ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 7 (446)

УДК 517.9

В.С. МОКЕЙЧЕВ, А.В. МОКЕЙЧЕВ

# НОВЫЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, II

Мы сохраняем обозначения, понятия, соглашения и нумерацию, использованные в [1].

Пусть $u$ — $\varphi$-решение линейной задачи (7), (8) т.е. задачи

$$(P(x,\partial/\partial x)-\lambda E)u=f(x)\in H,\quad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n;\quad lu=0,$$

и $u_k$ — вектор-столбец с координатами $u_{k,j}$, $j=1,\dots,m$, являющимися коэффициентами Фурье с номерами $(k,j)$ по последовательности $\varphi=\{e(j)y_{(k)},\ k\in\mathcal{N},\ j=1,\dots,m\}$. Если функции $y_{(k)}$ имеют производные порядка $\beta$, и ряд $\sum u_k y_{(k)}^{(\beta)}$ сходится по норме в некотором гильбертовом пространстве $H_{(\beta)}$, то его сумму $u^{(\beta)}$ следует назвать производной порядка $\beta$ от $\varphi$-распределения $u$. $\varphi$-распределение $u$ может быть дифференцируемым в $H_{(\beta)}$, но недифференцируемым в другом гильбертовом пространстве. Если $\varphi$-распределение $u$ имеет в $H_{(\beta)}$ производную порядка $\beta$ и $\alpha<\beta$, то даже в случае существования $u^{(\alpha)}$ включение $u^{(\alpha)}\in H_{(\beta)}$ может не выполниться. Простой пример: $\varphi$ совпадает с (1.4), $\beta=(1,1)$, $\alpha=(1,0)$, $H_{(\beta)}=L_m^2(b-a)$ и

$$u=\sum_{k_1}u_{k_1,0}\exp\left(2\pi ik_1\frac{x_1-a_1}{b_1-a_1}\right)+\sum_{k_2}u_{0,k_2}\exp\left(2\pi ik_2\frac{x_2-a_2}{b_2-a_2}\right).$$

**Теорема 2.3 (о глобальной регулярности).** *Пусть выполняются оценки* (2.1). *Тогда следующие утверждения равносильны*:

1. *для каждой $f(x)$ в случае существования $\varphi$-решения задачи* (7), (8) *оно имеет в $H_{(\beta)}$ производную порядка $\beta$*;
2. *при всех $\psi\in L_\varphi$ выполняются оценки*

$$c_4\|\psi^{(\beta)}\|_\beta-c(N)\|\psi(N,x)\|\le\|Q\psi\|,\tag{2.20}$$

*в которых $c_4>0$, $N$ и $c(N)$ не зависят от $\psi$ и $\|\cdot\|_\beta$ — символ нормы в $H_{(\beta)}$.*

**Доказательство.** Напомним, что оценки (2.1) имеют вид

$$c_1\|Q\psi\|-c(N)\|\psi(N,x)\|\le\|P_\lambda\psi\|\le c_2\|Q\psi\|+c(N)\|\psi(N,x)\|,$$

и $Q$ — $\varphi$-стационарный, взаимно однозначный оператор, определяемый равенствами $Qw=\sum q(k)w_k y_{(k)}$, в которых $q(k)$ — обратимые матрицы, не зависящие от $x$. Пусть имеет место утверждение 2, и $u$ — $\varphi$-решение задачи (7), (8). В силу (2.1) в $H$ по норме сходится ряд

$$\sum Q[u_k y_{(k)}]=\sum q(k)u_k y_{(k)}.$$

Отсюда и из оценок, используемых в утверждении 2, следует сходимость по норме в $H_{(\beta)}$ ряда $\sum u_k y_{(k)}^{(\beta)}$. А это означает, что $u$ имеет в $H_{(\beta)}$ производную $u^{(\beta)}$. Импликация $2\Rightarrow 1$ доказана.

Докажем обратную импликацию. В силу утверждения 1 и оценок (2.1) ряд $\sum u_k y_{(k)}^{(\beta)}$ сходится по норме в $H_{(\beta)}$, если в $H$ по норме сходится ряд $\sum q(k)u_k y_{(k)}$. Отсюда и из ортонормированности

$\varphi$ следует сходимость по норме в $H_{(\beta)}$ ряда $\sum(q(k))^{-1}v_k y_{(k)}^{(\beta)}$ при условии $\sum|v_k|^2 < +\infty$. Сказанное позволяет определить оператор $T$ равенствами

$$Tw = \sum(q(k))^{-1}w_k y_{(k)}^{(\beta)} \quad \forall w \in H.$$

Напомним, что $w_k$ — вектор с координатами $w_{k,j}$, $j = 1, \ldots, m$, и $w_{k,j}$ — коэффициент Фурье с номером $(k, j)$ $\varphi$-распределения $w$. Значит, $T$ определен на всем $H$. Докажем его замкнутость. Пусть $g \in H_{(\beta)}$. Тогда

$$\langle Tw, g\rangle_\beta = \sum w_k \bullet (((q(k))^*)^{-1}g_k).$$

Здесь и ниже $\langle\ ,\ \rangle_\beta$ — символ скалярного произведения в $H_{(\beta)}$, $\bullet$ — символ скалярного произведения в $\mathbb{C}^m$. Так как последний ряд сходится при любых числовых векторах $w_k$, удовлетворяющих условию $\sum|w_k|^2 < +\infty$, то в силу известной резонансной теоремы Э. Ландау

$$\gamma_0 = \sum|((q(k))^*)^{-1}g_k|^2 < +\infty.$$

Предположим, что $\|Tw(\nu) - v\|_\beta + \|w(\nu) - h\| \to 0$ при $\nu \to +\infty$. Тогда

$$|\langle T(w(\nu) - h), g\rangle_\beta| \le \sqrt{\gamma_0}\big(\sum|(w(\nu))_k - h_k|^2\big)^{1/2}.$$

Поэтому $|\langle T(w(\nu) - h), g\rangle_\beta| \le \sqrt{\gamma_0}\|w(\nu) - h\| \to 0$ при $\nu \to +\infty$. Другими словами, доказано, что $T(w(\nu) - h) \to 0$ слабо. Однако $Tw(\nu) \to v$ по норме, поэтому $Th = v$. Итак, доказано, что $T$ — замкнутый оператор, определенный на всем $H$. В силу теоремы Банаха о замкнутых операторах $T$ непрерывен, т. е. $\|\sum(q(k))^{-1}w_k y_{(k)}^{(\beta)}\|_\beta \le \|T\|\,\|w\|$. Отсюда легко следуют оценки (2.20). □

**Теорема 2.4 (об индивидуальной регулярности).** *Пусть $u$ — $\varphi$-решение задачи* (7), (8); *выполняются оценки* (2.1); *операторы $c_\alpha(x)$, $\alpha \in \Phi$, и функция $f(x)$ настолько гладки, что при некотором $\varphi$-стационарном операторе $\widetilde{Q}$, взаимно однозначно отображающем $\mathcal{D}_{\widetilde{Q}} \subset H$ на $H$, справедливо включение $u \in \mathcal{D}_{\widetilde{Q}}$ и имеет $\varphi$-решение уравнение*

$$[\widetilde{Q}(P(x, \partial/\partial x) - \widetilde{\lambda}E)]v = \widetilde{Q}f(x) - \widetilde{\lambda}\widetilde{Q}u, \tag{2.21}$$

