Известия вузов. Математика
2017, № 3, с. 58–67

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

И.В. ФИЛИМОНОВА, Т.С. ХАЧЛАЕВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ПОЛУОСИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. Рассматриваются решения полулинейного обыкновенного дифференциального уравнения с нелинейным членом типа Эмдена–Фаулера. На случай уравнения, содержащего младшую производную, распространяются результаты, изложенные в книге Р. Беллмана об асимптотическом поведении всех решений уравнения Эмдена–Фаулера, определенных в окрестности бесконечности.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, нелинейное уравнение, полулинейное уравнение, уравнение Эмдена–Фаулера, асимптотика решений, положительное решение, существование решения, принцип максимума.

УДК: 517.923

Введение

Рассматриваются решения уравнения

$$z'' + kz' - x^p|z|^{\sigma-1}z = 0, \tag{1}$$

где $\sigma > 1$, $k, p = \mathrm{const}$. Изучается асимптотическое поведение при $x \to \infty$ решений этого уравнения, определенных при $x > x_0 > 0$.

Так как коэффициент перед нелинейным членом в (1) отрицательный, то решение не может иметь положительных максимумов и отрицательных минимумов, поэтому начиная с некоторого момента решение уравнения (1) — монотонная функция. Это позволяет ограничиться рассмотрением положительных решений, и нелинейный член писать коротко $x^p z^\sigma$.

В случае $k = 0$ уравнение (1) — хорошо исследованное уравнение Эмдена–Фаулера. Асимптотическое поведение решений уравнения Эмдена–Фаулера изучено Р. Беллманом ([1], гл. 7). Для полноты картины формулировка результата [1] приводится в теореме Б.

Отметим, что при $k < 0$ уравнение (1) заменой $s = e^{-kx}$ преобразуется в уравнение $z_{ss} = (\ln s)^p (sk)^{-2} z^\sigma$. Решениям, определенным при больших x, будут отвечать решения, определенные при больших s. Решения уравнения $z_{ss} = a(s) z^\sigma$ рассматривались в работе [2]. Как следствие теоремы 4 из работы [2] может быть получен один из наших результатов для случая $k < 0$, $p < -1$.

Уравнение (1) при $k \neq 0$ возникало при изучении эллиптических задач в работах [3]–[6]. В [3] для исследования асимптотического поведения решений полулинейного дивергентного эллиптического уравнения в цилиндрической области приведены оценки сверху решений

Поступила 17.09.2015

уравнения (1). В работе [5] уравнение (1) использовалось для изучения решений недивергентного эллиптического уравнения во внешней к компакту области. В [5] для случая $p=0$, $k<0$ получено асимптотическое разложение решения в ряд.

Асимптотическое поведение решений уравнений с частными производными не всегда соответствует поведению решений предполагаемого обыкновенного уравнения [7]. Мы изучаем свойства решений уравнения (1) и надеемся, что это поможет потом и в некоторых других задачах из уравнений с частными производными.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Нетривиальное решение $z(x)$ уравнения* (1)*, определенное при больших x, при $x\to\infty$ имеет вид*:

a) $z(x)=\pm\bigl(k\frac{1+p}{1-\sigma}\bigr)^{\frac{1}{\sigma-1}}\,x^{-(1+p)/(\sigma-1)}\cdot(1+o(1))$, *если* $k<0$, $p>-1$,

b) $z(x)=\pm\bigl(\frac{k}{1-\sigma}\bigr)^{\frac{1}{\sigma-1}}\,\ln^{-1/(\sigma-1)}x\cdot(1+o(1))$, *если* $k<0$, $p=-1$,

c) $z(x)=C(e^{-kx}+O(e^{-\alpha x}))$, *где* $C\neq 0$, $\alpha\in(k,k\sigma)$ *можно выбрать произвольно, если* $k>0$, $p\geq -1$,

d) $z(x)=C(1+O(x^{p+1}))$, *где* $C\neq 0$,
$z(x)=C(e^{-kx}+O(e^{-\alpha x}))$, *где* $C\neq 0$, $\alpha\in(k,k\sigma)$ *можно выбрать произвольно,*
$z(x)=\pm\bigl(\frac{k(p+1)}{1-\sigma}\bigr)^{1/(\sigma-1)}x^{(p+1)/(1-\sigma)}\cdot(1+o(1))$, *если* $k>0$, $p<-1$,

e) $z(x)=C(1+O(x^{p+1}))$, *где* $C\neq 0$, *если* $k<0$, $p<-1$.

Приведем результат Р. Беллмана для случая $k=0$.

