Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, № 5, с. 70–74 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение

А.М. БИКЧЕНТАЕВ

ОБ ОПЕРАТОРНО МОНОТОННЫХ И ОПЕРАТОРНО ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЯХ

Аннотация. Для непрерывной функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ установлены критерии монотонности и выпуклости относительно произвольной C^*-алгебры. Получена оценка меры некомпактности разности произведений элементов W^*-алгебры. Установлен критерий перестановочности τ-измеримого положительного оператора с положительным оператором из алгебры фон Неймана.

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, C^*-алгебра, W^*-алгебра, операторно монотонная функция, операторно выпуклая функция, мера некомпактности, след, измеримый оператор, перестановочность операторов.

УДК: 517.983 : 517.986

Введение. Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра, $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$, $B \in \mathcal{A}^+$ и $-B \le A \le B$. Тогда существуют такие $X \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ и $Y \in \mathcal{A}^+$, что $A = XY + YX$, $B = X^2 + Y^2$. Для непрерывной функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ установлены критерии монотонности и выпуклости относительно C^*-алгебры $\mathcal{A}$. Получена оценка меры некомпактности разности произведений элементов W^*-алгебры.

Известно [1], что C^*-алгебра $\mathcal{A}$ абелева, если из условия $0 \le A \le B$, $A, B \in \mathcal{A}$, следует $A^2 \le B^2$. Другими словами, $\mathcal{A}$ абелева, если $0 \le AB + BA$ для всех $A, B \in \mathcal{A}^+$. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, A — положительный τ-измеримый оператор и $B \in \mathcal{M}^+$. Имеем $AB = BA$ тогда и только тогда, когда $0 \le AB^n + B^nA$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $A^2 \le (A + tB^n)^2$ для всех $t > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, то $AB = BA$.

Определения и обозначения. C^*-алгеброй называется комплексная банахова $*$-алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Для C^*-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$, $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ и $\mathcal{A}^+$ обозначим ее подмножества проекторов, эрмитовых элементов и положительных элементов соответственно. Пусть $\mathcal{A}^1 = \{X \in \mathcal{A} : \|X\| \le 1\}$. Конус $\mathcal{A}^+$ задает на $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ отношение порядка. Функциональное исчисление для элементов $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ позволяет с вещественной непрерывной функцией ассоциировать отображение из некоторого подмножества $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ в $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$.

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — C^*-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, I – тождественный оператор в $\mathcal{H}$. Коммутантом множества $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется множество $\mathcal{X}' = \{Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : XY = YX \ (X \in \mathcal{X})\}$. $*$-Подалгебра $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется алгеброй фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$. W^*-алгеброй называется C^*-алгебра $\mathcal{A}$, имеющая преддвойственное

Поступила 13.11.2015

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Республики Татарстан (проект № 15-41-02433).

банахово пространство $\mathcal{A}_*$: $\mathcal{A} \simeq (\mathcal{A}_*)^*$. По теореме Гельфанда–Наймарка любую C^*-алгебру можно реализовать как C^*-подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$.

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Самосопряженный оператор присоединен к $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда все проекторы из его спектрального разложения единицы принадлежат $\mathcal{M}$. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(I - P) < \varepsilon$. Множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ всех τ-измеримых операторов является $*$-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [2]. Частичный порядок в $\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$, порожденный собственным конусом $\widetilde{\mathcal{M}}^+$, будем обозначать через $\leq$.

Пусть Φ — класс всех непрерывных функций $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Для C^*-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ обозначим совокупность функций $f \in \Phi$, удовлетворяющих условиям

a) $f(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha f(X) + (1-\alpha) f(Y)$ для всех $X, Y \in \mathcal{A}^+$ и $\alpha \in [0,1]$;

b) $f(U^*XU) \leq U^* f(X) U$ для всех $X \in \mathcal{A}^+$ и $U \in \mathcal{A}^1$.

Пусть $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ — класс функций $f \in \Phi$, удовлетворяющих условиям

c) $f(X) \leq f(Y)$ для всех $X, Y \in \mathcal{A}^+$ с $X \leq Y$;

d) $f(U^*XU) \geq U^* f(X) U$ для всех $X \in \mathcal{A}^+$ и $U \in \mathcal{A}^1$.

Классы $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ были введены в ([3], с. 40). Условия a) и c) изучались в [4]–[6].

Пусть $\mathcal{A}$ абелева, $f \in \Phi$ и $f(0) \leq 0$. Тогда $f \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow f$ выпукла и a)$\Rightarrow$b); обратная импликация неверна ([7], с. 456). Имеем $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow f$ квазивогнута (см. [8], с. 70).