*в котором $\widetilde{\lambda}$ — несобственное значение оператора $P_{\tilde{\lambda}}$; при некоторой постоянной $d_1 < c_1$ (см.* (2.1)) *и всех $\psi \in L_\varphi$*

$$\|(\widetilde{Q}P_{\tilde{\lambda}} - P_{\tilde{\lambda}}\widetilde{Q})\psi\| \le d_1\|P_{\tilde{\lambda}}\widetilde{Q}\psi\| + c(N)\|\psi(N, x)\|. \tag{2.22}$$

*Тогда*

$$\sum|q(k)\widetilde{q}(k)u_k|^2 < +\infty, \tag{2.23}$$

*где $q(k)$, $\widetilde{q}(k)$ — матрицы, определяемые $\varphi$-стационарностью соответственно $Q$, $\widetilde{Q}$.*

**Доказательство.** $\varphi$-решение уравнения (2.21) обозначим через $v$. В силу (2.1), (2.22) его коэффициенты Фурье $v_{k,j}$ удовлетворяют (2.23). По определению $\varphi$-решения имеем

$$\sum\widetilde{Q}(P(x, \partial/\partial x) - \widetilde{\lambda}E)[v_k y_{(k)}] = \widetilde{Q}f(x) - \widetilde{\lambda}\widetilde{Q}u,$$

и ряд сходится в $H$ по норме. Однако оператор $\widetilde{Q}^{-1}$ непрерывен, поэтому

$$\sum(P(x, \partial/\partial x) - \widetilde{\lambda}E)[v_k y_{(k)}] = f(x) - \widetilde{\lambda}u,$$

и ряд сходится в $H$ по норме. Следовательно, $v$ — $\varphi$-решение уравнения $(P(x, \partial/\partial x) - \widetilde{\lambda}E)z = f(x) - \widetilde{\lambda}u$, причем $u$ — также его $\varphi$-решение. Так как $\widetilde{\lambda}$ — несобственное значение оператора $P_{\tilde{\lambda}}$, то $u = v$. □

Применим полученные результаты к математической модели (1), (2), введя в нее спектральный параметр $\lambda$. Итак,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \lambda u = f(t,x), \quad H = L_1^2(\mathbb{R} \times (0,\pi)). \tag{2.24}$$

Спектр $\varphi$-задачи для (2.24) в случае

$$\varphi = \{\tfrac{1}{\pi} \exp(ik_1 t) \sin(k_2 x),\ k_1 = 0, \pm 1, \dots,\ k_2 = 1, 2, \dots\}$$

совпадает с множеством $\sigma = \{-k_1^2 + c^2 k_2^2,\ k_1 = 0, 1, \dots,\ k_2 = 1, 2, \dots\}$. Если $\lambda \notin \sigma$, то $\varphi$-задача однозначно разрешима, и ее решение имеет вид

$$\sum (f_{k_1,k_2}/(-k_1^2 + c^2 k_2^2)) \exp(ik_1 t) \sin(k_2 x).$$

Оно будет принадлежать $H$ при любой $f(x) \in H$ тогда и только тогда, когда $|k_1^2 - c^2 k_2^2| \geq \delta_1 > 0$ $\forall k_1, k_2$.

**Замечание 2.2.** Выше предполагалось, что оператор $Q$ взаимно однозначен. Без этого предположения теоремы 2.1–2.4 справедливы только тогда, когда множество всех линейно независимых решений уравнения $Qv = 0$ конечно. Если последнее множество бесконечно, то каждое $\lambda \in \mathbb{C}$ является собственным для $P_\lambda$, при этом для сохранения теоремы 2.3 нужно в утверждении 2 добавить требование: множество $\mathcal{N}_\beta = \{k : \det(q(k)) = 0\} \cap \{r : \|e(1) y_{(r)}^{(\beta)}\| \neq 0\}$ конечно.

## 3. Связь $\varphi$-решений с $\widetilde{\varphi}$-решениями

Предположим, что для задачи (7), (8) мы можем вычислить $\varphi$-решение $u$ и $\widetilde{\varphi}$-решение $v$. Возникает вопрос: какова связь объектов $u$ и $v$? Чтобы ответить на поставленный вопрос, обозначим через $P_\lambda$, $\widetilde{P}_\lambda$ операторы, порожденные соответственно $\varphi$- и $\widetilde{\varphi}$-задачами для (7), через $Q$, $\widetilde{Q}$ соответственно $\varphi$- и $\widetilde{\varphi}$-стационарные операторы. При этом будем предполагать, что последние два оператора взаимно однозначны и $\mathcal{D}_{P_\lambda} = \mathcal{D}_Q$, $\mathcal{D}_{\tilde{P}_\lambda} = \mathcal{D}_{\tilde{Q}}$. Напомним, что $\mathcal{D}_B$ — область определения оператора $B$. В общем случае $\mathcal{D}_B \subset \mathbb{D}'_\varphi$ либо $\mathcal{D}_B \subset \mathbb{D}'_{\tilde{\varphi}}$. Тот факт, что из оценок (2.1) следует равенство $\mathcal{D}_{P_\lambda} = \mathcal{D}_Q$, почти очевиден. Чтобы убедиться в обратном, достаточно повторить рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы в доказательстве импликации $1 \Rightarrow 2$ в теореме 2.3.

**Теорема 3.1.** *Предположим, что $\mathcal{D}_{P_\lambda} = \mathcal{D}_Q$, $\mathcal{D}_{\tilde{P}_\lambda} = \mathcal{D}_{\tilde{Q}}$, последовательности $\varphi$ и $\widetilde{\varphi}$ являются ортобазисами в гильбертовом пространстве $H_{(0)}$, и при каждом $p \in \mathcal{N}$ выполняются равенства*

$$P_\lambda \varphi_{(p)} = \sum a_{p,k} \widetilde{P}_\lambda \widetilde{\varphi}_{(k)}, \tag{3.1}$$

*причем ряды сходятся в $H$ по норме. Тогда $\varphi$-решение $u$ уравнения* (7) *продолжается до $\widetilde{\varphi}$-решения того же уравнения; если, кроме того, $\mathcal{D}_Q \subset H_{(0)}$, $\mathcal{D}_{\tilde{Q}} \subset H_{(0)}$, то $u$ и его продолжение $\widetilde{u}$ совпадают как элементы из $H_{(0)}$.*

**Доказательство.** В частном случае для конкретных $P$ и $\varphi$ теорема доказана в ([2], с. 196–200). Докажем ее в общем случае. В силу (3.1) область значений $\mathcal{J}_1$ оператора $P_\lambda$ содержится в области значений $\mathcal{J}_2$ оператора $\widetilde{P}_\lambda$. Так как выполняются оценки (2.1) и их аналоги, получающиеся заменой в (2.1) $P_\lambda$ на $\widetilde{P}_\lambda$, $Q$ на $\widetilde{Q}$ и $L_\varphi$ на $L_{\tilde{\varphi}}$, то в силу теоремы 2.1 $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ — подпространства в $H$, причем в силу взаимной однозначности $\widetilde{Q}$ последовательность

$$\{\widetilde{P}_\lambda (\widetilde{Q})^{-1} \widetilde{\varphi}_{(p)},\ p \in \widetilde{\mathcal{N}}\},\ \ \widetilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}, \tag{3.2}$$

является базисом Рисса в $\mathcal{J}_2$. Справедливость этого факта была установлена в процессе доказательства теоремы 2.2. При этом отмечалось, что в множестве $\mathcal{N} \setminus \widetilde{\mathcal{N}}$ число элементов конечно. Так как (3.2) — базис Рисса в $\mathcal{J}_2$ и $\widetilde{P}_\lambda \widetilde{\varphi}_{(k)} \in \mathcal{J}_2$, то

$$\widetilde{P}_\lambda \widetilde{\varphi}_{(k)} = \sum_p{}' \beta_{k,p} \widetilde{P}_\lambda \widetilde{\varphi}_{(p)} \quad \forall k \in \mathcal{N}. \tag{3.3}$$

Штрих указывает на то, что суммирование производится по всем $p \in \widetilde{\mathcal{N}}$. Из последних рассуждений следует, что наряду с (3.1) имеем

$$P_\lambda \varphi_{(k)} = \sum{}' \widetilde{a}_{k,p} \widetilde{P}_\lambda \widetilde{\varphi}_{(p)} \quad \forall k \in \mathcal{N}.$$

Таким образом, заменяя, если в этом есть необходимость, $\widetilde{\varphi}$ на последовательность $\{\widetilde{\varphi}_{(p)},\ p \in \widetilde{\mathcal{N}}\}$, добьемся того, что $\lambda$ станет несобственным значением оператора $\widetilde{P}_\lambda$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $\lambda$ — несобственное значение оператора $\widetilde{P}_\lambda$, т. е. $\widetilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$.

В силу (3.1), (3.2) имеем

$$P_\lambda u = \sum P_\lambda[u_p \varphi_{(p)}] = \sum_p \Big\{ \sum_q a_{q,p} \widetilde{P}_\lambda \widetilde{\varphi}_{(q)} \Big\} u_p. \tag{3.4}$$

Так как $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$, то существует такое $\widetilde{\varphi}$-распределение $v$, что

$$\widetilde{P}_\lambda v = P_\lambda u = \sum v_q \widetilde{P}_\lambda \widetilde{\varphi}_{(q)}. \tag{3.5}$$

Однако (3.2) — базис Рисса в $\mathcal{J}_2$. Поэтому равенства (3.4), (3.5) выполнятся тогда и только тогда, когда

$$v_q = \sum_p a_{p,q} u_p \quad \forall q \in \mathcal{N}. \tag{3.6}$$

Докажем, что $\varphi$-решение $u$ можно продолжить до $\widetilde{\varphi}$-решения $\widetilde{u}$. Обозначим через $L$ линейную оболочку множества $\varphi \cup \widetilde{\varphi}$. В силу (3.6) и конечности множества $\mathcal{N} \setminus \widetilde{\mathcal{N}}$ для каждой $\psi \in L$ ряд $\sum u_p \langle \psi, \varphi_{(p)} \rangle$ сходится. Поэтому можно ввести функционал $\widetilde{u}$, задаваемый на $L$ с помощью равенств $\widetilde{u}(\varphi) = \sum u_p \langle \psi, \varphi_{(p)} \rangle$. Очевидно, выписанный функционал является как $\varphi$-распределением, так и $\widetilde{\varphi}$-распределением, причем $\widetilde{u} = u$ на $L_\varphi$, и в силу (3.6) $\widetilde{u} = v$ на $L_{\widetilde{\varphi}}$. Следовательно, функционал $\widetilde{u}$ является как $\varphi$-решением, так и $\widetilde{\varphi}$-решением уравнения (7). Первое утверждение теоремы доказано. Чтобы доказать второе, заметим $\widetilde{u} = u$ на $L_\varphi$, причем $\widetilde{u} \in H_{(0)}$ и $u \in H_{(0)}$. Однако $\varphi$ — базис в $H_{(0)}$, поэтому $\|\widetilde{u} - u\|_0 = 0$. $\square$

## 4. Корректно разрешимая задача для дифференциальных квазиполиномов с постоянными коэффициентами

Пусть $P(z)$ — символ $(m,m)$ матричного дифференциального квазиполинома $P(\mathcal{D})$ с постоянными коэффициентами, т. е. при всех $z \in \mathbb{C}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$P(\mathcal{D}) \exp(z \bullet x) = \Big[ \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{j=1}^{M} a_{\alpha,j}(z^\alpha) \exp(z \bullet \tau_{\alpha,j}) \Big] \exp(z \bullet x) \equiv P(z) \exp(z \bullet x),$$

где множество мультииндексов $\Phi$, числовые векторы $\tau_{\alpha,j}$ и числовые матрицы $a_{\alpha,j}$ не зависят от $z$, $x$, причем $\Phi$ конечно.

Обозначим $\vec{\mu} = \mu \cdot t$, где $\mu \in \mathbb{C}$ и $t \in \mathbb{C}^n$, $\sigma_k = \{\mu : \det(P(\vec{\mu} + ik)) = 0\}$, $\sigma = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} \sigma_k$. Очевидно, скалярная функция $\det(P(\vec{\mu} + ik))$ при каждом $k$ аналитически зависит от $\mu$. Поэтому в случае $\det(P(\vec{\mu} + ik)) \not\equiv 0$ множество $\sigma_k$ счетно. Если каждое множество $\sigma_k$ счетно, то и множество $\sigma$ счетно. При этом пустое множество считаем счетным.

**Теорема 4.1.** *Пусть при некотором $t$ и каждом $k$ имеет место* $\det(P(\vec{\mu}+ik)) \not\equiv 0$. *Если* $\mu \notin \sigma$, *то в случае*

$$\varphi = \{e(j)\exp((\vec{\mu}+ik)\bullet x),\ k\in\mathbb{Z}^n,\ j=1,\dots,m\},\quad \Omega=(0,2\pi)^n$$

*$\varphi$-задача для уравнения $P(\mathcal{D})u = f \in L^2_m(\Omega)$ корректно разрешима.*

**Доказательство.** Но определению $\varphi$-решения имеем

$$P(\mathcal{D})u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} P(\vec{\mu}+ik)u_k \exp((\vec{\mu}+ik)\bullet x) = f.$$

Так как последовательность $\varphi$ является базисом в $L^2_m(\Omega)$, то $f = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k \exp((\vec{\mu}+ik)\bullet x)$. Поэтому $u_k = (P(\vec{\mu}+ik))^{-1}f_k$. Следовательно, $\varphi$-задача однозначно разрешима. Векторы $u_k$ при каждом $k$ непрерывно зависят от $f_k$, причем последние непрерывно зависят от $f$. Отсюда следует непрерывная зависимость $\varphi$-решения $u$ от $f$. $\square$

## 5. Приложения

Что касается математической модели (1), (2), то о ней подробно говорилось в конце второго раздела. Всюду ниже, если особо не оговорено, $\|\cdot\|$ — символ нормы в $H$, порожденной скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$.

1. *$\varphi$-задача в $L^2_m(\mathbb{R}^n)$.* Ниже предполагается, что $H = L^2_m(\mathbb{R}^n)$, $\varphi = \Big\{e(j)\prod\limits_{\nu=1}^{n} y_{(k_\nu,\nu)}(x_\nu),\ k_\nu \in \mathbb{Z}_+,\ j=1,\dots,m\Big\}$, для каждого $\nu$ последовательность $\{y_{(k_\nu,\nu)}(x_\nu),\ k_\nu\in\mathbb{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом в $L^2_1(\mathbb{R})$, причем

$$\begin{gathered} y_{(r,\nu)}(t) \in W_1^{+\infty,2}(\mathbb{R}),\quad y^{(s)}_{(r,\nu)}(t)\to 0,\quad s=0,1,\dots,\ \text{ при }\ |t|\to+\infty,\\ \left(\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + h_\nu(t) - \lambda_{r,\nu}\right)y_{(r,\nu)}(t) = 0\quad \forall t\in\mathbb{R}, \end{gathered} \tag{5.1}$$

функции $h_\nu(t)\in C_1^{+\infty}(\mathbb{R})$ удовлетворяют условиям $\operatorname{Re} h_\nu(t)\le \alpha_0$, в которых $\alpha_0$ не зависит от $t$, $\lambda_{r,\nu}\ne 0\ \forall r,\nu$.

Простейшим примером функций $y_{(r,\nu)}(t)$, удовлетворяющих отмеченным выше условиям, являются функции из ортонормированной последовательности Чебышева–Эрмита [3].

Рассмотрим только те уравнения (7), которые представимы в виде

$$\begin{aligned} P_1(x,\partial/\partial x)u \equiv \sum_{\alpha\in\Phi(2)} \Big[ a_\alpha(x)((\partial/\partial x)^2 + h)^\alpha &+ \\ + \sum_{\beta<\alpha} b_{\alpha,\beta}(x)(\partial/\partial x)^{\gamma(\alpha,\beta)}((\partial/\partial x)^2+h)^\beta \Big] u &- \lambda u = f(x),\quad x\in\mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Здесь, как и всюду ниже,

$$\begin{gathered} ((\partial/\partial x)^2 + h)^\beta \equiv \prod_{\nu=1}^{n} ((\partial/\partial x_\nu)^2 + h_\nu(x_\nu))^{\beta_\nu},\\ \gamma(\alpha;\beta) = (\operatorname{sgn}(\alpha_1-\beta_1),\dots,\operatorname{sgn}(\alpha_n-\beta_n));\ \ \operatorname{sgn}0=0;\ \ \operatorname{sgn}t = 1\ \ \forall t>0. \end{gathered}$$

Подчеркнем, что уравнения (7), в которых наибольшие мультииндексы имеют только четные координаты, всегда представимы в виде (5.2).

Удобно обозначить $(\Lambda_k)^\alpha \equiv \prod\limits_{\nu=1}^{n}(\lambda_{k,\nu})^{\alpha_\nu}$, $k=(k_1,\dots,k_n)$.

**Лемма 5.1.** *При каждом $\varepsilon > 0$, некоторой $c = c(\varepsilon)$ и всех $v(x) \in H$, удовлетворяющих условиям $\partial/\partial x_\nu v(x) \in H$, $|v(x)| \to 0$ при $|x| \to +\infty$, выполняются оценки*

$$\|\partial/\partial x_\nu v(x)\| \le \varepsilon \|((\partial/\partial x_\nu)^2 + h_\nu(x_\nu))v(x)\| + c\|v(x)\|. \tag{5.3}$$

**Доказательство.** Так как $\operatorname{Re} h_\nu(t) \le \alpha_0$, то

$$\|((\partial/\partial x_\nu)^2 + h_\nu(x_\nu) - \alpha_0 - \bar\varepsilon^2)v(x)\|\,\|v(x)\| \ge$$
$$\ge |\langle((\partial/\partial x_\nu)^2 - \bar\varepsilon^2)v(x),\ v(x)\rangle + \langle(h_\nu(x_\nu) - \alpha_0)v(x),\ v(x)\rangle| \ge$$
$$\ge |\langle \partial/\partial x_\nu v(x),\ \partial/\partial x_\nu v(x)\rangle + \bar\varepsilon^2\langle v(x),\ v(x)\rangle + \langle -(\operatorname{Re} h_\nu(x_\nu) - \alpha_0)v(x),\ v(x)\rangle| \ge$$
$$\ge \|\partial/\partial x_\nu v(x)\|^2 + \bar\varepsilon^2\|v(x)\|^2.$$

Поэтому $\bar\varepsilon^2\|v(x)\| \le \|((\partial/\partial x_\nu)^2 + h_\nu(x_\nu) - \alpha_0 - \bar\varepsilon^2)v(x)\|$. Учитывая последние две серии оценок, получим $\bar\varepsilon^2\|\partial/\partial x_\nu v(x)\|^2 \le \|((\partial/\partial x_\nu)^2 + h_\nu(x_\nu) - \alpha_0 - \bar\varepsilon^2)v(x)\|^2$. Отсюда легко следует, что $\varepsilon\|((\partial/\partial x_\nu)^2 + h_\nu(x_\nu))v(x)\| + \sqrt{|\alpha_0\varepsilon^2 + 1|}\|v(x)\| \ge \|\partial/\partial x_\nu v(x)\|$. □

**Лемма 5.2.** *Пусть при всех $v(x) \in H$, удовлетворяющих условиям $\partial/\partial x_\nu v(x) \in H$ $\forall\nu$, $|v(x)| \to 0$ при $|x| \to +\infty$, для каждого $\varepsilon > 0$ выполняются оценки (5.3), элементы матриц $\widetilde{c}_{\alpha,\beta}(x)$ измеримы и ограничены в существенном, для всех $\beta < \alpha$, $\alpha \in \Phi(2)$*

$$|(\Lambda_k)^\beta|\Big(1 + \sum_{\alpha\in\Phi(2)}\sum_{\gamma\le\alpha}|(\Lambda_k)^\gamma|\Big)^{-1} \to 0 \quad \textit{если} \quad |k| \to +\infty. \tag{5.4}$$

*Тогда при каждом $\varepsilon_1 > 0$, некоторой $c = c(\varepsilon_1)$ и всех $\psi(x) \in L_\varphi$*

$$S_1 \equiv \Big\|\sum_{\alpha\in\Phi(2)}\sum_{\beta<\alpha}\widetilde{c}_{\alpha,\beta}(x)(\partial/\partial x)^{\gamma(\alpha,\beta)}((\partial/\partial x)^2 + h)^\beta\psi(x)\Big\| \le$$
$$\le \varepsilon_1\Big(\sum_{\alpha\in\Phi(2)}\sum_{\beta\le\alpha}\|((\partial/\partial x)^2 + h)^\beta\psi(x)\|\Big) + c\|\psi(x)\|. \tag{5.5}$$

**Доказательство.** Левая часть доказываемой оценки не больше

$$S_2 \equiv B\sum_{\alpha\in\Phi(2)}\sum_{\beta<\alpha}\|(\partial/\partial x)^{\gamma(\alpha,\beta)}((\partial/\partial x)^2 + h)^\beta\psi(x)\|,$$

причем $B$ не зависит от $\psi(x)$. Так как $\psi(x) \in L_\varphi$, то

$$((\partial/\partial x)^2 + h)^\beta\psi(x) = \sum_k \psi(k)(\Lambda_k)^\beta\Big(\prod_{\nu=1}^n y_{(k_\nu,\nu)}(x_\nu)\Big), \tag{5.6}$$

и ненулевых слагаемых конечное число. Поэтому

$$(\partial/\partial x)^{\gamma(\alpha,\beta)}((\partial/\partial x)^2 + h)^\beta\psi(x) \in H \ \ \forall\beta \le \alpha \in \Phi(2), \ \ |((\partial/\partial x)^2 + h)^\beta\psi(x)| \to 0 \ \text{ при } \ |x| \to +\infty,$$

ибо имеет место (5.1). Отсюда и из (5.3) следует

$$S_2 \le \varepsilon\sum_{\alpha\in\Phi(2)}\sum_{\beta<\alpha}\|((\partial/\partial x)^2 + h)^{\gamma(\alpha,\beta)+\beta}\psi(x)\| + c\sum_{\alpha\in\Phi(2)}\Big(\sum_{\beta<\alpha}\|((\partial/\partial x)^2 + h)^\beta\psi(x)\|\Big).$$

С другой стороны, в силу (5.4), (5.6) имеем

$$c\sum_{\alpha\in\Phi(2)}\sum_{\beta<\alpha}\|((\partial/\partial x)^2 + h)^\beta\psi(x)\| \le \varepsilon_2\sum_{\alpha\in\Phi(2)}\sum_{\beta\le\alpha}\|((\partial/\partial x)^2 + h)^\beta\psi(x)\| + c(\varepsilon_2)\|\psi(x)\|, \quad 0 < \varepsilon_2 < \varepsilon.$$

Полагая $\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_2$ и учитывая $\gamma(\alpha,\beta) + \beta \le \alpha$, получим (5.5). □

**Лемма 5.3.** *Предположим, что* $a_\alpha(x) \in C^{\{0\}}_{m,m}(\mathbb{R}^n)$, *для любого* $\varepsilon_2 > 0$, *некоторого* $\rho = \rho(\varepsilon_2)$ *и всех* $x$, $y$, *удовлетворяющих условиям* $\|x\| \geq \rho$, $\|y\| \geq \rho$, *выполняются оценки*

$$\sum_{\alpha\in\Phi(2)} |a_\alpha(x) - a_\alpha(y)| \leq \varepsilon_2. \tag{5.7}$$

*Тогда существуют такие скалярные вещественные функции* $\omega_r(x) \in C_1^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$, *что* $(\omega_1(x))^2 + \cdots + (\omega_M(x))^2 \equiv 1$, $\omega_M(\tau) = 1$ *при* $|\tau| \geq \rho_2$; *для всех* $x \in \operatorname{supp}(\omega_r(x))$, $y \in \operatorname{supp}(\omega_r(x))$ *и любого* $r$ *выполняются оценки* (5.7).

**Доказательство.** Множества $\Omega_r = \{x : |x - \tau(r)| < \rho_1\}$ выберем так, чтобы $\{|x| \leq \rho\} \subset \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_{M-1}$ и при всех $r$, $x \in \overline{\Omega}_r$, $y \in \overline{\Omega}_r$ выполнились оценки (5.7). При $r = 1, \ldots, M-1$ положим $\widetilde{f}_r(x) = \exp(|x-\tau(r)|^2 - p_1^2)$, если $x \in \Omega_r$ и $\widetilde{f}_r(x) = 0$ для $x \notin \Omega_r$; $\widetilde{f}_M(x) = \exp((\rho^2 - |x|^2)^{-1})$ при $|x| > \rho$ и $\widetilde{f}_M(x) = 0$ при $|x| \leq \rho$. Так как $\{|x| \leq \rho\} \subset \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_{M-1}$, то $s(x) = ((\widetilde{f}_1(x))^2 + \cdots + (\widetilde{f}_{M-1}(x))^2 + (\widetilde{f}_M(x))^2)^{1/2} > 0$. Поэтому функции $\omega_r(x) = \widetilde{f}_r(x)/s(x)$ принадлежат $C_1^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$ и $(\omega_1(x))^2 + \cdots + (\omega_M(x))^2 = 1$. Если $x \in \operatorname{supp}\omega_r(x)$, $y \in \operatorname{supp}\omega_r(x)$ и $r \leq M-1$, то $x \in \Omega_r$, $y \in \Omega_r$, и выполняется (5.7). В случае $x, y \in \operatorname{supp}\omega_M(x)$ имеем $|x| \geq \rho$, $|y| \geq \rho$, поэтому выполняются (5.7). Фиксируем $\rho_2$ так, чтобы $\{|x| \geq \rho_2\} \supset \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_{M-1}$. Для $|x| \geq \rho_2$ имеем $x \notin \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_{M-1}$, $\omega_r(x) = 0\ \forall r \leq M-1$, т. е. $\omega_M(x) = 1$. $\square$

Удобно через $C_\nu((\mathcal{D}^2 + h)^\beta)$ обозначить множество всех тех функций $a(x) \in C_\nu^{\{\alpha\}}(\mathbb{R}^n)$, для которых при всех $w(x) \in C_1^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$ в равенствах

$$((\partial/\partial x)^2 + h)^\beta (w(x)a(x)) \equiv \sum_{\delta\leq\beta} C_{\delta,\beta}(x)(\partial/\partial x)^{\gamma(\delta,\beta)}((\partial/\partial x)^2 + h)^\delta w(x)$$

функции $C_{\delta,\beta}(x)$, не зависящие от $w(x)$, ограничены. Условие $a(x) \in C_\nu((\mathcal{D}^2 + h)^\beta)$ означает, что при $\gamma \neq 0$ производные $a^{(\gamma)}(x)$ достаточно быстро убывают (естественно при условии $\gamma \leq \beta$).

**Теорема 5.1.** *Предположим, что при всех* $\alpha \in \Phi(2)$, $\beta \in \Phi(2)$ *выполняются включения* $a_\alpha(x) \in C_{m,m}((\mathcal{D}^2 + h)^{2\beta})$ *и функции* $a_\alpha(x)$ *имеют пределы при* $|x| \to +\infty$; *элементы матриц* $B_{\alpha,\beta}(x)$ *измеримы и ограничены в существенном*; *при некоторых* $g_1 > 0$, $t \in \mathbb{C}$ *и всех* $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^n$, $z \in \mathbb{C}^n$ *имеют место оценки*

$$\left|\left(tE + \sum_{\alpha\in\Phi(2)} a_\alpha(x)(\Lambda_k)^\alpha\right)z\right|^2 \geq g_1\left[(d(t))^2 + \sum_{\alpha\in\Phi(2)}\sum_{\beta\leq\alpha} |(\Lambda_k)^\beta|^2\right]|z|^2, \tag{5.8}$$

*в которых* $d(t) \to +\infty$ *при* $|t| \to +\infty$; *для всех* $\beta < \alpha$, $\alpha \in \Phi(2)$ *и* $|k| \to +\infty$

$$\left(|(\Lambda_k)^\beta|\left(1 + \sum_{\alpha\in\Phi(2)}\sum_{\gamma\leq\alpha} |(\Lambda_k)^\gamma|\right)^{-1}\right) \to 0;$$

*при каждом* $\varepsilon > 0$ *и всех функциях* $v(x) \in H$, *удовлетворяющих условиям* $(\partial/\partial x_\nu v(x)) \in H\ \forall\nu$; $|v(x)| \to 0$ *при* $|x| \to +\infty$, *выполняются оценки* (5.3).

*Тогда*

1. *спектр* $\varphi$*-задачи для уравнения* (7) *точечен*;
2. *если* $\varphi$*-решение* $u$ *уравнения* (7) *существует, то оно удовлетворяет условию*

$$\sum_k \sum_{\alpha\in\Phi(2)}\sum_{\beta\leq\alpha} |(\Lambda_k)^\beta|^2 |u_k|^2 < +\infty.$$

**Доказательство.** На первом этапе докажем теорему для частного случая, когда $B_{\alpha,\beta}(x)$ — нулевые матрицы. Через $\mathcal{L}_t(y)$ обозначим дифференциальный полином

$$tE + \sum_{\alpha\in\Phi(2)} a_\alpha(y)((\partial/\partial x)^2 + h)^\alpha;$$

через $q(z)$ — скалярный полином, удовлетворяющий условию

$$|q(\Lambda_k)| \geq \sum_{\alpha\in\Phi(2)} \sum_{\beta\leq\alpha} |(\Lambda_k)^\beta| \quad \forall k\in\mathbb{Z}^n;$$

через $Q$ — $\varphi$-стационарный оператор, определяемый равенствами

$$Qw = \sum_k q(\Lambda_k) w_k \Big(\prod_{j=1}^n y_{(k_j,j)}(x_j)\Big).$$

Отметим, что в силу (5.8) за дифференциальный полином $q(\partial/\partial x)$ можно взять полином $\mathcal{L}_t(y)e(1)/g_1$, в котором $|t|$ достаточно велико.

Фиксируем малое число $\varepsilon>0$ и функции $\omega_1(x),\dots,\omega_M(x)$, построенные в лемме 5.3. Тогда для $\psi(x)\in L_\varphi$ имеем $\|\mathcal{L}_t(y)\psi(x)\|\geq F_1-F_2-F_3$, где

$$F_1 = \Big(\sum_{\nu=1}^M \|\mathcal{L}_t(\tau(\nu))(\omega_\nu(x)\psi(x))\|^2\Big)^{1/2};$$

$$F_2 = \Big(\sum_{\nu=1}^M \|(\mathcal{L}_0(x)-\mathcal{L}_0(\tau(\nu)))(\omega_\nu(x)\psi(x))\|^2\Big)^{1/2};$$

$$F_3 = \Big(\sum_{\nu=1}^M \|\omega_\nu(x)\mathcal{L}_0(x)\psi(x)-\mathcal{L}_0(x)(\omega_\nu(x)\psi(x))\|^2\Big)^{1/2}.$$

Так как имеет место (5.7), $\tau(\nu)\in\Omega_\nu$ и

$$\|(\mathcal{L}_0(x)-\mathcal{L}_0(\tau(\nu)))(\omega_\nu(x)\psi(x))\|^2 = \int_{\Omega_\nu} |(\mathcal{L}_0(x)-\mathcal{L}_0(\tau(\nu)))(\omega_\nu(x)\psi(x))|^2 dx,$$

то

$$F_2 \leq \varepsilon\Big(\sum_{\nu=1}^M \sum_{\alpha\in\Phi(2)} \|((\partial/\partial x)^2+h)^\alpha(\omega_\nu(x)\psi(x))\|^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq \varepsilon\Big(\sum_{\nu=1}^M \sum_{\alpha\in\Phi(2)} \|\omega_\nu(x)((\partial/\partial x)^2+h)^\alpha\psi(x)\|^2\Big)^{1/2} +$$

$$+\varepsilon\Big(\sum_{\nu=1}^M \sum_{\alpha\in\Phi(2)} \|((\partial/\partial x)^2+h)^\alpha(\omega_\nu(x)\psi(x))-\omega_\nu(x)((\partial/\partial x)^2+h)^\alpha\psi(x)\|^2\Big)^{1/2}.$$

В силу выбора $\omega_1(x),\dots,\omega_M(x)$ первая группа слагаемых совпадает с

$$F_{2,1} \equiv \varepsilon\Big(\sum_{\alpha\in\Phi(2)} \|((\partial/x)^2+h)^\alpha\psi(x)\|^2\Big)^{1/2}.$$

К оценке второй группы слагаемых применима лемма 5.2. Поэтому

$$F_2 \leq \varepsilon\Big(\sum_{\alpha\in\Phi(2)} \|((\partial/\partial x)^2+h)^\alpha\psi(x)\|^2\Big)^{1/2} +$$

$$+\varepsilon_1\Big(\sum_{\alpha\in\Phi(2)} \sum_{\beta\leq\alpha} \|((\partial/\partial x)^2+h)^\beta\psi(x)\|^2\Big)^{1/2} + c\|\psi(x)\|. \quad (5.9)$$

К оценке $F_3$ также можно применить лемму 5.2, т. е.

$$F_3 \leq \varepsilon\Big(\sum_{\alpha\in\Phi(2)} \sum_{\beta\leq\alpha} \|((\partial/\partial x)^2+h)^\beta\psi(x)\|^2\Big)^{1/2} + c\|\psi(x)\|.$$

Таким образом, доказано, что

$$F_2 + F_3 \leq 3\varepsilon\Big(\sum_{\alpha\in\Phi(2)}\sum_{\beta\leq\alpha}\|((\partial/\partial x)^2+h)^\beta\psi(x)\|^2\Big)^{1/2} + c\|\psi(x)\|. \tag{5.10}$$

Напомним, что несущественные постоянные мы обозначаем одними и теми же буквами. Труднее оценить снизу величину $F_1$. Так как $(\omega_\nu(x)\psi(x))^{(\beta)} \to 0$ для всех $\beta$ и $\nu$, если $|x| \to +\infty$, то

$$\langle(\omega_\nu(x)\psi(x))^{(\beta)},\ e(j)y_{(k)}(x)\rangle = (-1)^{[\beta]}\langle\omega_\nu(x)\psi(x),\ e(j)y_{(k)}^{(\beta)}(x)\rangle.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}&\langle((\partial/\partial x)^2+h)^\beta(\omega_\nu(x)\psi(x)),\ e(j)y_{(k)}(x)\rangle = \\ &\qquad = \langle\omega_\nu(x)\psi(x),\ ((\partial/\partial x)^2+\overline{h})^\beta(e(j)y_{(k)}(x))\rangle = (\Lambda_k)^\beta\langle\omega_\nu(x)\psi(x),\ e(j)y_{(k)}(x)\rangle.\end{aligned}$$

Из выписанных равенств и ортонормированности $\varphi$, во-первых, следует сходимость по норме рядов

$$\sum_k(\Lambda_k)^\beta z_k y_{(k)}(x) \quad \forall\beta\leq\alpha,\ \ \forall\alpha\in\Phi(2),$$

в которых $z_k$ — вектор-столбец с координатами $z_{k,j} = \langle\omega_\nu(x)\psi(x),\ e(j)y_{(k)}(x)\rangle$, $j = 1,\dots,m$, во-вторых, справедливо равенство

$$F_1 = \sum_{\nu=1}^{M}\Big(\sum_k\Big|\Big(tE + \sum_{\alpha\in\Phi(2)}a_\alpha(\tau(\nu))(\Lambda_k)^\alpha\Big)z_k\Big|^2\Big)^{1/2}.$$

Учитывая (5.8), получим

$$F_1 \geq \Big(g_1\sum_{\nu=1}^{M}\sum_{\alpha\in\Phi(2)}\sum_{\beta\leq\alpha}\|((\partial/\partial x)^2+h)^\beta(\omega_\nu(x)\psi(x))\|^2 + g_1(d(t))^2\|\omega_\nu(x)\psi(x)\|^2\Big)^{1/2}. \tag{5.11}$$