Теорема Б ([1])**.** *Пусть $z(x)$ — неотрицательное, определенное при $x\geq x_0$, решение уравнения $z''-x^pz^\sigma=0$. Тогда $z(x)$ при $x\to\infty$ имеет асимптотическое представление вида*

a) $z(x)\sim\bigl[\frac{(p+2)(\sigma+p+1)}{(\sigma-1)^2}\bigr]^{\frac{1}{\sigma-1}}x^{-\frac{p+2}{\sigma-1}}$, $z(x)=a_1t+a_2+(1+o(1))\frac{a_1\sigma x^{\sigma+p+2}}{(\sigma+p+1)(\sigma+p+2)}$, *где* $a_1>0$, ($\sigma+p+2=0$, $z(x)=a_1x+(1+o(1))a_1\ln x$, *где* $a_1>0$), $z(x)=a_2+(1+o(1))\frac{a_2^\sigma x^{p+2}}{(p+1)(p+2)}$, *где* $a_2>0$, *если* $p+\sigma+1<0$,

b) $z(x)=a_2+(1+o(1))\frac{a_2^\sigma x^{p+2}}{(p+1)(p+2)}$, *где* $a_2>0$, *если* $p+2<0\leq p+\sigma+1$,

c) $z(x)\sim\bigl((\sigma-1)\ln x\bigr)^{-\frac{1}{\sigma-1}}$, *если* $p=-2$,

d) $z(x)=\bigl(\frac{(p+2)(p+\sigma+1)}{(1-\sigma)^2}\bigr)^{\frac{1}{\sigma-1}}x^{-\frac{p+2}{\sigma-1}}(1+o(1))$, *если* $p>-2$.

1. Вспомогательные сведения

Из принципа максимума вытекает

Теорема 2. *Пусть $z(x)$ — решение уравнения* (1)*, а $z_1(x)$ — верхнее решение уравнения* (1) *при $x\geq x_0$, причем обе эти функции стремятся к нулю при $x\to\infty$. Тогда если $z(x_0)\leq z_1(x_0)$, то $z(x)\leq z_1(x)$ при $x>x_0$.*

Доказательство. Допустим, что неравенство не верно, тогда в некоторой точке x_1 неравенство нарушается и, следовательно, $z_1(x_1)-z(x_1)<0$. Функция $z_1(x)-z(x)$ в точке x_0 положительна и стремится к нулю при $x\to\infty$. Значит, в некоторой точке $z_1(x)-z(x)$ имеет отрицательный минимум. Однако при $x\geq x_0$ функция $z_1(x)$ — верхнее решение, поэтому

$$(z_1(x)-z(x))''+k(z_1(x)-z(x))'-x^p\frac{|z_1(x)|^\sigma-|z(x)|^\sigma}{z_1(x)-z(x)}(z_1(x)-z(x))\leq 0,$$

а в точке отрицательного минимума функции $z_1(x)-z(x)$ левая часть неравенства положительна, поэтому допущение не верно. □

Так как $\sigma > 1$, то из того, что $z_1(x)$ — верхнее решение уравнения (1) при $x \geq x_0$ вытекает, что $Cz_1(x)$, где $C > 1$ — также верхнее решение уравнения (1) при $x \geq x_0$.

Замечание 1. Решение уравнения (1), стремящееся к нулю при $x \to \infty$, ограничено сверху любым верхним решением $z_1(x)$ уравнения (1), стремящимся к нулю при $x \to \infty$, т. е. $z(x) < Cz_1(x)$ при $x \geq x_0$ с достаточно большой $C > 1$.

Аналогично, решение уравнения (1), стремящееся к нулю, ограничено снизу любым стремящимся к нулю нижним решением $z_0(x)$ уравнения (1), т. е. $z(x) > Cz_0(x)$ при $x \geq x_0$ и некотором $0 < C < 1$.

2. Решения с вертикальными асимптотами

Рассмотрим частный случай уравнения (1), положив $p = 0$. Покажем, что тогда уравнение имеет решения с двумя вертикальными асимптотами. В дальнейшем это поможет получить априорную оценку решений уравнения (1), определенных на неограниченном интервале.

Лемма 1. *Уравнение $z'' + kz' - z^\sigma = 0$ имеет положительное решение с двумя вертикальными асимптотами.*

Доказательство. Если $k = 0$, то прямое вычисление показывает, что решение с начальными условиями $z(0) = 1$, $z'(0) = 0$ будет четной положительной функцией с вертикальными асимптотами.

Для произвольного k достаточно показать, что решение с начальными условиями $z(0) = 1$, $z'(0) = 0$ имеет вертикальную асимптоту при $x > 0$. Существование асимптоты при $x < 0$ вытекает из того, что при замене $\widetilde{x} = -x$ в уравнении изменится только знак перед k.

