УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Т. 113, кн. 10 СБОРНИК РАБОТ НИИММ им. Н. Г. ЧЕБОТАРЕВА *1953*

НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О НАХОЖДЕНИИ МГНОВЕННОГО ЦЕНТРА УСКОРЕНИЙ

К. А. Березин

Существующие в настоящее время методы решения задач о нахождении мгновенного центра ускорений движущейся плоской фигуры представляют из себя методы, требующие довольно кропотливых вычислений.

Первый метод основывается на применении двух формул:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

где ε — угловое ускорение фигуры относительно неподвижной плоскости, а ω — угловая скорость фигуры

$$MЦ=\frac{j_м}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}.$$

Формула вторая требует знания не только направления, но и величины абсолютного ускорения выбранного в фигуре полюса. Эта часть решения задачи и требует наиболее громоздких вычислений. В первом методе за полюс можно принять любую точку плоской фигуры.

Второй метод основан на разыскании кругов перегиба и Брессе. Во втором методе наибольшую трудность представляет отыскание диаметра круга Брессе. Поэтому этот метод и не нашел практического применения.

Второй метод требует строго фиксированного выбора полюса в плоской фигуре. За полюс принимается мгновенный центр вращения фигуры.

Что же касается определения диаметра круга перегибов, то он определяется простой формулой:

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}$$

где R_1 и R — радиусы кривизны неподвижной и подвижной центроид, в случае внешнего касания центроид и формулой:

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}$$

в случае внутреннего касания центроид, причем во второй формуле $R_1>R$.

Если центроиды представляют из себя не особенно сложные кривые, их радиусы кривизны определяются просто, следовательно, определяется просто и диаметр круга перегибов.

Предлагаемый новый более рациональный метод решения задачи кинематики о нахождении мгновенного центра ускорений, представляет комбинацию 1-го и 2-го метода. Так как во втором методе за начало координат принимают мгновенный центр вращения, в предлагаемом методе за полюс всегда принимают мгновенный центр скоростей фигуры. При таком способе решения задач знание величины абсолютного ускорения мгновенного центра вращения не требуется. Достаточно знать лишь его направление. Решение основано на применении двух формул:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

и формулы, определяющей диаметр круга перегибов:

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R_1},$$

при этом не требуется определять диаметр круга Брессе. Сначала мы рассмотрим частный случай движения, когда угловое ускорение фигуры отсутствует. В этом случае находим, что диаметр круга Брессе $= \infty$.

Пусть C — мгновенный центр вращения фигуры, в таком случае $\varepsilon = 0$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = 0$, следовательно, $\alpha = 0$. Это показывает, что мгновенный центр ускорений лежит на направлении абсолютного ускорения точки C, причем это абсолютное ускорение складывается: из нормального ускорения в переносном движении, нормального ускорения в относительном движении и добавочного ускорения. Все эти ускорения направлены по общей нормали к подвижной и неподвижной центроидам в точке их соприкосновения. Диаметр же круга перегибов имеет в этом случае вполне определенное значение. Знание прямой, на которой расположен мгновенный центр ускорений и диаметра круга перегибов вполне определяют положение мгновенного центра ускорений, а именно: он лежит на пересечении направления абсолютного ускорения мгновенного центра вращения C и круга перегибов, т. е. в полюсе перегибов K, отсюда вытекает следующая теорема: *Если движущаяся плоская фигура не обладает угловым ускорением относительно неподвижной плоскости, мгновенный центр ускорений фигуры совпадает с полюсом перегибов.*

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ

Пример I.

Плоский диск, имеющий форму круга радиуса r, катится без скольжения по прямой, имея постоянную скорость центра v. Найти мгновенный центр ускорений диска.

Центроиды в этом движении очевидны: неподвижная центроида — прямая. Подвижная центроида — окружность диска. Мгновенный центр вращения C есть точка соприкосновения центроид.

$R = r$, где R — радиус кривизны подвижной центроиды;

$R_1 = \infty$, где R_1 — радиус кривизны неподвижной центроиды. Ускорение точки C сводится только к одному нормальному ускорению в относительном движении и направлено от C к 0, по направлению общей нормали в точке соприкосновения центроид. $j_0 = 0$, следовательно, $\varepsilon = 0$, добавочное ускорение $k = 0$, т. к. траектория переносится параллельно самой себе.

Находим диаметр круга перегибов

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r}$$

отсюда $u = r$.

Следовательно, полюс перегибов совпадает с центром диска. Это и есть мгновенный центр ускорений диска для данного положения фигуры.

Пример II.

Шестерня радиуса r_2 катится без скольжения по неподвижной шестерне радиуса r_1. Центры шестерен 0 и 0_1. Кривошип 00_1 вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти мгновенный центр ускорений подвижной шестерни.

Принимаем за начало координат мгновенный центр вращения подвижной шестерни (точку соприкосновения шестерен). Абсолютное ускорение точки C состоит из нормального ускорения в переносном движении, направленного от C к O_1. Из нормального ускорения в относительном движении направленного от C к OO_1, и из добавочного ускорения, также направленного от C к 0.

