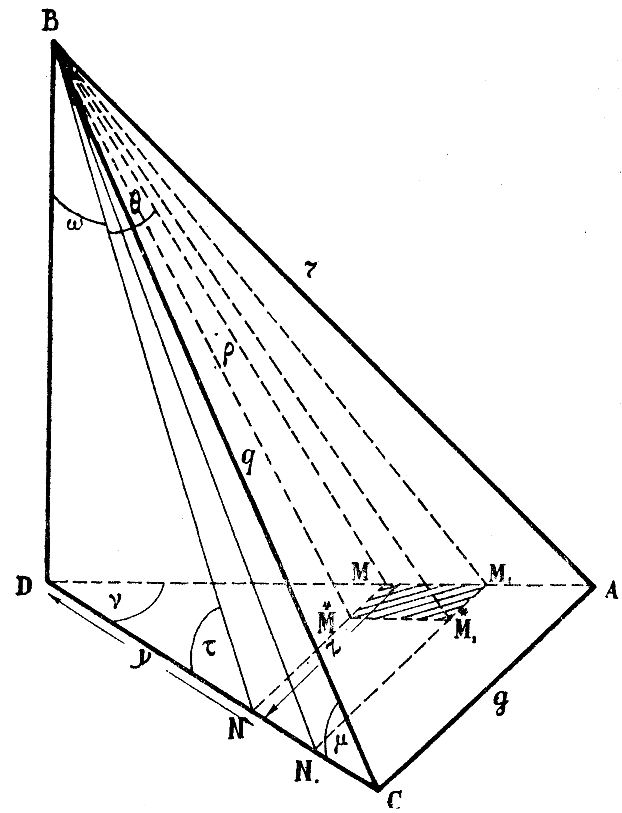
[1] Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. III, стр. 238—242.

будем иметь

$$dv = \frac{k^3}{2}\, d\omega \left\{ I_1 - \frac{1}{k} I_2 \right\}. \tag{5.6}$$

Выполним предварительно в правой части (5.5) интегрирование по частям

$$I_2 = \rho \sin\theta - \int\limits_{\theta=0}^{\theta=\theta} \sin\theta \, d\rho. \tag{5.7}$$



Черт. 19.

Далее, из треугольника BNM имеем (см. черт. 20)

$$\operatorname{th}\frac{\rho}{k} = \operatorname{th}\frac{l}{k}\operatorname{sc}\theta, \tag{5.8}$$

откуда

$$\rho = k \operatorname{ar\,th}\left(\operatorname{th}\frac{l}{k}\operatorname{sc}\theta\right), \tag{5.9}$$

$$d\rho = k\, \frac{\operatorname{th}\dfrac{l}{k}}{1 - \operatorname{th}^2\dfrac{l}{k}\operatorname{sc}^2\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta. \tag{5.10}$$

Учитывая тождество

$$\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}\operatorname{ch}\frac{\rho}{k}=\frac{\operatorname{th}\frac{\rho}{k}}{1-\operatorname{th}^2\frac{\rho}{k}} \tag{5.11}$$

и равенство (5.8) и (5.10), находим из (5.4) и (5.7)

$$l_1-\frac{1}{k}l_2=-\frac{1}{k}\rho\sin\theta+\operatorname{th}\frac{l}{k}\int\limits_0^\theta\frac{\operatorname{sc}^2\theta\,d\theta}{1-\operatorname{th}^2\frac{l}{k}\operatorname{sc}^2\theta}. \tag{5.12}$$

Выражая в (5.12) $\operatorname{sc}^2\theta$ в знаменателе под знаком интеграла через $\operatorname{tg}\theta$, получаем