Ясно, что решение с начальными условиями $z(0) = 1$, $z'(0) = 0$ будет возрастающей функцией при $x > 0$. Более того, если z не имеет асимптоты, то $z(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

Если $k < 0$, то $z'' - z^\sigma = -kz' \geq 0$, т. е. исследуемое решение z является нижним решением уравнения $y'' - y^\sigma = 0$. Выберем $\delta > 0$ и определим y при $x > \delta$, как решение $y'' - y^\sigma = 0$ с начальными условиями $y(\delta)$, $y'(\delta)$, где $y(\delta) = z(\delta)$, $z'(\delta) > y'(\delta) > 0$. Тогда $y < z$ при $x > \delta$, так как иначе график решения y должен был бы быть выше графика нижнего решения z между точек их пересечения, что не так в окрестности $x = \delta$. Так как y имеет вертикальную асимптоту, то $z > y$ также имеет вертикальную асимптоту.

Рассмотрим теперь случай $k > 0$. Умножая уравнение на z', получим

$$\left(\frac{z'^2}{2}\right)' - \left(\frac{z^{\sigma+1}}{\sigma+1}\right)' = -k(z')^2 < 0.$$

Следовательно, $\frac{z'^2}{2} - \frac{z^{\sigma+1}}{\sigma+1} < -\frac{1}{\sigma+1} < 0$ при $x > 0$, поэтому $z' < \sqrt{\frac{2}{\sigma+1}} z^{(\sigma+1)/2}$.

Поскольку исследуемое решение z неограниченно возрастает, найдется δ такое, что при $x > \delta$ выполнено $k\sqrt{\frac{2}{\sigma+1}} z^{(\sigma+1)/2} < z^\sigma/2$. Таким образом, при $x > \delta$

$$0 \equiv z'' + kz' - k\sqrt{\frac{2}{\sigma+1}} z^{(\sigma+1)/2} + k\sqrt{\frac{2}{\sigma+1}} z^{(\sigma+1)/2} - \frac{z^\sigma}{2} - \frac{z^\sigma}{2} < z'' - \frac{z^\sigma}{2},$$

т. е. z — нижнее решение уравнения $y'' - y^\sigma/2 = 0$ при $x > \delta$. Аналогично предыдущему случаю, сравнивая z с решением $y'' - y^\sigma/2 = 0$ таким, что $y(\delta) = z(\delta)$, $0 < y'(\delta) < z'(\delta)$, найдем, что z имеет вертикальную асимптоту. □

3. Предварительная оценка решения

Лемма 2. *Существует такое $M(p,k,\sigma)$, что любое решение $z(x)$ уравнения (1), определенное при $x > x_0$, для всех $x > x_1$ имеет оценку*

$$|z| < Mx^{-\frac{p}{\sigma-1}}.$$

Доказательство. По лемме 1 уравнение $z'' + kz' - z^\sigma = 0$ имеет решение $z_0(x) > 0$ с двумя вертикальными асимптотами. Пусть это решение определено на интервале $(0,l)$. Обозначим через M_0 минимальное значение функции $z_0(x)$ на интервале $(0,l)$, $x = l_0$ — точка, в которой оно достигается. Из теоремы сравнения вытекает, что для любого решения $z(x)$ уравнения $z'' + kz' - z^\sigma = 0$, определенного на отрезке $[0,l]$, выполнено $z(l_0) \le M_0$.

Положим $z = Cy$, тогда $y'' + ky' - C^{\sigma-1}y^\sigma = 0$. Поэтому любое решение $y(x)$, определенное на $[0,l]$, уравнения с коэффициентом $C^{\sigma-1}$ удовлетворяет неравенству $y(l_0) \le M_0/C$.

Если рассмотреть уравнение

$$y'' + ky' - B(x)y^\sigma = 0, \tag{2}$$

где $B(x) > B_0$, то функция $y_0(x) > 0$ — решение уравнения $y'' + ky' - B_0y^\sigma = 0$ с вертикальными асимптотами при $x = 0$, $x = l$ — будет верхним решением уравнения (2)

$$y_0'' + ky_0' - B(x)y_0^\sigma = (B_0 - B(x))y_0^\sigma < 0.$$

Поэтому для решения $y(x)$ уравнения (2), определенного на отрезке $[0,l]$, выполнено

$$y(l_0) < M_0B_0^{-\frac{1}{\sigma-1}}.$$

Рассмотрим решение $z(x)$ уравнения (1), определенное при $x > x_0$. Оценим его в точке x, предполагая, что $x > x_0 + l_0$. Рассмотрим отрезок $[x - l_0, x + l - l_0]$ и применим полученную оценку.