Из результатов [9], [10] следует, что выполнение одного из условий a) или b) для алгебры фон Неймана $\mathcal{A} \otimes \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ влечет справедливость другого для алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$. Аналогичное утверждение справедливо и для пары условий c), d).

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ с $\dim \mathcal{H} = \infty$. Тогда класс $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ есть совокупность всех операторно выпуклых функций $f \in \Phi$ с $f(0) \leq 0$. Если $f(0) \leq 0$, то a)$\Leftrightarrow$b) ([10], теорема 2.1). Класс $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ состоит из всех операторно монотонных функций $f \in \Phi$ и c)$\Leftrightarrow$d), см. ([9]; [10], теорема 2.5).

2. Основные результаты. Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра. Если функция $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ непрерывна, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ (соответственно $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$) и $f_n \to f$ поточечно при $n \to \infty$, то $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ (соответственно $f \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$). Если $f, g \in \Phi$ удовлетворяют условию c) и $g(0) \geq 0$, то суперпозиция $f \circ g$ удовлетворяет c). Если $f, g \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ и $g(0) \geq 0$, то $f \circ g \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра, $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$, $B \in \mathcal{A}^+$ и $-B \leq A \leq B$. Тогда существуют такие $X \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ и $Y \in \mathcal{A}^+$, что $A = XY + YX$, $B = X^2 + Y^2$.*

Схема доказательства. Положим

$$X = \frac{1}{2}\big(\sqrt{A+B} - \sqrt{B-A}\big), \quad Y = \frac{1}{2}\big(\sqrt{A+B} + \sqrt{B-A}\big) \tag{1}$$

и воспользуемся операторной монотонностью функции $f(t) = \sqrt{t}$ $(t \geq 0)$. Из (1) видно, что если $A \in \mathcal{A}^+$, то и $X \in \mathcal{A}^+$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра. Для функции $f \in \Phi$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *f удовлетворяет условию* c),

(ii) *$f(XY + YX) \leq f(X^2 + Y^2)$ для всех $X, Y \in \mathcal{A}^+$ с $XY + YX \in \mathcal{A}^+$.*

Схема доказательства. (i)⇒(ii). В силу неравенства $(X-Y)^2 \geq 0$ имеем $0 \leq XY + YX \leq X^2 + Y^2$. Ипликация (ii)⇒(i) следует из леммы 1.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра. Для функции $f \in \Phi$ следующие условия эквивалентны:*
(i) *f удовлетворяет условию* a),
(ii) *$f(Y+\lambda(Y-X)) \geq f(Y)+\lambda(f(Y)-f(X))$ для всех $\lambda \geq 0$ и $X, Y \in \mathcal{A}^+$ с $Y+\lambda(Y-X) \in \mathcal{A}^+$.*

Схема доказательства. (i)⇒(ii). Зафиксируем произвольные $\lambda \geq 0$ и $A, B \in \mathcal{A}^+$ с $A+\lambda(A-B) \in \mathcal{A}^+$. Положим

$$Y = A + \lambda(A-B), \quad \alpha = \lambda(1+\lambda)^{-1}, \quad X = B.$$

Нетрудно видеть, что $A = \alpha X + (1-\alpha)Y$. Поэтому $f(A) \leq \alpha f(X) + (1-\alpha)f(Y) = \lambda(1+\lambda)^{-1}f(B) + (1+\lambda)^{-1}f(A+\lambda(A-B))$, т. е. $f(A+\lambda(A-B)) \geq f(A) + \lambda(f(A)-f(B))$.

(ii)⇒(i). Зафиксируем произвольные $A, B \in \mathcal{A}^+$ и α из $(0,1]$. Положим

$$Y = \alpha A + (1-\alpha)B, \quad X = B, \quad \lambda = \alpha^{-1} - 1.$$

Тогда $A = Y + \lambda(Y-X)$. Поэтому

$$f(A) = f(Y+\lambda(Y-X)) \geq f(Y) + \lambda(f(Y)-f(X)) = \alpha^{-1}f(\alpha A + (1-\alpha)B) - (\alpha^{-1}-1)f(B),$$

т. е. $f(\alpha A + (1-\alpha)B) \leq \alpha f(A) + (1-\alpha)f(B)$.

В следующих двух следствиях (вытекающих из теорем 2.4 и 2.5 [10] соответственно) $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ с $\dim \mathcal{H} = \infty$.

Следствие 1. Пусть $f \in \Phi$ и $g(t) = tf(t)$, $t \geq 0$. Следующие условия эквивалентны:
(i) функция f операторно монотонна на интервале $(0, +\infty)$,
(ii) функция g удовлетворяет условию (ii) теоремы 2.