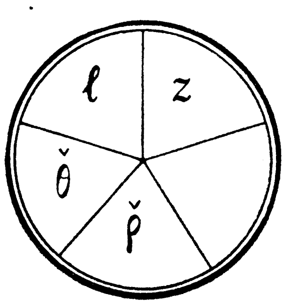
$$l_1-\frac{1}{k}l_2=-\frac{1}{k}\rho\sin\theta+\operatorname{sh}\frac{l}{k}\operatorname{ch}\frac{l}{k}\int\limits_0^\theta\frac{\operatorname{sc}^2\theta\,d\theta}{1-\operatorname{sh}^2\frac{l}{k}\operatorname{tg}^2\theta} \tag{5.13}$$

или

$$l_1-\frac{1}{k}l_2=-\frac{1}{k}\rho\sin\theta+\operatorname{ch}\frac{l}{k}\operatorname{ar\,th}\left(\operatorname{sh}\frac{l}{k}\operatorname{tg}\theta\right), \tag{5.14}$$

но из $\triangle BNM$ (см. черт. 20)

$$\operatorname{sh}\frac{l}{k}\operatorname{tg}\theta=\operatorname{th}\frac{z}{k}. \tag{5.14'}$$



Черт. 20.

Итак,

$$l_1-\frac{1}{k}l_2=-\frac{1}{k}\rho\sin\theta+\frac{z}{k}\operatorname{ch}\frac{l}{k}. \tag{5.15}$$

Подставляя в (5.6), найдём объем элементарной прямоугольно-треугольной пластинки:

$$dv=\frac{k^2}{2}\left\{z\operatorname{ch}\frac{l}{k}-\rho\sin\theta\right\}d\omega. \tag{5.16}$$

Вместо этого выражения у Лобачевского даны более сложные*.

17. Объем пирамиды $ABCD$ мы получим, интегрируя объем пластинки (5.16) по ω в пределах от 0 до α, учитывая, что h и ν при этом постоянны, а остальные переменные меняются, как функции ω, согласно соотношениям, связывающим элементы треугольников BDN, BDM, BNM, DNM.

---

* Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. III, стр. 240—241, формулы (147), (152а), (153), (154).

Пределы изменения переменных следующие

$$
\left.\begin{array}{c|ccc}
\omega & 0 & \ldots & \alpha \\
\theta & 0 & \ldots & \delta \\
\tau & \dfrac{\pi}{2} & \ldots & \mu \\
y & 0 & \ldots & a \\
z & 0 & \ldots & g \\
l & h & \ldots & q \\
\rho & h & \ldots & r
\end{array}\right| . \tag{5.17}
$$

Обозначая

$$P_1 = \int_0^\alpha z \operatorname{ch} \frac{l}{k} \, d\omega, \tag{5.18}$$

$$P_2 = \int_0^\alpha \rho \sin\theta \, d\omega, \tag{5.19}$$

находим для объема пирамиды $ABCD$ выражение через интегралы P_1 и P_2

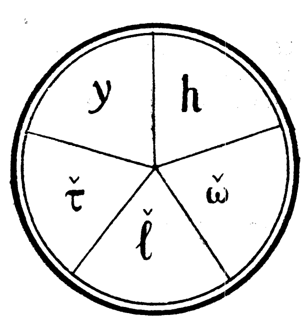
$$v = \frac{k^2}{2}\{P_1 - P_2\}. \tag{5.20}$$

В первом интеграле P_1 за переменное интегрирования принимаем сначала y, а затем выражаем y через μ. Тогда P_1 выразится через функцию $L(x)$ Лобачевского.

Из треугольника BDN (см. черт. 21) находим для l и ω выражения через y

$$\operatorname{ch} \frac{l}{k} = \operatorname{ch} \frac{y}{k} \operatorname{ch} \frac{h}{k}, \tag{5.21}$$

$$\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{cth} \frac{y}{k} \operatorname{sh} \frac{h}{k}, \tag{5.22}$$



Черт. 21.

откуда

$$\omega = \operatorname{arc\,ctg}\left(\operatorname{cth} \frac{y}{k} \operatorname{sh} \frac{h}{k}\right), \tag{5.23}$$

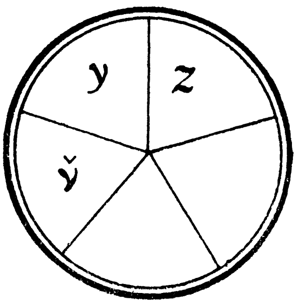
$$d\omega = \frac{\dfrac{1}{k} \operatorname{sh} \dfrac{h}{k} \, dy}{\operatorname{sh}^2 \dfrac{y}{k} + \operatorname{ch}^2 \dfrac{y}{k} \operatorname{sh}^2 \dfrac{h}{k}}. \tag{5.24}$$

Из треугольника DNM (см. черт. 22) находим для z выражение через y:

$$\operatorname{th}\frac{z}{k}=\operatorname{sh}\frac{y}{k}\operatorname{tg}\nu. \tag{5.25}$$

С помощью (5.25), (5.21) и (5.24) получаем из (5.18).

$$P_1=\operatorname{sh}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{h}{k}\int_0^a\frac{\operatorname{arth}\left(\operatorname{sh}\frac{y}{k}\operatorname{tg}\nu\right)\operatorname{ch}\frac{y}{k}\,dy}{\operatorname{sh}^2\frac{y}{k}+\operatorname{ch}^2\frac{y}{k}\operatorname{sh}^2\frac{h}{k}}. \tag{5.25'}$$



Черт. 22.

Переменное τ связано с y следующим образом (см. черт. 21):

$$\operatorname{ctg}\tau=\operatorname{sh}\frac{y}{k}\operatorname{cth}\frac{h}{k}. \tag{5.26}$$

Дифференцируя (5.26), находим

$$-\frac{d\tau}{\sin^2\tau}=\operatorname{ch}\frac{y}{k}\operatorname{cth}\frac{h}{k}\cdot\frac{dy}{k}.$$

Отсюда, с помощью (5.26), получаем

$$d\tau=-\frac{\operatorname{ch}\frac{y}{k}\operatorname{cth}\frac{h}{k}}{1+\operatorname{sh}^2\frac{y}{k}\operatorname{cth}\frac{h}{k}}\cdot\frac{dy}{k}=$$

$$=-\frac{\operatorname{sh}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{y}{k}}{\operatorname{sh}^2\frac{y}{k}+\operatorname{ch}^2\frac{y}{k}\operatorname{sh}\frac{h}{k}}\cdot\frac{dy}{k}. \tag{5.27}$$

Из (5.26) видим, что $\operatorname{sh}\frac{y}{k}$ только постоянным множителем отличается от $\operatorname{ctg}\tau$; следовательно, можно ввести такой вспомогательный постоянный (при интегрировании) угол δ, чтобы мы имели (в целях упрощения (5.25')):

$$\operatorname{sh}\frac{y}{k}\operatorname{tg}\nu=\frac{\operatorname{ctg}\tau}{\operatorname{ctg}\delta}. \tag{5.28}$$

Из (5.26) находим для определения δ уравнение

$$\operatorname{tg}\delta=\operatorname{th}\frac{h}{k}\operatorname{tg}\nu\,^*. \tag{5.29}$$

---

* Геометрическое значение δ получим, сравнивая (5.29) с (3.16),

$$\operatorname{tg}B=\operatorname{th}\frac{b}{k}\operatorname{tg}a'.$$

Видим, что если отложить от D по DC отрезок $DT=\overline{\nu}$, то-есть такой, чтобы для него угол ν был уголом параллельности, то $\angle DTN=\delta$.

Вводя (5.27) и (5.28) в (5.25), находим:

$$P_1 = -k \int_{\pi/2}^{\mu} \operatorname{ar\,th}\left(\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\tau}\right) d\tau. \tag{5.30}$$

Далее, выражая $\operatorname{ar\,th} x$ через логарифмы

$$\operatorname{ar\,th} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \tag{5.31}$$

приводим P_1 к следующей форме:

$$P_1 = -\frac{k}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\mu} \ln\frac{\sin(\tau+\delta)}{\sin(\tau-\delta)}\, d\tau, \tag{5.32}$$

от которой переход к выражению через $L(x)$ очевиден (см. 2.33) —

$$P_1 = \frac{k}{2}\left\{L\left(\frac{\pi}{2}-\mu+\delta\right) - L\left(\frac{\pi}{2}-\mu-\delta\right) - 2L(\delta)\right\}, \tag{5.33}$$

где δ определено уравнением (5.29)

18. Во втором интеграле P_2 (5.19) сначала переходим к переменным y и ρ, а затем выражаем y через ρ. Тогда P_2 можно тоже выразить через $L(x)$.

Ищем выражение для $\sin\theta$.

Из треугольника BNM находим:

$$\cos\theta = \operatorname{th}\frac{l}{k}\operatorname{cth}\frac{\rho}{k}, \tag{5.34}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{th}\frac{z}{k}}{\operatorname{sh}\frac{l}{k}}, \tag{5.35}$$

откуда

$$\sin\theta = \frac{\operatorname{cth}\frac{\rho}{k}\operatorname{th}\frac{z}{k}}{\operatorname{ch}\frac{l}{k}}. \tag{5.36}$$

Выражая z и l через y, находим из $\triangle BND$:

$$\operatorname{ch}\frac{l}{k} = \operatorname{ch}\frac{y}{k}\operatorname{ch}\frac{h}{k}, \tag{5.37}$$

а из $\triangle MND$ (черт. 23):

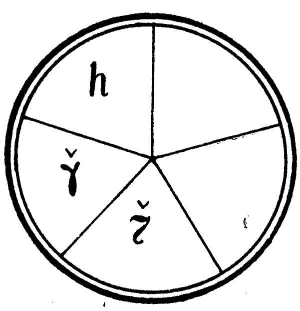
$$\operatorname{th}\frac{z}{k} = \operatorname{sh}\frac{y}{k}\operatorname{tg}\nu. \tag{5.38}$$

Таким образом, получаем:

$$\sin\theta = \operatorname{cth}\frac{\rho}{k}\operatorname{th}\frac{y}{k}\frac{\operatorname{tg}\nu}{\operatorname{ch}\frac{h}{k}}. \tag{5.39}$$

Внося это выражение и (5.24) в (5.19) находим:

$$P_2 = \operatorname{th}\frac{h}{k}\operatorname{th}\nu\int\limits_0^a \frac{\rho\operatorname{cth}\frac{\rho}{k}\operatorname{th}\frac{y}{k}\cdot\frac{dy}{k}}{\operatorname{sh}^2\frac{y}{k}+\operatorname{ch}^2\frac{y}{k}\operatorname{sh}^2\frac{h}{k}}. \tag{5.40}$$



Черт. 23.

Выражаем y через ρ, исключая q из уравнений, связывающих элементы треугольников DMN и DMB:

$$\cos\nu = \operatorname{th}\frac{y}{k}\operatorname{cth}\frac{q}{k}, \tag{5.41}$$

$$\operatorname{ch}\frac{\rho}{k} = \operatorname{ch}\frac{q}{k}\operatorname{ch}\frac{h}{k}, \tag{5.42}$$

что дает

$$\operatorname{th}^2\frac{y}{k} = \left(1-\frac{\operatorname{ch}^2\frac{h}{k}}{\operatorname{ch}^2\frac{\rho}{k}}\right)\cos^2\nu. \tag{5.43}$$

Дифференцируя (5.43), находим, учитывая, что h и ν постоянны,

$$\operatorname{th}\frac{y}{k}\frac{dy}{k} = \operatorname{ch}^2\frac{h}{k}\cos^2\nu\,\frac{\operatorname{ch}^2\frac{y}{k}\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}}{\operatorname{ch}^3\frac{\rho}{k}}\cdot\frac{d\rho}{k} \tag{5.44}$$