Так как $x^p > (x + l - l_0)^p$ на $[x - l_0, x + l - l_0]$ в случае $p < 0$, то

$$z(x) < M_0(x + l - l_0)^{-\frac{p}{\sigma-1}} < Mx^{-\frac{p}{\sigma-1}},$$

где константа $M > M_0$ не зависит от x.

Так как $x^p > (x - l_0)^p$ на $[x - l_0, x + l - l_0]$ в случае $p > 0$, то

$$z(x) < M_0(x - l_0)^{-\frac{p}{\sigma-1}} < Mx^{-\frac{p}{\sigma-1}}. \qquad \square$$

4. Леммы о поведении решений линейного уравнения

Здесь рассматриваются неограниченные решения линейного уравнения

$$z'' + kz' - \frac{Q(x)}{x}z = 0. \tag{3}$$

Предполагается, что функция $Q(x) > 0$ и непрерывна. Поэтому решения уравнения (3) не имеют положительных максимумов и, значит, неограниченные сверху решения имеют предел $z(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. В предположении, что $Q(x) \to \infty$ или $Q(x) \to 0$ при $x \to \infty$, будут получены леммы о неограниченных решениях уравнения (3). Авторы не знают, являются ли эти результаты известными. Аналог леммы 3 использовался в работе [8].

Лемма 3. *Пусть $Q(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Пусть $z(x)$ — решение уравнения (3) такое, что $z(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Тогда для любых $\beta = \mathrm{const} > 0$, $C = \mathrm{const} > 0$ найдется такое x_0, что при $x > x_0$ выполняется неравенство $z(x) > Cx^\beta$.*

Доказательство. Покажем, что уравнение (3) имеет решение, растущее быстрее любой наперед заданной степени, т. е. для заданного α найдется такое решение z, что $z > x^\alpha$. Сделаем в уравнении (3) замену $z = yx^\alpha$, получим

$$y'' + y'\left(\frac{2\alpha}{x} + k\right) + y\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} + \frac{k\alpha}{x} - \frac{Q(x)}{x}\right) = 0.$$

В силу неограниченности $Q(x)$ найдется такое x_1, что $Q(x) > \frac{\alpha(\alpha-1)}{x} + k\alpha$ при $x > x_1$, поэтому решение с начальными условиями $y'(x_1) = 1$, $y(x_1) = 1$, будет возрастающей функцией, и отвечающее ему решение $z > x^\alpha$ уравнения (3) построено.

Докажем существование ограниченного решения уравнения (3). Пусть z_1, z_2 — фундаментальная система решений уравнения (3), без ограничения общности можно считать, что $z_1(x)$ и $z_2(x)$ положительны при $x \geq x_2$.

Покажем, что для любого $N > x_2$ найдется такое решение $z_N(x)$ уравнения (3), что $z_N(x_2) = 1$, $z_N(N) = 0$. Это решение представимо в виде $z = bz_1 + M(z_1 - Az_2)$, где $b = 1/z_1(x_2)$, $A = z_1(x_2)/z_2(x_2)$. Так как решения уравнения (3) не имеют положительных максимумов и отрицательных минимумов, то $z_1 - Az_2 \neq 0$ при $x > x_2$. Поэтому найдется такое M, что $z(N) = 0$. Ясно, что $z_N(x) \leq 1$ при $x \in (x_2, N)$ и $z_N(x)$ монотонно возрастает по N при любом $x < N$, поэтому последовательность $z_N(x)$ при $N \to \infty$ равномерно сходится к ограниченному решению уравнения (3).

Выбрав фундаментальную систему уравнения (3) из ограниченного z_1 и неограниченного z_2 решения, найдем, что любое решение (3) имеет вид $z = C_1z_1 + C_2z_2$. Ясно, что z_2 должно расти быстрее любой степени. Поэтому таковым будет любое неограниченное решение. □

Лемма 4. *Пусть $Q(x) \to 0$ при $x \to \infty$, $Q(x) > 0$, $k > 0$. Пусть $z(x)$ — решения уравнения (3). Тогда для любых $\beta = \mathrm{const} > 0$, $C = \mathrm{const} > 0$ найдется такой x_1, что при $x > x_1$ выполняется неравенство $z(x) < Cx^\beta$.*

Замечание 2. Доказать отсутствие неограниченного решения в условиях леммы 4 невозможно. Действительно, функция $z(x) = \ln x$ — неограниченное решение уравнения (3) с функцией $Q(x) = (k - x^{-1}) \cdot \ln^{-1} x$.