Следовательно, абсолютное ускорение точки C совпадает с общей нормалью к центроидам в точке их соприкосновения. Так как $\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$ мгновенный центр ускорений лежит на направлении общей нормали. Он лежит и на круге перегибов, следовательно, находится в точке пересечения общей нормали к центроидам с кругом перегибов, т. е. совпадает с полюсом перегибов K,

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

откуда

$$CK = u = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Пример III.

Шестерня 1-я радиуса r катится внутри шестерни второй радиуса $R = 2r$, кривошип 00_1, приводящий в движение бегающую шестерню, имеет постоянную угловую скорость ω_0. Найти мгновенный центр ускорений подвижной шестерни.

За начало координат принимаем мгновенный центр вращения C. Центроиды очевидны: неподвижная центроида — окружность радиуса $2r$ с центром в точке 0 и подвижная центроида — окружность радиуса r с центром в точке 0_1.

Абсолютное ускорение точки C сводится к нормальному ускорению в переносном движении и направлено от C к 0, нормальному ускорению в относительном движении и направлено от C к 0_1, добавочного ускорения, направленного от C наружу.

Отсюда вытекает, что мгновенный центр ускорений лежит на общей нормали к центроидам в точке их соприкосновения; он лежит и на круге перегибов, следовательно, совпадает с полюсом перегибов K. Касание центроид внутреннее, причем $R_1 = 2r$ и $R = r$ следовательно,

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2r} = \frac{1}{2r}$$

или

$$u = 2r,$$

следовательно, мгновенный центр ускорений совпадает с центром неподвижной шестерни 0.

Пример IV.

Линейка эллипсографа AB длиной $2l$ приводится в движение кривошипом OD, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω, $AD = DB = l$.

Найти мгновенный центр ускорений линейки.

Находим мгновенный центр вращения C. Он лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к направлению V_A и V_B.

Центроиды очевидны: Неподвижная центроида — окружность радиуса $2l$ с центром в точке 0 и подвижная центроида — окружность радиуса l с центром в точке D. Направление абсолютного ускорения точки C совпадает с общей нормалью в точке соприкосновения центроид.

Решение задачи сводится к предыдущей.

Полюс перегибов совпадает с центром 0 неподвижной центроиды.

Рассмотрим общий случай, когда плоская фигура обладает угловым ускорением ε в движении относительно неподвижной плоскости. И в этом случае достаточно применить те же формулы, причем построение круга Брессе излишне. В самом деле, зная угол α, мы знаем направление радиуса-вектора мгновенного центра ускорений $СЦ$. Зная диаметр круга Лагира, мы можем его построить. Точка пересечения круга перегибов и направления $СЦ$ дает мгновенный центр ускорений фигуры, отсюда вытекает теорема:

Если плоская фигура движется в своей плоскости, имея угловое ускорение, относительно неподвижной плоскости, мгновенный центр ускорений фигуры лежит в точке пересечения прямой СЦ и круга перегибов.

ПРИМЕРЫ ПРИЛОЖЕНИЙ

Пример V.

Колесо радиуса $r = 0{,}5$ *м* катится без скольжения по прямолинейному рельсу, имея в данный момент в центре 0 скорость $v_0 = 0{,}5$ м/сек и замедление $j_0 = 0{,}5$ м/сек^2.

Найти мгновенный центр ускорений колеса.

Центроиды в этом движении очевидны.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

$$\varepsilon = -1 \ ^1/\text{сек}^2$$

$$\omega = 1 ^1/\text{сек}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -1$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4}$$

Следовательно, прямая $СЦ$ составляет с общей нормалью в точке соприкосновения центроид угол $-\frac{\pi}{4}$.

Определяем диаметр круга перегибов: $u = r$.

Строим круг перегибов $\Delta OЦC$ — прямоугольный при $Ц$,

$$CЦ = 0\,C \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0{,}3536 \text{ м}.$$

Пример VI.

Шестеренка радиуса $r = 12$ см приводится в движение кривошипом OA, вращающимся вокруг оси O неподвижной шестерни того же радиуса с угловым ускорением $1/сек^2$. Определить положение мгновенного центра ускорений $Ц$ подвижной шестерни.

Центроиды очевидны.

$$\varepsilon = \frac{j_A}{CA} = 16 \ {}^1/\text{сек}^2$$

$$V_A = 2 \cdot 24 = 48 \text{ см/сек}$$

$$\omega = \frac{V_A}{CA} = 4 \ {}^1/\text{сек}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

Следовательно, радиус — вектор $CЦ$ составляет с общей нормалью в точке соприкосновения центроид угол $\frac{\pi}{4}$.

Находим диаметр круга перегибов:

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$\Delta OCЦ$ — прямоуг. при точке $Ц$.

Отсюда

$$CЦ = CO \cdot \cos 45^\circ = 6\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} = 4{,}243 \text{ см}.$$

Приведенные выше решения многочисленных примеров убеждают в том, что предложенный метод очень быстро приводит к цели, позволяя избегнуть ряда ненужных вычислений и значительно упрощает решение практических задач.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Е. Жуковский. Кинематика, статика, динамика точки. Оборонгиз, 1950.
[2] И. Д. Жонглович, А. Я. Лисютин, Н. В. Розе. Механика материальной системы и твердого дела. ГТТИ, 1933.

Кафедра механики. Поступила 6. II. 1953 г.