и (5.40) получает следующий вид:

$$P_2 = \operatorname{sh}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{h}{k}\sin\nu\cos\nu\int\limits_h^r \frac{\rho\,d\rho}{k\operatorname{ch}^2\frac{\rho}{k}\left(\operatorname{th}^2\frac{y}{k}+\operatorname{sh}^2\frac{h}{k}\right)}. \tag{5.45}$$

Остается выразить $\operatorname{th}^2\frac{y}{k}+\operatorname{sh}^2\frac{h}{k}$ через ρ из (5.43):

$$\text{th}^2\frac{y}{k}+\text{sh}^2\frac{h}{k}=\left(1-\frac{\text{ch}^2\frac{h}{k}}{\text{ch}^2\frac{\rho}{k}}\right)\cos^2\nu+\text{sh}^2\frac{h}{k}=$$

$$=\cos^2\nu\left(1-\text{ch}^2\frac{h}{k}\,\text{sch}^2\frac{\rho}{k}+\text{sh}^2\frac{h}{k}\sec^2\nu\right)=$$

$$=\cos^2\nu\left[1-\text{ch}^2\frac{h}{k}\left(1-\text{th}^2\frac{\rho}{k}\right)+\text{sh}^2\frac{h}{k}\,(1+\text{tg}\,\nu)\right]=$$

$$=\cos^2\nu\,\text{ch}^2\frac{h}{k}\,\text{th}^2\frac{\rho}{k}\left[1+\text{tg}^2\nu\,\text{th}^2\frac{h}{k}\,\text{cth}^2\frac{\rho}{k}\right]=$$

$$=\cos^2\nu\,\text{ch}^2\frac{h}{k}\,\text{th}^2\frac{\rho}{k}\left[1+\text{tg}^2\delta\,\text{cth}^2\frac{\rho}{k}\right], \tag{5.46}$$

где в конце применено (5.29).

Внося (5.46) в (5.45) и воспользовавшись (5.29), находим:

$$P_2=\frac{\text{tg}\,\delta}{k}\int\limits_h^r\frac{\rho\,d\rho}{\left(\text{sh}^2\frac{\rho}{k}+\text{tg}^2\delta\,\text{ch}^2\frac{\rho}{k}\right)}=$$

$$=\frac{\sin 2\delta}{k}\int\limits_h^r\frac{\rho\,d\rho}{\text{ch}\frac{2\rho}{k}-\cos 2\delta}. \tag{5.47}$$

Но для этого интеграла выражение через функцию Лобачевского $L(x)$ уже было получено в конце § 3 [(3.14) (3.15)]. Применяя эти формулы, находим:

$$P_2=\frac{\sin 2\delta}{k}\left[\int\limits_0^r\frac{\rho\,d\rho}{\text{ch}\frac{2\rho}{k}-\cos 2\delta}-\int\limits_0^h\frac{\rho\,d\rho}{\text{ch}\frac{2\rho}{k}-\cos 2\delta}\right]=$$

$$=\frac{k}{2}\{L(\delta+\varepsilon_1)+L(\delta-\varepsilon_1)-L(\delta+\varepsilon_2)-L(\delta-\varepsilon_2)\}, \tag{5.48}$$

где, согласно (3.15),

$$\text{tg}\,\varepsilon_1=\text{th}\frac{r}{k}\,\text{ctg}\,\delta, \tag{5.49}$$

$$\text{tg}\,\varepsilon_2=\text{th}\frac{h}{k}\,\text{ctg}\,\delta. \tag{5.50}$$

Откуда, вследствие (2.29)

$$\text{tg}\,\varepsilon_1=\text{th}\frac{r}{k}\,\text{cth}\frac{h}{k}\,\text{ctg}\,\nu, \tag{5.51}$$

$$\text{tg}\,\varepsilon_2=\text{ctg}\,\nu. \tag{5.52}$$

Нетрудно обнаружить, что

$$\varepsilon_1 = \lambda, \tag{5.53}$$

где λ двугранный угол при ребре r.