Доказательство. Функция $z(x)$ монотонна при больших x. Если $z(x)$ ограничена, то доказывать нечего, поэтому считаем, что при $x \to \infty$ выполнено $z(x) \to \infty$.

Функция $y(x) = x^\beta$ — решение уравнения вида (3) с функцией $Q_\beta(x) = (k\beta + \beta(\beta-1)x^{-1})$. Поэтому при $x > x_2$ выполнено $Q(x) < Q_\beta(x)$.

Любое неотрицательное решение уравнения

$$y'' + ky' - \frac{Q_\beta(x)}{x}y = 0 \tag{4}$$

будет нижним решением уравнения (3) при $x > x_2$, так как

$$y'' + ky' - \frac{Q(x)}{x}y = \frac{Q_\beta(x) - Q(x)}{x}y > 0.$$

Уравнение (4) имеет линейно независимые решения $y_1(x) = x^\beta$,

$$y_2(x) = x^\beta \int_x^\infty e^{-k\xi}\xi^{-2\beta}d\xi \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Увеличив (если необходимо) значение x_2, можно считать, что функция $y_2(x)$ убывает при $x > x_2$. Выберем $x_1 > x_2$ так, чтобы функция $z(x)$ возрастала при $x > x_1$. Рассмотрим решение $y_0(x)$ уравнения (4)

$$y_0(x_1) = z(x_1), \quad y_0'(x_1) > z'(x_1) > 0.$$

Решение $y_0(x)$ будет положительной и возрастающей функцией при $x > x_1$, поэтому $y_0 \sim Cy_1, C = \text{const} > 0$. График функции $z(x)$ при $x > x_1$ не может пересечь графика $y_0(x)$, являющегося нижним решением уравнения (3), следовательно, $z(x) \leq y_0 \sim Cy_1 = Cx^\beta$. Так как число β — произвольное неотрицательное число, то лемма доказана.

5. Случай $p < -1$

Теорема 3. *Асимптотическое представление нетривиального решения $z(x)$ уравнения* (1) *при $x \to \infty$ имеет вид*

a) $z(x) = C(1 + O(x^{p+1}))$, *где $C \neq 0$, если $k > 0$, $p < -1$,*
$z(x) = Ce^{-kx} + O(e^{-\alpha x})$, *где $C \neq 0$, $\alpha \in (k, k\sigma)$ можно выбрать произвольно,*
$z(x) = (\frac{k(p+1)}{1-\sigma})^{1/(\sigma-1)} x^{(p+1)/(1-\sigma)}$;
b) $z(x) = C(1 + O(x^{p+1}))$, *где $C \neq 0$ если $k < 0$, $p < -1$.*

6. Доказательство для случая $p < -1$, $k < 0$

Сделаем в уравнения (1) замену $s = e^{-kx}$, тогда $s > 1$ и уравнение (1) запишется

$$z_{ss} = (\ln s)^p s^{-2} z^\sigma.$$

Так как $z > 0$, то из уравнения $z_{ss} > 0$ имеем z_s — возрастающая функция, поэтому необходимо рассмотреть возможные случаи $z_s \to C > 0$, $z_s \to C < 0$, $z_s \to 0$, $z_s \to \infty$ при $s \to \infty$.

Если $z_s \to C < 0$ при $s \to \infty$, то z, начиная с некоторого s, перестанет быть неотрицательным решением, поэтому это невозможный случай.

Если при $s \to \infty$ функция $z_s \to C > 0$, то $z > C_1 s$ при $s > s_0$, где $0 < C_1 < C$. Следовательно,

$$\infty = \int_{s_0}^{\infty} s^{\sigma-2} C_1^\sigma \ln^p s ds = \int_{s_0}^{\infty} z'' ds < z'(\infty) - z'(s_0) < \infty,$$

интеграл расходится, так как $\sigma - 2 > -1$. Таким образом, это тоже невозможный случай.

Если при $s \to \infty$ функция $z_s \to \infty$, то $z > k_0 s$ при $s > s_0$, поэтому $z'' > s^{\sigma-2} k_0^\sigma \ln^p s$, следовательно,

$$z > \int_{s_0}^{s} ds \int_{s_0}^{s} s^{\sigma-2} k^\sigma \ln^p s ds, \quad z \geq k_1 s^\sigma \ln^p s$$

при $s > s_1$, и, повторяя интегрирование достаточное число раз, найдем

$$z'' > z^{\sigma-\varepsilon}, \quad \text{где} \quad \sigma - \varepsilon > 1.$$

Так как последнее неравенство не может иметь неограниченных решений на бесконечном интервале, то и этот случай невозможен.

