ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 4 (419)

УДК 517.929

А.А. АМОСОВ, А.А. ЗЛОТНИК

ПОЛУДИСКРЕТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА С НЕГЛАДКИМИ ДАННЫМИ

Системы квазилинейных уравнений движения вязкого теплопроводного газа (сжимаемой жидкости) относятся к основным моделям механики сплошной среды [1], [2]. Для задач с одной пространственной переменной x теория глобальных обобщенных решений изложена в ([2], гл. 2) в случае начальных и граничных данных из W_2^1. Теория разностных методов для таких задач разработана в [3]–[6]. Глобальные обобщенные решения в случае различных классов разрывных данных изучались в [7]–[11] (в [11] в малом по данным).

В данной работе построен и изучен полудискретный разностный по переменной x метод решения неоднородных начально-краевых задач с разрывными начальными и граничными данными. В частности, от начальных скорости и температуры требуется лишь конечность полной энергии и энтропии, от граничных значений скорости достаточно конечности вариации. Плотность тепловых источников и граничный тепловой поток могут быть функциями из L_1. Коэффициенты уравнений, определяющие свойства газа, также могут быть разрывными по x (модель неоднородного газа).

Доказаны глобальные оценки приближенных решений и их сходимость к обобщенным решениям рассматриваемых задач. Более того, само существование решений устанавливается в результате предельного перехода и является новым результатом, поскольку получается в заметно более общих условиях, чем в работах [9], [10]. Существенно используется техника исследования, развитая в ([2], гл. 2; [3], [10], [12]). Отметим, что изученный полудискретный метод дает хорошую основу для построения и анализа разностных методов.

В § 1 дается постановка начально-краевых задач $\mathcal{P}_m$, $m = \overline{1,3}$, и формулируется теорема 1.1 о существовании обобщенных решений. В § 2 выводятся разнообразные оценки решений вспомогательной параболической полудискретной задачи с краевыми условиями третьего рода. Затем в § 3 строится полудискретный метод решения задач $\mathcal{P}_m$ и формулируется теорема 3.1 о глобальных оценках приближенных решений. § 4 посвящен ее доказательству. В § 5 доказывается сходимость приближенных решений и с помощью предельного перехода устанавливается теорема 1.1.

1. Постановка задач. Формулировка теоремы существования

Рассмотрим систему квазилинейных дифференциальных уравнений одномерного движения неоднородного политропного совершенного газа

$$D_t\eta = Du \text{ в } Q, \tag{1.1}$$

$$D_t u = D\sigma + g[x_e], \quad \sigma = \nu\rho Du - p, \quad p = k\rho\theta, \quad \rho = 1/\eta \text{ в } Q, \tag{1.2}$$

$$c_V D_t\theta = D\varpi + \sigma Du + f[x_e], \quad \varpi = \lambda\rho D\theta \text{ в } Q, \tag{1.3}$$

$$D_t x_e = u \text{ в } Q. \tag{1.4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-00621 и 97-01-00214).

Искомые функции $\eta(x,t)$, $u(x,t)$, $\theta(x,t)$, $x_e(x,t)$ определены на $Q = Q_T = \Omega \times (0,T)$, где $\Omega = (0,X)$. Для производных использованы обозначения: $D = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$. Здесь $\nu = \nu(x)$, $k = k(x)$, $c_V = c_V(x)$, $\lambda = \lambda(x)$. Кроме того, $g[x_e](x,t) = g(x_e(x,t),x,t)$, $f[x_e](x,t) = f(x_e(x,t),x,t)$.

Выписанную систему уравнений дополним начальными условиями

$$(\eta,u,\theta,x_e)|_{t=0} = (\eta^0(x),u^0(x),\theta^0(x),x_e^0(x)) \text{ на } \Omega, \tag{1.5}$$

где $x_e^0(x) \equiv \int\limits_0^x \eta^0(x')\,dx'$, краевыми условиями

$$-\varpi|_{x=0} + \mu_0(t)\theta|_{x=0} = \chi_0(t), \quad \varpi|_{x=X} + \mu_X(t)\theta|_{x=X} = \chi_X(t) \text{ на } (0,T) \tag{1.6}$$

и одной из пар краевых условий

$$u|_{x=0} = u_0(t), \qquad u|_{x=X} = u_X(t) \qquad \text{на } (0,T), \tag{1.7$_1$}$$
$$\sigma|_{x=0} = -p_0(t), \qquad u|_{x=X} = u_X(t) \qquad \text{на } (0,T), \tag{1.7$_2$}$$
$$\sigma|_{x=0} = -p_0(t), \qquad \sigma|_{x=X} = -p_X(t) \qquad \text{на } (0,T). \tag{1.7$_3$}$$

Задачу (1.1)–(1.6), (1.7$_m$) обозначим через $\mathcal{P}_m$, $m = \overline{1,3}$. Ниже удобно считать, что функции u_0, u_X, p_0, p_X определены при всех $m = 1,2,3$, причем те из них, которые не входят в краевые условия конкретной задачи $\mathcal{P}_m$, равны нулю.

Напомним физический смысл величин: x — лагранжева массовая координата (X — полная масса газа), t — время; η, u и θ — удельный объем, скорость и абсолютная температура; x_e — эйлерова координата; p и ρ — давление и плотность; σ и ϖ — напряжение и тепловой поток; ν и λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности; c_V — удельная теплоемкость; g и f — плотности массовых сил и тепловых источников.