Действительно, из сферического треугольника $A_0C_0D_0$ (см. стр. 64) имеем

$$\cos\gamma = \operatorname{ctg}\lambda \operatorname{ctg}\nu, \tag{5.54}$$

а из треугольника BDA

$$\cos\gamma = \operatorname{th}\frac{h}{k}\operatorname{cth}\frac{r}{k}, \tag{5.55}$$

откуда следует

$$\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{th}\frac{r}{k}\operatorname{cth}\frac{h}{k}\operatorname{ctg}\nu. \tag{5.56}$$

Далее из (5.52) следует

$$\varepsilon_2 = \frac{\pi}{2} - \nu. \tag{5.57}$$

Теперь P_2, согласно (5.48) (5.53) и (5.57), получает следующий вид:

$$P_2 = \frac{k}{2}\left\{L(\delta+\lambda) + L(\delta-\lambda) - L\left(\delta+\frac{\pi}{2}-\nu\right) - L\left(\delta-\frac{\pi}{2}+\nu\right)\right\}. \tag{5.58}$$

19. Таким образом, из (5.20), (5.33) и (5.58) находим для объема пирамиды следующее выражение через её двугранные углы:

$$\begin{gathered} v = \frac{k}{2}\left\{L\left(\delta+\frac{\pi}{2}-\mu\right) + L\left(\delta-\frac{\pi}{2}+\mu\right) - 2L(\delta) + \right. \\ + L\left(\delta+\frac{\pi}{2}-\nu\right) + L\left(\delta-\frac{\pi}{2}+\nu\right) - \\ \left. - L(\delta+\lambda) - L(\delta-\lambda)\right\}, \end{gathered} \tag{5.58}$$

где δ тоже нетрудно выразить через эти углы:

$$\cos\delta = \frac{\cos\mu\cos\nu}{\sqrt{\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu - 1}}. \tag{5.59}$$

Действительно, если учесть (5.29) и выражение для h из $\triangle BDC$

$$\operatorname{th}\frac{h}{k} = \operatorname{tg}\mu \operatorname{sh}\frac{a}{k}, \tag{5.60}$$

то следует еще выразить a через двугранные углы. Для этого исключим α из соотношений между элементами сферического треугольника $A_0C_0D_0$ и прямоугольного BDC:

$$\cos\lambda = \cos\alpha \sin\nu, \tag{5.61}$$

$$\cos\alpha = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\sin\mu, \tag{5.62}$$

а это даст

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k}=\frac{\cos\lambda}{\sin\mu\sin\nu}. \tag{5.63}$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\delta=\operatorname{tg}\mu\operatorname{tg}\nu\operatorname{sh}\frac{a}{k}=\frac{\sqrt{\cos^2\lambda-\sin^2\mu\sin\nu}}{\cos\mu\cos\nu}, \tag{5.64}$$

а отсюда получаем и (5.59).

Если ввести $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$ дополнения до $\frac{\pi}{2}$ к двугранным углам μ и ν,

$$\tilde{\mu}=\frac{\pi}{2}-\mu, \qquad \tilde{\nu}=\frac{\pi}{2}-\nu,$$

то окончательное выражение для объема прямоугольно-треугольной пирамиды будет:

$$V=\frac{k}{2}\Big\{L(\delta+\tilde{\mu})+L(\delta-\tilde{\mu})-2L(\delta)+L(\delta+\tilde{\nu})+L(\delta-\tilde{\nu})-$$
$$-L(\delta+\lambda)-L(\delta-\lambda)\Big\}, \tag{5.65}$$

где

$$\cos\delta=\frac{\sin\tilde{\mu}\sin\tilde{\nu}}{\sqrt{\sin^2\tilde{\mu}+\sin^2\tilde{\nu}-\sin^2\lambda}}. \tag{5.66}$$

Кафедра геометрии. Поступила 15 ноября 1952 г.