Таким образом, доказано, что $z_s \to 0$ при $s \to \infty$. Следовательно, функция z убывающая и имеет предел. Покажем, что этот предел не может быть нулевым. В противном случае

$$z(s_1) = \int_{s_1}^{\infty} -z'(s) ds = \int_{s_1}^{\infty} \int_{s}^{\infty} s^{-2} \ln^p s z^\sigma ds \leq B z^\sigma(s_1).$$

Здесь воспользовались убыванием z и обозначили $B = \int_{s_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty} s^{-2}\ln^p s\,ds$. Так как этот интеграл сходящийся, то при больших значениях s_1 полученное неравенство $1 \le Bz^{\sigma-1}(s_1)$ противоречит тому, что $z \to 0$ при $s \to \infty$.

Следовательно, $z \to C \neq 0$ при $s \to \infty$. Рассматривая уравнение (1) как линейное уравнение

$$z'' + kz' - a(x)z = 0, \tag{5}$$

где $a(x) = x^p z^{\sigma-1} = O(x^p)$ при $x \to \infty$ и поскольку $p < -1$, то отсюда вытекает

$$z(x) = C_1(1 + O(x^{p+1})) + C_2 e^{-kx}(1 + O(x^{p+1})) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Таким образом, $z = C(1 + O(x^{p+1}))$ при $x \to \infty$.

7. Доказательство для случая $p < -1$, $k > 0$

Так как $z(x)$ монотонна при $x > x_0$, то имеются три возможности

$$\lim_{x\to\infty} z(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} z(x) = C > 0, \quad \lim_{x\to\infty} z(x) = 0.$$

В двух последних случаях функция $z(x)$ — ограниченное при $x > x_0$ решение (5) с $a(x) = x^p z^{\sigma-1} = O(x^p)$ при $x \to \infty$. Так как $p < -1$, то

$$z(x) = C_1(1 + O(x^{p+1})) + C_2 e^{-kx}(1 + O(x^{p+1})) \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

т. е. либо $z \to C_1 \neq 0$, либо $z \sim C_2 e^{-kx}$.

Можно проверить, что такие решения действительно есть. Построение решения, стремящегося к ненулевой константе, проводится с помощью итерационного процесса подобно работе [9]. Существование экспоненциально убывающего решения доказывается с помощью теоремы Лерэ–Шаудера о существовании неподвижной точки отображения выпуклого множества в свое предкомпактное подмножество.

Пусть теперь $\lim_{x\to\infty} z(x) = \infty$. Покажем, что уравнение (1) имеет верхнее и нижнее решения вида Cx^α, $\alpha = (p+1)/(1-\sigma)$. Действительно, подставляя это выражение в левую часть уравнения (1), найдем

$$Cx^{\alpha-1}\left(k\alpha - C^{\sigma-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{x}\right).$$

Поэтому, если $C^{\sigma-1} > k\alpha$, то при $x > \max(0, \frac{\alpha(\alpha-1)}{C^{\sigma-1}-k\alpha})$ эта функция — верхнее решение, если $C^{\sigma-1} < k\alpha$, то при $x > \max(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{k\alpha - C^{\sigma-1}})$ — нижнее решение.

Покажем теперь, что если $z(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то $z(x)/x^\alpha = R(x)$ имеет конечный ненулевой предел.

Допустим, что предела не существует, тогда найдутся такие числа $C_1 > C_2$, что $R(x)$ принимает значения большие C_1 и меньшие C_2 на любом интервале (τ, ∞). Выберем из интервала (C_1, C_2) число C так, чтобы $C^{\sigma-1} \neq k\alpha$. Тогда, как отмечено выше, функция Cx^α на интервале (x_1, ∞) будет верхним (или нижним) решением уравнения (1), график которого пересекается с графиком рассматриваемого решения $z(x)$ бесконечное число раз на интервале (x_1, ∞). Это противоречит определению верхнего (нижнего) решения.

Поэтому отношение $R(x)$ имеет предел. Допустим, что это — бесконечный предел. Отметим, что $x^p z^{\sigma-1} = R^{\sigma-1} x^{-1}$. Поэтому по лемме 3 функция $z(x)$ растет быстрее x^β при любом β, что противоречит оценке $z < Mx^{p/(1-\sigma)}$ леммы 2.