Следствие 2. Пусть $f \in \Phi$ и $f(t) \leq 0$ для всех $t \geq 0$. Следующие условия эквивалентны:
(i) функция f удовлетворяет условию (ii) теоремы 2,
(ii) функция $-f$ удовлетворяет условию (ii) теоремы 1.

Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра и отображение $\rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ удовлетворяет условиям (i)–(iii) из [11]. В теореме 2 [11] доказано, что

$$\rho\Big(\prod_{k=1}^{n} A_k - \prod_{k=1}^{n} B_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \rho(A_k - B_k) \ \text{ для всех } \ A_k, B_k \in \mathcal{A}^1, \ \ k = 1, \ldots, n.$$

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо и отображение $\rho : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^+$ такое, что*

$$\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B) \ \text{ и } \ \rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B) \ \text{ для всех } \ A, B \in \mathcal{R}.$$

Пусть $n \geq 2$, число $\varepsilon > 0$ и элементы $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ принадлежат $\mathcal{R}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(A_k - B_k) < \varepsilon \Rightarrow \rho\Big(\prod_{k=1}^{n} A_k - \prod_{k=1}^{n} B_k\Big) < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} S_k \varepsilon^{n-1-k}, \tag{2}$$

где S_k — k-я элементарная симметрическая функция от $\rho(B_1), \ldots, \rho(B_n)$.

Схема доказательства. Воспользуемся индукцией по n. Если $n = 2$ и $\rho(A_1 - B_1) + \rho(A_2 - B_2) < \varepsilon$, то

$$\begin{aligned}\rho(A_1A_2 - B_1B_2) &= \rho((A_1-B_1)(A_2-B_2) + B_1(A_2-B_2) + (A_1-B_1)B_2) \leq \\ &\leq \rho(A_1-B_1)\rho(A_2-B_2) + \rho(B_1)\rho(A_2-B_2) + \rho(B_2)\rho(A_1-B_1) < \\ &< \varepsilon(\varepsilon + \rho(B_1) + \rho(B_2)),\end{aligned}$$

т. е. $\rho(A_1-B_1)+\rho(A_2-B_2) < \varepsilon \Rightarrow \rho(A_1A_2-B_1B_2) < \varepsilon(\varepsilon+\rho(B_1)+\rho(B_2))$. Таким образом, для $n=2$ утверждение (2) выполнено. Далее можно модифицировать доказательство теоремы 3.8.10 из [12] для $\mathcal{R}=\mathbb{C}$ и $\rho=|\cdot|$. □

Замечание 1. Если ρ — субмультипликативная идеальная полунорма на C^*-алгебре $\mathcal{R}$, то теорема 3 обобщает теорему 2 [11]. Условия теоремы 3 выполнены для произвольной меры некомпактности (определение см. в [11]) ρ на W^*-алгебре $\mathcal{R}$.

Пример. Через $\mu_t(X)$ обозначим *перестановку* оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Если $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}$, то $\mu_{s+t}(A+B) \le \mu_s(A)+\mu_t(B)$ и $\mu_{s+t}(AB) \le \mu_s(A)\mu_t(B)$ для всех $s,t>0$ [13]. Поэтому для $\mathcal{R}=\widetilde{\mathcal{M}}$ и $\rho(X)=\lim\limits_{t\to+\infty}\mu_t(X)$, $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$, выполнены все условия теоремы 3.

Лемма 2. *Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$. Если $AP+PA \ge 0$, то $AP{=}PA$.*

Схема доказательства. Поскольку $(A+P)^2 = A^2+P+AP+PA \ge A^2+P \ge A^2$, имеем $A+P \ge \sqrt{A^2+P} \ge A$ в силу операторной монотонности функции $f(t)=\sqrt{t}$ $(t \ge 0)$. Пусть

$$X = \sqrt{A^2+P} - A.$$

Тогда $P \ge X \ge 0$ и в силу ([14], гл. 2, п. 2.17) получаем $PX = XP = X$. Поскольку $X+A=\sqrt{A^2+P}$, имеем $P = X^2+AX+XA$. Теперь из равенства $PX=XP$ получаем $AX^2 = X^2A$. Отсюда с использованием спектральной теоремы и топологии t_τ сходимости по мере [2] имеем $AX=XA$ (подробные рассуждения приведены в доказательстве теоремы 4.5 [15]). Следовательно, $A\sqrt{A^2+P} = \sqrt{A^2+P}A$. Тогда $(A^2+P)A = \sqrt{A^2+P}A\sqrt{A^2+P} = (\sqrt{A^2+P}A\sqrt{A^2+P})^* = ((A^2+P)A)^* = A(A^2+P)$ и $AP=PA$.