Так как

$$\begin{aligned}&\|((\partial/\partial x)^2+h)^\beta(\omega_\nu(x)\psi(x))\|^2 \geq \frac{1}{2}\|\omega_\nu(x)((\partial/\partial x)^2+h)^\beta\psi(x)\|^2 - \\ &\qquad - \|\omega_\nu(x)((\partial/\partial x)^2+h)^\beta\psi(x) - ((\partial/\partial x)^2+h)^\beta(\omega_\nu(x)\psi(x))\|^2,\end{aligned}$$

то в силу леммы 5.2 при каждом $\varepsilon_1 > 0$, не зависящим от $\varepsilon$,

$$\begin{aligned}&\|((\partial/\partial x)^2+h)^\beta(\omega_\nu(x)\psi(x))\|^2 \geq \frac{1}{2}\|\omega_\nu(x)((\partial/\partial x)^2+h)^\beta\psi(x)\|^2 - \\ &\qquad - \varepsilon_1\sum_{\gamma\leq\beta}\|((\partial/\partial x)^2+h)^\gamma\psi(x)\|^2 - c\|\psi(x)\|^2.\end{aligned}$$

Отсюда и из (5.11) следует неравенство

$$F_1^2 \geq (\tfrac{g_1}{2} - \varepsilon_1 B)\Big(\sum_{\alpha\in\Phi(2)}\sum_{\beta\leq\alpha}\|((\partial/\partial x)^2+h)^\beta\psi(x)\|^2\Big) + ((d(t))^2 - c)\|\psi(x)\|^2.$$

В нем $B$ не зависит от $\varepsilon_1$, но зависит от $\varepsilon$. Таким образом, доказано, что в случае $(d(t))^2 \geq c$ имеет место

$$F_1 - (F_2+F_3) \geq (g_1/2 - \varepsilon_1 B - 3\varepsilon)\Big(\sum_{\alpha\in\Phi(2)}\sum_{\beta\leq\alpha}\|((\partial/\partial x)^2+h)^\beta\psi(x)\|^2\Big)^{1/2} + ((d(t))^2 - c)^{1/2}\|\psi(x)\|.$$

Здесь $\varepsilon$, $\varepsilon_1$ — положительные числа, которые можно выбрать сколь угодно малыми; $g_1$, $B$, $c$ не зависят от $\psi(x)$ и от $t$; $g_1$ не зависит от $\varepsilon$, $\varepsilon_1$; $g_1$, $B$ не зависит от $\varepsilon_1$. С другой стороны,

$$\|Q\psi(x)\|^2 = \sum_k \sum_{\alpha\in\Phi(2)} \sum_{\beta\leq\alpha} |(\Lambda_k)^\beta|^2 |\psi_k|^2.$$

Поэтому выполняются оценки

$$\|\mathcal{L}_t(x)\psi(x)\| \geq g_2\|Q\psi(x)\| + ((d(t))^2 - c)^{1/2}\|\psi(x)\|. \tag{5.12}$$

Следовательно, выполняются аналоги оценок (2.1). Обозначим через $\mathcal{L}^+_{\overline{t}}(x)$ оператор, формально сопряженный к $\mathcal{L}_t(x)$. В силу предположений относительно $a_\alpha(x)$ оператор $\mathcal{L}^+_{\overline{t}}(x)$ определяется равенствами

$$\mathcal{L}^+_{\overline{t}}(x)\psi(x) = \sum_{\alpha\in\Phi(2)} (a_\alpha(x))^*((\partial/\partial x)^2 + \overline{h})^\alpha\psi(x) + \overline{t}\psi(x) +$$
$$+ \sum_{\alpha\in\Phi(2)} \sum_{\beta<\alpha} \widetilde{B}_{\alpha,\beta}(x)(\partial/\partial x)^{\gamma(\alpha,\beta)}((\partial/\partial x)^2 + \overline{h})^\beta\psi(x) \quad \forall\psi(x)\in L_\varphi,$$

причем элементы матриц $\widetilde{B}_{\alpha,\beta}(x)$ ограничены и измеримы. Так как матрицы $a_\alpha(x)$ конечномерны и квадратны, то в силу (5.8)

$$\left|\left(\overline{t}E + \sum_{\alpha\in\Phi(2)} (a_\alpha(x))^*(\overline{\Lambda}_k)^\alpha\right)z\right|^2 \geq g_1\left((d(t))^2 + \sum_{\alpha\in\Phi(2)} \sum_{\beta\leq\alpha} |(\Lambda_k)^\beta|^2\right)|z|^2, \tag{5.13}$$

причем $g_1$ и $d(t)$ — объекты, используемые в (5.8). Оценки (5.13), как доказано ранее, гарантируют

$$\left\|\overline{t}E + \sum_{\alpha\in\Phi(2)} (a_\alpha(x))^*((\partial/\partial x)^2 + \overline{h})^\alpha\psi(x)\right\| \geq g_2\|Q\psi(x)\| - ((d(t))^2 - c)^{1/2}\|\psi(x)\|.$$

Отсюда, а также из леммы 5.2 следует справедливость аналогов оценок (2.8). Так как $\mathcal{D}_Q \subset H$, то аналоги включений (2.11) выполняются автоматически.

Убедимся в том, что при каждом достаточно малом $c_3 > 0$ выполняются аналоги оценок (2.13). Пусть $\psi(x)\in L_\varphi$, $v(x)\in L_\varphi$. Тогда

$$S_3 \equiv \langle (Q^+)^{-1}\psi(x),\ (Q\mathcal{L}_t(x)Q^{-1} - \mathcal{L}_t(x))v(x)\rangle = \langle (((Q^+)^{-1}\mathcal{L}^+_{\overline{t}}(x) - \mathcal{L}^+_{\overline{t}}(x)(Q^+)^{-1})\psi(x),\ v(x)\rangle.$$

Подчеркнем, что возможность интегрирования по частям и исчезновение внеинтегральных членов при интегрировании по частям гарантируется предположениями относительно $a_\alpha(x)$, $y_{(k,\nu)}(x_\nu)$. Запишем полином $q(\xi)$ в виде $\sum\limits_{\alpha\in\Phi(2)} l_\alpha(\xi)^\alpha$. Очевидно,

$$Q\mathcal{L}_t(x)Q^{-1}v(x) = \sum_{\tilde\alpha\in\Phi(2)} \sum_{\alpha\in\Phi(2)} l_{\tilde\alpha}((\partial/\partial x)^2 + h)^{\tilde\alpha}[a_\alpha(x)((\partial/\partial x)^2 + h)^\alpha(Q^{-1}v(x))] =$$
$$= \sum_{\tilde\alpha\in\Phi(2)} \sum_{\alpha\in\Phi(2)} l_{\tilde\alpha} \sum_{\beta\leq\tilde\alpha} c_{\beta,\alpha,\tilde\alpha}(x)(\partial/\partial x)^{\gamma(\tilde\alpha,\beta)}((\partial/\partial x)^2 + h)^{\beta+\alpha}Q^{-1}v(x).$$

Обозначение $\gamma(\tilde\alpha,\beta)$ введено в начале п. 5. В последних равенствах $a_\alpha(x) = c_{\beta,\alpha,\tilde\alpha}(x)$, если $\tilde\alpha = \beta$. Другими словами, сумма членов, для которых $\beta = \tilde\alpha$, совпадает с $\mathcal{L}_t(x)v(x)$. Поэтому

$$S_3 = \sum_{\tilde\alpha\in\Phi(2)} \sum_{\alpha\in\Phi(2)} \overline{l}_{\tilde\alpha} \sum_{\beta<\tilde\alpha} \langle (c_{\beta,\alpha,\tilde\alpha}(x))^*(Q^+)^{-1}\psi(x),\ (\partial/\partial x)^{\gamma(\tilde\alpha,\beta)}((\partial/\partial x)^2 + h)^{\beta+\alpha}(Q^{-1}v(x))\rangle.$$