Допустим теперь, что предел $R(x)$ при $x \to \infty$ равен нулю. Тогда $x^p z^{\sigma-1} = R^{\sigma-1}x^{-1}$. Поэтому по лемме 4 функция $z(x)$ растет медленнее x^β при любом $\beta > 0$. Выбрав $\beta < \alpha$ найдем, что $x^p z^{\sigma-1} = O(x^{-1-(\alpha-\beta)(\sigma-1)})$ при $x \to \infty$. Следовательно, из (5) получим

$$z(x) = C_1(1+o(1)) + C_2 e^{-kx}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

что противоречит неограниченности функции $z(x)$.

Таким образом, доказано $R(x) = z(x)/x^\alpha \to C \neq 0$ при $x \to \infty$. Ясно, что $C^{\sigma-1} = k\alpha$.

8. Случай $p \geq -1$

Теорема 4. *Нетривиальное решение $z(x)$ уравнения* (1)*, определенное при больших x, при $x \to \infty$ имеет вид*

a) $z(x) = \pm(k\frac{1+p}{1-\sigma})^{\frac{1}{\sigma-1}}\ x^{-(1+p)/(\sigma-1)} \cdot (1+o(1))$*, если $k < 0$, $p > -1$,*

b) $z(x) = \pm(\frac{k}{1-\sigma})^{\frac{1}{\sigma-1}}\ \ln^{-1/(\sigma-1)} x \cdot (1+o(1))$*, если $k < 0$, $p = -1$,*

c) $z(x) = C(e^{-kx} + O(e^{-\alpha x}))$*, где $C \neq 0$, $\alpha \in (k, k\sigma)$ можно выбрать произвольно, если $k > 0$, $p \geq -1$.*

Доказательство. Так как $z(x)$ монотонна при $x > x_0$, то при $x \to \infty$ $z(x)$ имеет бесконечный или конечный предел.

Предполагая, что $\lim\limits_{x\to\infty} z(x) = \infty$, найдем $x^{p+1}z^{\sigma-1} = Q(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Поэтому по лемме 3 функция $z(x)$ растет быстрее x^β при любом $\beta > 0$. Выбрав $\beta > -\frac{p}{\sigma-1}$ получим противоречие с леммой 2.

Допустим $\lim\limits_{x\to\infty} z(x) = C \neq 0$, тогда $z'' + kz' = x^p C^\sigma(1+o(1))$ при $x \to \infty$. Поэтому если $p > -1$, то $z' + kz = x^{p+1}\frac{C^\sigma}{p+1}(1+o(1)) \to \infty$ при $x \to \infty$. Также если $p = -1$, то $z' + kz = C^\sigma \ln x(1+o(1)) \to \infty$ при $x \to \infty$. Так как по предположению $\lim\limits_{x\to\infty} z(x) = C$, то $\lim\limits_{x\to\infty} z'(x) = \infty$, но это противоречит тому, что $\lim\limits_{x\to\infty} z(x) = C$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} z(x) = 0$.

Сначала рассмотрим случай $k > 0$. Подставим в левую часть уравнения (1) функцию $\exp(-\alpha x)$, найдем

$$(\alpha^2 - k\alpha - x^p e^{-\alpha(\sigma-1)x})e^{-\alpha x}.$$

Выбрав $0 < \alpha < k$, получаем, что при $x > x_1$ функция $\exp(-\alpha x)$ — верхнее решение уравнения (1). По теореме 2 решение $z(x) = O(\exp(-\alpha x))$ при $x > x_1$. Рассматривая уравнение (1) как линейное уравнение (5) с экспоненциально убывающим при $x \to \infty$ коэффициентом $a(x) = x^p z^{\sigma-1} = O(\exp(-\beta x))$, где $\beta < \alpha(\sigma-1)$, найдем выражение для решения

$$z(x) = C_1(1+o(1)) + C_2 e^{-kx}(1+o(1)) \ \text{ при } \ x \to \infty.$$

Поэтому стремящееся к нулю решение имеет вид $z \sim C(e^{-kx}))$ при $x \to \infty$, и, рассматривая нелинейный член уравнения (1) как правую часть, получим $z \sim C(e^{-kx} + O(e^{-\beta x}))$ при любом $\beta < \alpha\sigma$.

Рассмотрим случай $k < 0$. Уравнение (1) при $p > -1$ имеет верхнее и нижнее решения вида Cx^α, где $\alpha = (p+1)/(1-\sigma)$. Действительно, подставляя это выражение в левую часть уравнения (1), найдем

$$Cx^{\alpha-1}\left(k\alpha - C^{\sigma-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{x}\right).$$

Поэтому при $x > \max(0, \frac{\alpha(\alpha-1)}{C^{\sigma-1}-k\alpha})$ функция Cx^α — верхнее решение уравнения (1), если $C^{\sigma-1} > k\alpha$, и нижнее решение, если $C^{\sigma-1} < k\alpha$.