Замечание 2. Для $\mathcal{M}=\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\tau=\mathrm{tr}$ имеем $\widetilde{\mathcal{M}}=\mathcal{M}$. В этом случае утверждение леммы 2 установлено в ([16], лемма). Другие критерии перестановочности оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ и проектора представлены в [17], [18]. Операторы вида $\sqrt{A^2+B}-A$ с $A,B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{sa}}$ исследованы в [19].

Теорема 4. *Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $B \in \mathcal{M}^+$. Имеем $AB=BA$ тогда и только тогда, когда $0 \le AB^n + B^nA$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Схема доказательства. Модифицируем доказательство теоремы 1 [16]: вместо равномерной операторной топологии применяем топологию t_τ сходимости по мере и воспользуемся t_τ-непрерывностью операторных функций [20] и леммой 2. □

Следствие 3. Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $B \in \mathcal{M}^+$. Если $A^2 \le (A+tB^n)^2$ для всех $t>0$ и $n \in \mathbb{N}$, то $AB=BA$.

Доказательство. Имеем $0 \le (AB^n+B^nA)+tB^{2n}$ для всех $t>0$ и $n \in \mathbb{N}$. Переходя в топологии t_τ к пределу при $t \to 0$ в последнем неравенстве, в силу t_τ-замкнутости конуса $\widetilde{\mathcal{M}}^+$ получаем $0 \le AB^n+B^nA$ для всех $n \in \mathbb{N}$. □

Литература

[1] Ogasawara T. *A theorem on operator algebras*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A. **18** (3), 307–309 (1955).

[2] Nelson E. *Notes on non-commutative integration*, J. Funct. Anal. **15** (2), 103–116 (1974).

[3] Бикчентаев А.М. *F-нормированные идеальные пространства на алгебрах Неймана.* Дисс. … канд. физ.-матем. наук (Казань, 1990).

[4] Osaka H., Silvestrov S.D., Tomiyama J. *Monotone operator functions on C^*-algebras*, Intern. J. Math. **16** (2), 181–196 (2005).

[5] Хоа Динь Чунг, Тихонов О.Е. *К теории операторно монотонных и операторно выпуклых функций*, Изв. вузов. Матем., № 3, 9–14 (2010).
[6] Tikhonov O.E. *A note on definition of matrix convex functions*, Linear Algebra Appl. **416** (2–3) 773–775 (2006).
[7] Маршалл А., Олкин И. *Неравенства: теория мажоризации и ее применения* (Мир, М., 1983).
[8] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов* (Наука, М., 1978).
[9] Hansen F. *An operator inequality*, Math. Ann. **246** (3), 249–250 (1980).
[10] Hansen F., Pedersen G.K. *Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem*, Math. Ann. **253** (3), 229–241 (1982).
[11] Бикчентаев А.М. *Идеальные F-нормы на C^*-алгебрах*, Изв. вузов. Матем., № 1, 69–74 (2015).
[12] Mitrinović D.S. *Analytic inequalities*. In cooperation with P.M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165 (Springer-Verlag, New York–Berlin, 1970).
[13] Fack T., Kosaki H. *Generalized s-numbers of τ-measurable operators*, Pacific J. Math. **123** (2), 269–300 (1986).
[14] Strătilă Ş., Zsidó L. *Lectures on von Neumann algebras* (Abacus Press, England, 1979).
[15] Бикчентаев А.М. *О нормальных τ-измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана*, Матем. заметки **96** (3), 350–360 (2014).
[16] Uchiyama M. *Commutativity of selfadjoint operators*, Pacific J. Math. **161** (2), 385–392 (1993).
[17] Бикчентаев А.М. *Перестановочность операторов и характеризация следа на C^*-алгебрах*, Докл. РАН **448** (5), 506–509 (2013).
[18] Bikchentaev A.M. *Commutation of projections and characterization of traces on von Neumann algebras*. III, Intern. J. Theor. Physics **54** (12), 4482–4493 (2015).
[19] Бикчентаев А.М. *Об одной лемме Ф.А. Березина*, Матем. заметки **87** (5), 796–800 (2010).
[20] Тихонов О.Е. *Непрерывность операторных функций в топологиях, связанных со следом на алгебре Неймана*, Изв. вузов. Матем., № 1, 77–79 (1987).

А.М. Бикчентаев

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

A.M. Bikchentaev

On operator monotone and operator convex functions

Abstract. We establish monotonicity and convexity criteria for a continuous function $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ with respect to any C^*-algebra. We obtain some estimates for noncompactness measure of W^*-algebra elements products differences. We also give a commutativity criterion for a positive τ-measurable operator and a positive operator from a von Neumann algebra.

Keywords: Hilbert space, von Neumann algebra, C^*-algebra, W^*-algebra, operator monotone function, operator convex function, measure of noncompactness, trace, measurable operator, commutativity of operators.

A.M. Bikchentaev

Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru