ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 5 (456)

УДК 517.518

М.Г. ГРИГОРЯН

О СИСТЕМАХ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ В L^p, $1 \leq p < 2$

1. Введение

Определение 1. Ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \tag{1}$$

где $\{\varphi_k(x)\}$, $x \in [0,1]$, — ортонормированная система (ОНС) и c_k, $k \geq 1$, — действительные числа, называется универсальным в $L^p_{[0,1]}$ (соответственно в $H = \bigcap\limits_{1\leq p<2} L^p$), если для любой функции $f(x) \in L^p_{[0,1]}$ (соответственно $f(x) \in H$) существует последовательность возрастающих натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что подпоследовательность частичных сумм $S_{n_k} = \sum\limits_{i=1}^{n_k} c_i \varphi_i(x)$ ряда (1) сходится к $f(x)$ в метрике $L^p_{[0,1]}$ (соответственно во всех метриках $L^p_{[0,1]}$, $1 \leq p < 2$).

Определение 2. ОНС $\{\varphi_n(x)\}$ назовем системой универсальности в $L^p_{[0,1]}$ (соответственно в H), если по этой системе существует ряд вида (1), который универсален в $L^p_{[0,1]}$ (соответственно в H).

Сразу отметим, что тригономерическая система не является системой универсальности ни в одном $L^p_{[0,1]}$, $p \geq 1$. Но тем не менее оказывается, что существует ОНС $\{\varphi_n(x)\}$, которая является системой универсальности как в H, так и в любом фиксированном $L^p_{[0,1]}$, $1 \leq p < 2$.

Следует отметить, что первые универсальные в смысле сходимости почти всюду (п. в.) тригонометрические ряды были построены Д.Е. Меньшовым [1] и В.Я. Козловым [2]. Именно, ими были построены ряды вида

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{2}$$

такие, что для всякой измеримой на $[0, 2\pi]$ функции $f(x)$ найдется последовательность целых чисел $1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k}(x) = f(x) \ \text{ п. в. на } \ [0, 2\pi]$$

($S_n(x)$ — частичная сумма n-го порядка от ряда (2)). Этот результат был распространен в [3] на произвольные полные ОНС. В данной статье получено необходимое и достаточное условие на ОНС $\{\varphi_n(x)\}$, чтобы она была системой универсальности в $L^p_{[0,1]}$, $1 \leq p < 2$.

Определение 3. Скажем, что ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, имеет свойство Γ_q, $q > 2$ (Γ), если все полиномы по этой системе не принадлежат $L^q_{[0,1]}$, $q > 2$ (соответственно $\bigcup\limits_{q>2} L^q_{[0,1]}$), т. е. для любого натурального N и для любых действительных чисел $\{b_k\}_{k=1}^N$ с $\sum\limits_{k=1}^N |b_k| \neq 0$

$$Q(x) = \sum_{k=1}^N b_k \varphi_k(x) \notin L^q_{[0,1]} \quad \Bigl(Q(x) \notin \bigcup_{q>2} L^q_{[0,1]}\Bigr).$$

Теорема 1. *Существует полная в $L^2_{[0,1]}$ ОНС $\{\varphi_n(x)\}$, обладающая свойством Γ.*

Теорема 2. *Для того чтобы полная в $L^2_{[0,1]}$ ОНС $\{\varphi_n(x)\}$ имела свойство Γ_q, $q > 2$, необходимо и достаточно, чтобы она осталась замкнутой в $L^p_{[0,1]}$ после удаления из нее любого конечного числа функций, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ при $2 < q < \infty$ и $p = 1$ при $q = \infty$ (L^∞ — пространство ограниченных функций).*

С помощью теорем 1 и 2 доказывается основная

Теорема 3. *Для того чтобы ОНС $\{\varphi_n(x)\}$ была системой универсальности в $L^p_{[0,1]}$, $1 \le p < 2$ (соответственно в H),*

а) *необходимо, чтобы она имела свойство Γ_q (соответственно Γ);*
б) *достаточно, чтобы она была полна в $L^2_{[0,1]}$ и имела свойство Γ_q (соответственно Γ),*

где $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ при $p > 1$ и $q = \infty$ при $p = 1$.

2. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $\{Q_n(x)\}$ множество всех алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами. Нетрудно видеть, что можно определить последовательность функций $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^\infty$ такую, что

1) $\alpha_k(x) = 0$; $x \notin [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, $k = 1, 2, \ldots$;
2) $\|\alpha_k\|_{L^2_{[0,1]}} < \frac{1}{k}$;
3) $\alpha_k(x) \notin \bigcup\limits_{q>2} L^q_{[0,1]}$.

Положим

$$g_k(x) = Q_k(x) + \alpha_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots\ ; \ \ x \in [0, 1].$$

Легко видеть, что система $\{g_k(x)\}$ линейно независима, замкнута в $L^2_{[0,1]}$ и обладает свойством Γ. Поэтому система $\{\varphi_n(x)\}$, полученная ортогонализацией методом Шмидта системы $\{g_n(x)\}$, удовлетворяет требованиям теоремы 1. $\square$

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть полная в $L^2_{[0,1]}$ ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ обладает свойством Γ_q, $q > 2$. Покажем, что для любого натурального $N > 1$ система $\{\varphi_n(x)\}_{n=N+1}^\infty$ замкнута в $L^p_{[0,1]}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Допустим, что система $\{\varphi_n(x)\}_{n=N+1}^\infty$ не замкнута в $L^p_{[0,1]}$, тогда она не полна относительно $L^q_{[0,1]}$, т. е. существует функция $g(x) \neq 0$, $g(x) \in L^q_{[0,1]}$, для которой

$$\int_0^1 g(x) \varphi_n(x) dx = 0, \quad k = N + 1, N + 2, \ldots$$

Так как система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ полна в $L^1_{[0,1]}$, то отсюда $g(x) = \sum\limits_{k=1}^N a_k \varphi_k(x)$, где $\sum\limits_{k=1}^N |a_k| \neq 0$. Пришли к противоречию. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для любого натурального $N > 1$ система $\{\varphi_n(x)\}_{n=N+1}^\infty$ замкнута в L^p, $1 \le p < 2$ (тогда она полна относительно $L^q_{[0,1]}$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$). Покажем, что система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ обладает свойством Γ_q. Допустим, что существует ненулевой полином $Q(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, который принадлежит $L^q_{[0,1]}$. Пусть $Q(x) = \sum\limits_{k=1}^N a_k \varphi_k(x) \in L^q_{[0,1]}$, где $\sum\limits_{k=1}^N |a_k| \neq 0$.

Из ортогональности системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ вытекает

$$\int_0^1 Q(x)\varphi_k(x)dx = 0; \quad k = N+1, N+2, \ldots$$

Отсюда и из того, что система $\{\varphi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ полна относительно $L^q_{[0,1]}$, получим $Q(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k\varphi_k(x) = 0$. Следовательно, $a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему 2. $\square$

Доказательство теоремы 3. Необходимость. Пусть ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является системой универсальности в $L^p_{[0,1]}$, $1 \le p < 2$, т. е. по этой системе существует ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x), \tag{3}$$

который универсален в $L^p_{[0,1]}$. Покажем, что система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ имеет свойство Γ_q ($\frac{1}{q} + \frac{1}{p}= 1$ при $p > 1$, $q = \infty$ при $p = 1$). Допустим, что существует ненулевой полином $Q(x)$, который принадлежит $L^q_{[0,1]}$. Пусть $Q(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} b_k\varphi_k(x) \in L^q_{[0,1]}$, $\sum\limits_{k=1}^{N} |b_k| \ne 0$. В силу универсальности в $L^p_{[0,1]}$ ряда (3) найдутся возрастающие подпоследовательности $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n_k} c_i\varphi_i(x) - Q(x) \right\|_{L^p} = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{m_k} c_i\varphi_i(x) - 2Q(x) \right\|_{L^p} = 0.$$

Так как $Q(x) \in L^q$, получим

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n_k} c_i\varphi_i(x) \right] Q(x)dx = \int_0^1 [Q(x)]^2 dx,$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{m_k} c_i\varphi_i(x) \right] Q(x)dx = 2\int_0^1 [Q(x)]^2 dx.$$

Значит,

$$\sum_{i=1}^{N} c_i b_i = \sum_{i=1}^{N} b_i^2, \quad \sum_{i=1}^{N} c_i b_i = 2\sum_{i=1}^{N} b_i^2.$$

Отсюда следует $\sum\limits_{i=1}^{N} b_i^2 = 0$. Полученное противоречие доказывает, что система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обладает свойством Γ_q. Аналогично доказывается, что если ряд (3) универсален в H, то система обладает свойством Γ.