Предположения относительно $a_\alpha(x)$, $y_{(k,\nu)}(t)$ позволяют интегрировать по частям $(2\beta)$ раз. При этом внеинтегральные члены исчезнут и получим

$$S_3 = \sum_{\tilde\alpha\in\Phi(2)} \sum_{\alpha\in\Phi(2)} \overline{l}_{\tilde\alpha} \sum_{\beta<\tilde\alpha} \sum_{\delta\leq\beta} \langle c_{\beta,\delta,\alpha,\tilde\alpha}(x)(\partial/\partial x)^{\gamma(\delta,\beta)}((\partial/\partial x)^2 + \overline{h})^\delta(Q^+)^{-1}\psi(x),\ ((\partial/\partial x)^2 + h)^\alpha(Q^{-1}v(x))\rangle,$$

причем требования $a_\alpha(x) \in C_{m,m}((\mathcal{D}^2+h)^\beta)$ гарантируют ограниченность элементов матриц $c_{\beta,\delta,\alpha,\tilde\alpha}(x)$. Поэтому

$$|S_3| \le B \sum_{\tilde\alpha\in\Phi(2)} \sum_{\alpha\in\Phi(2)} \sum_{\beta<\tilde\alpha} \sum_{\delta\le\beta} \|(\partial/\partial x)^{\gamma(\delta,\beta)}((\partial/\partial x)^2+\overline{h})^\delta (Q^+)^{-1}\psi(x)\| \, \|((\partial/\partial x)^2+h)^\alpha (Q^{-1}v(x))\|.$$

В силу (5.5), (5,6) имеем

$$\|(\partial/\partial x)^{\gamma(\delta,\beta)}((\partial/\partial x)^2+\overline{h})^\delta (Q^+)^{-1}\psi(x)\| \le B_1\|((\partial/\partial x)^2+h)^{\gamma(\delta,\beta)+\beta}(Q^+)^{-1}\psi(x)\|;$$
$$\|((\partial/\partial x)^2+h)^\alpha (Q^{-1}v(x))\| \le B_2\|v(x)\|.$$

Из последних трех серий оценок следует

$$|S_3| \le \widetilde{B} \sum_{\tilde\alpha\in\Phi(2)} \sum_{\beta<\tilde\alpha} \|((\partial/\partial x)^2+\overline{h})^\beta (Q^+)^{-1}\psi(x)\| \, \|v(x)\|. \tag{5.14}$$

При этом постоянная $\widetilde{B}$ не зависит от $\psi(x)$ и от $v(x)$. Если $\beta<\tilde\alpha$, то в силу (5.4), (5.5) имеем

$$\|((\partial/\partial x)^2+\overline{h})^\beta (Q^+)^{-1}\psi(x) = \Big(\sum_k |\psi_k|^2 |(\Lambda_k)^\beta|^2 |q(\Lambda_k)|^{-2}\Big)^{1/2} \le$$
$$\le \varepsilon_1\Big(\sum_k |\psi_k|^2\Big)^{1/2} + c\Big(\sum_{|k|\le N} |\psi_k|^2\Big)^{1/2} \le \varepsilon_1\|\psi(x)\| + c\|\psi(N,x)\|.$$

Итак, доказано, что

$$|S_3| \le (\widetilde{B}\varepsilon_1\|\psi(x)\| + \tilde c\|\psi(N,x)\|)\|v(x)\|,$$

причем $\widetilde{B}$ не зависит от $\varepsilon_1$, и $\varepsilon_1$ можно выбрать сколь угодно малым. Так как в последней оценке постоянные не зависят от $v(x)$, и множество $L_\varphi$ плотно в $H$, то при $c_3=\widetilde{B}\varepsilon_1$ выполняется аналог оценок (2.13). В силу (5.12), (5.13) при больших $|t|$ числа $t$, $\bar t$ являются несобственными значениями соответственно операторов $\mathcal{L}_t(x)$, $\mathcal{L}^+_{\bar t}(x)$. При этом выполняются аналоги предположений теоремы 2.2. Поэтому последние числа $t$, $\bar t$ являются регулярными значениями соответственно операторов $\mathcal{L}_t(x)$, $\mathcal{L}^+_{\bar t}(x)$. Отсюда, из (5.12) и из леммы 5.2 легко следует, что каждое несобственное значение $\varphi$-задачи для уравнения (7) является регулярным. Первое утверждение теоремы доказано. Второе — простое следствие оценок (5.8). □

**Замечание 5.1.** Среди предположений теоремы 5.1 наиболее надуманным является предположение $a_\alpha(x)\in C_{m,m}((\mathcal{D}^2+h)^\beta)$. Естественно возникает вопрос: нельзя ли ограничиться непрерывностью $a_\alpha(x)$? В общем случае нельзя. Это объясняется тем, что в случае $\operatorname{Re} h_\nu(t)=h_\nu(t)$ функции $h_\nu(t)$ обязаны быть неограниченными, что следует из теоремы А.М. Молчанова ([3], с. 393). Поэтому отказ от последнего включения хотя бы при одном $\alpha$ привел бы к тому, что при исследовании спектра $\varphi$-задачи для уравнения (7) члены вида $b_{\alpha,\beta}(x)=(\partial/\partial x)^{\gamma(\alpha,\beta)}((\partial/\partial x)^2+h)^\beta$ при $\beta<\alpha$ играли бы существенную роль.

**Замечание 5.2.** Мы не доказываем индивидуальную теорему о гладкости. Ее доказательство мало чем отличается от доказательства аналогичной теоремы для $(b-a)$-периодической задачи. Последняя будет доказана в третьей части. Для $\varphi$-задачи, рассматриваемой в части II, индивидуальная теорема о гладкости гласит:

> пусть выполняются предположения теоремы 5.1 и при $\gamma$, не превосходящем некоторого $\tilde\beta\in\Phi(2)$, включения

$$a_\alpha(x)\in C_{m,m}((\mathcal{D}^2+h)^{2(\beta+\gamma)});\quad b_{\alpha,\beta}(x)\in C_{m,m}((\mathcal{D}^2+h)^\gamma)\ \ \forall\alpha\in\Phi(2),\ \ \forall\beta\in\Phi(2);$$
$$((\partial/\partial x)^2+h)^\gamma f(x)\in L^2_m(\mathbb{R}^n);$$

тогда в случае существования $\varphi$-решение $u$ уравнения (7) удовлетворяет условию

$$\sum_{\alpha\in\Phi(2)}\sum_{\beta\le\alpha}\sum_{k}|(\Lambda_k)^{\beta+\gamma}|^2|u_k|^2<+\infty.$$

Напомним, что $u_k$ — вектор-столбец из соответствующих коэффициентов Фурье $\varphi$-решения $u$.

## Литература


1. Мокейчев В.С., Мокейчев А.В. *Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных.* I. // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 1. – С. 25–35.
2. Мокейчев В.С. *Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 222 с.
3. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 526 с.



*Казанский государственный университет*



*Поступила* 18.03.1996