Если $p = -1$, то верхнее и нижнее решения могут быть найдены в виде $C(\ln x)^{-1/(\sigma-1)}$ при $C^{\sigma-1} > k/(1-\sigma)$ и $C^{\sigma-1} < k/(1-\sigma)$ соответственно.

Подробно рассмотрим случай $p > -1$ и покажем, что $z(x)/x^\alpha = R(x)$ имеет конечный ненулевой предел при $x \to \infty$.

Допустим сначала, что предела не существует. Тогда найдутся такие числа $C_1 > C_2$, что $R(x)$ принимает значения, бо́льшие C_1 и меньшие C_2 на любом интервале (τ, ∞). Выберем из интервала (C_1, C_2) число C так, чтобы $C^{\sigma-1} \neq k\alpha$. Тогда, как отмечено выше, функция Cx^α на интервале (x_1, ∞) будет верхним (или нижним) решением уравнения (1), график которого, пересекается с графиком рассматриваемого решения $z(x)$ бесконечное число раз на интервале (x_1, ∞). Что противоречит определению верхнего (нижнего) решения.

Поэтому отношение $R(x)$ имеет при $x \to \infty$ предел. Так как α отрицательно, то построенное нижнее решение Cx^α стремится к нулю при $x \to \infty$, следовательно, по теореме 2 и замечанию 1 отношение $R(x)$ отделено от нуля, т. е. пределом $R(x)$ при $x \to \infty$ может быть только ненулевая константа, но тогда это $C_0 = (k\alpha)^{1/(\sigma-1)}$.

В случае $p = -1$ это же рассуждение показывает, что отношение $z(x)/(\ln x)^{-1/(\sigma-1)}$ имеет при $x \to \infty$ предел $[k/(1-\sigma)]^{1/(\sigma-1)}$. □

Авторы выражают благодарность рецензенту за высказанные замечания и советы.

Литература

[1] Беллман Р. *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений* (Ин. лит., М., 1954).

[2] Кигурадзе И.Т. *Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена–Фаулера*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **29** (5), 965–986 (1965).

[3] Хачлаев Т.С. *Асимптотическое поведение решений полулинейного эллиптического уравнения с растущим коэффициентом в цилиндрической области*, УМН **59** (2), 185–186 (2004).

[4] Astashova I. *On asymptotic behavior of solutions to a quasi-linear second order differential equations*, Funct. Diff. Equat. **16** (1), 93–115 (2009).

[5] Сурначев М.Д. *Об асимптотике положительных решений уравнений типа Эмдена–Фаулера*, Пробл. матем. анализа, № 59, 129–176 (2011).

[6] Surnachev M. *Estimates for Emden–Fowler type inequalities with absorption term*, J. Math. Anal. Appl. **348** (2), 996–1011 (2008).

[7] Филимонова И.В. *О поведении решений полулинейного параболического или эллиптического уравнения, удовлетворяющих нелинейному краевому условию, в цилиндрической области*, Тр. семинара им. И.Г. Петровского **26**, 369–390 (2007).

[8] Миразай А.А. *О поведении решений слабонелинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях*, Вестн. Московск. ун-та., Сер. 1. Матем. Механ., № 4, 6–8 (1994).

[9] Atkinson F.V. *On second order nonlinear oscillations*, Pacif. J. Math. **5** (Suppl. 1), 643–647 (1955).

И.В. Филимонова

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия,

`e-mail:` filimi@yandex.ru

Т.С. Хачлаев

Московский технологический университет,
просп. Вернадского, д. 78, Москва, 119454, Россия,

`e-mail:` khachlaev@mirea.ru

I.V. Filimonova and T.S. Khachlaev

On asymptotic properties of solutions defined on a half-axis to one semilinear ordinary differential equation

Abstract. We consider solutions to the semilinear ordinary differential equation with a nonlinear term of Emden–Fowler type. The results about the asymptotic behavior of the solutions to the Emden–Fowler equation defined in a neighborhood of infinity, presented in the book of R. Bellman, are extended to the case of equation with lower-order derivative.

Keywords: ordinary differential equation, nonlinear equation, semilinear equation, Emden–Fowler equation, asymptotic behavior of solutions, positive solution, existence of solution, maximum principle.

I.V. Filimonova

Lomonosov Moscow State University,
GSP-1 Leninskie Gory, Moscow, 119991 Russia,

`e-mail:` filimi@yandex.ru

T.S. Khachlaev

Moscow Technological University,
78 Vernadskogo Ave., Moscow, 119454 Russia,

`e-mail:` khachlaev@mirea.ru