Достаточность. Пусть полная в $L^2_{[0,1]}$ ОНС $\{\varphi_n(x)\}$ обладает свойством Γ (существование такой системы следует из теоремы 1). Возьмем возрастающую последовательность $\{p_k\}$, для которой

$$1 \le p_1 < p_2 < \cdots < p_k < \cdots, \quad \lim_{k\to\infty} p_k = 2. \tag{4}$$

Пусть далее $\{Q_m(x)\}$ — последовательность всех алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами. Предположим, что уже определены полиномы по системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

$$h_k(x) = \sum_{i=N_{k-1}}^{N_k-1} a_i^{(k)}\varphi_i(x), \quad N_0 = 0, \quad 1 \le k \le n-1,$$

удовлетворяющие условиям

$$\left\| Q_m(x) - \sum_{k=1}^{m} h_k(x) \right\|_{L^{p_m}} < \frac{1}{2m}, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Теперь согласно теореме 2 найдем полином

$$h_n(x) = \sum_{i=N_{n-1}}^{N_n - 1} a_i^{(n)} \varphi_i(x), \tag{5}$$

который удовлетворяет условию

$$\left\| \left[Q_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=N_{k-1}}^{N_k - 1} a_i^{(k)} \varphi_i(x) \right) \right] - h_n(x) \right\|_{L^{p_n}} < \frac{1}{2n}. \tag{6}$$

Ясно, что по индукции определяются $h_n(x)$, $n \geq 1$, которые удовлетворяют условиям (5), (6) для всех $n \geq 1$.

Покажем, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=N_{k-1}}^{N_k - 1} a_i^{(k)} \varphi_i(x) \right), \tag{7}$$

где

$$c_i = a_i^{(k)}, \quad N_{k-1} \leq i < N_k, \quad k \geq 1, \tag{8}$$

универсален в H. Пусть $f(x) \in H = \bigcap\limits_{1 \leq p < 2} L^p_{[0,1]}$. Возьмем подпоследовательность алгебраических полиномов $\{Q_{\nu_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$\|f(x) - Q_{\nu_k}(x)\|_{L^{p_k}} < \frac{1}{2k}, \quad k \geq 1.$$

Отсюда и из (5), (6) вытекает

$$\left\| f(x) - \sum_{m=1}^{\nu_k} \left(\sum_{i=N_{m-1}}^{N_m - 1} a_i^{(m)} \varphi_i(x) \right) \right\|_{L^{p_k}} < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2\nu_k} < \frac{1}{k}.$$

Легко видеть (см. (4)–(8)), что

$$\lim_{k \to \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n_k} c_i \varphi_i(x) - f(x) \right\|_{L^p} = 0 \quad \text{для всех} \quad p \in [1, 2),$$

где $n_k = N_{\nu_k} - 1$, т. е. ряд (7) универсален в H. Аналогично можно доказать, что если полная в $L^2_{[0,1]}$ ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обладает свойством Γ_q, $q > 2$, то она является системой универсальности в $L^p_{[0,1]}$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. $\square$

Литература

1. Меньшов Д.Е. *О частных суммах тригонометрических рядов* // Матем. сб. – 1947. – Т. 20. – С. 197–236.
2. Козлов В.Я. *О полных системах ортогональных функций* // Матем. сб. – 1950. – Т. 26. – С. 351–364.
3. Талалян А.А. *О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов* // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. – 1957. – Т. 10. – № 3. – С. 17–34.

Ереванский государственный университет

Поступила
05.05.1998