Введем *обозначения.* Через $\mathfrak{M}(G)$ обозначим множество функций, определенных и измеримых (по Лебегу) на измеримом множестве G из $\mathbb{R}^\ell$ ($\ell \ge 1$). Через $\mathfrak{M}_+(G)$ обозначим подмножество функций из $\mathfrak{M}(G)$, положительных п. в. (почти всюду) в G. Будем использовать обозначения $f_+(\cdot) = \max\{f(\cdot),0\}$, $f_-(\cdot) = \max\{-f(\cdot),0\}$. Пусть $L_q(G)$ — пространство Лебега, $q \in [1,\infty]$. Положим $\|v\|_G = \|v\|_{L_2(G)}$, $(v,w)_G = \int\limits_G vw\,dG$.

Нам потребуются анизотропные пространства Лебега ([13], § 1.1) $L_{q,r}(Q)$ с нормой $\|w\|_{L_{q,r}(Q)} = \big\|\,\|w\|_{L_q(\Omega)}\big\|_{L_r(0,T)}$, $q,r \in [1,\infty]$. Пусть $V_q(Q)$ — пространство функций $w \in \mathfrak{M}(Q)$ с конечной нормой $\|w\|_{V_q(Q)} = \|w\|_{L_{q,\infty}(Q)} + \|Dw\|_{L_q(Q)}$. Напомним известные неравенства ([14], гл. 2)

$$\|w\|_{L_{q,r}(Q_T)} \le c_0\|w\|_{V_2(Q_T)}, \tag{1.8}$$
$$\|w|_{x=0}\|_{L_4(0,T)} + \|w|_{x=X}\|_{L_4(0,T)} \le c_0\|w\|_{V_2(Q_T)}, \tag{1.9}$$

где $q \in [2,\infty]$, $r \in [4,\infty]$, $(2q)^{-1} + r^{-1} = 1/4$, $c_0 = c_0(X,T)$.

Будем также использовать банаховы пространства $W_2^{1,0}(Q)$, $W(Q)$, $S_2^{1,1}W(Q)$ с нормами $\|w\|_{W_2^{1,0}(Q)} = (\|w\|_Q^2 + \|Dw\|_Q^2)^{1/2}$, $\|w\|_{W(Q)} = \|w\|_Q + \|D_tw\|_Q + \|Dw\|_{L_{2,\infty}(Q)}$, $\|w\|_{S_2^{1,1}W(Q)} = \|w\|_{W_2^1(Q)} + \|DD_tw\|_Q$. Известно (см., напр., [15]), что пространства $W(Q)$ и $S_2^{1,1}W(Q)$ компактно вложены в $C(\overline{Q})$. Введем $\mathcal{N}(Q)$ — класс функций $\eta \in \mathfrak{M}_+(Q)$, имеющих конечную сумму норм $|\!|\!|\,\eta\,|\!|\!|_{\mathcal{N}(Q)} = \|\eta\|_{L_\infty(Q)} + \|1/\eta\|_{L_\infty(Q)} + \|D_t\eta\|_Q$.

Пусть $V[0,T]$ — пространство функций ограниченной вариации на $[0,T]$ с нормой $\|w\|_{V[0,T]} = \sup_{[0,T]}\ |w(t)| + \mathrm{var}_{[0,T]}\,w$. Положим $\overset{\circ}{C}{}^1(\overline{Q};S_m^T) = \{\varphi \in C^1(\overline{Q}) \mid \varphi|_{S_m^T} = 0\}$, $1 \le m \le 3$. Здесь $S_1^T = \{(0,t) \mid 0 \le t \le T\} \cup S_2^T$, $S_2^T = \{(X,t) \mid 0 \le t \le T\} \cup S_3^T$, $S_3^T = \{(x,T) \mid 0 \le x \le X\}$. Пусть $\tau \in (0,T)$. Введем разность $\Delta^{(\tau)}w(t) = w(t+\tau) - w(t)$ и операторы усреднения и интегрирования $w^{(\tau)} = \tau^{-1}\int\limits_t^{t+\tau} w(t')\,dt'$, $(I_tw)(t) = \int\limits_0^t w(t')\,dt'$. Определим полунорму $\|v\|_{2,r}^{\langle 0,1/2\rangle} = \sup_{0<\tau<T}\tau^{-1/2}\|\Delta^{(\tau)}v\|_{L_{2,r}(Q_{T-\tau})}$ и норму $\|v\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} = \|v\|_{V_2(Q)} + \|v\|_{2,2}^{\langle 0,1/2\rangle}$.

Через $K(N)$, возможно, с индексами, условимся обозначать различные положительные неубывающие функции параметра $N > 1$ (в доказательствах N опускаем). Эти функции могут зависеть также от X и T, причем по T они неубывающие. Для $q \in [1, \infty]$ положим $q' = q/(q-1)$.

Сформулируем условия C_1)–C_4) на данные задачи $\mathcal{P}_m$ — коэффициенты, начальные значения, свободные члены и граничные функции соответственно.

C_1) ν, k, c_V, $\lambda \in L_\infty(\Omega)$ и $N^{-1} \le \nu(x) \le N$, $0 \le k(x) \le N$, $N^{-1} \le c_V(x) \le N$, $N^{-1} \le \lambda(x) \le N$ п. в. в Ω.

C_2) $\eta^0 \in L_\infty(\Omega)$, $u^0 \in L_2(\Omega)$, $\theta^0 \in L_1(\Omega)$ и $N^{-1} \le \eta^0(x) \le N$, $\theta^0(x) > 0$ п. в. в Ω, $\|u^0\|_{L_2(\Omega)} + \|\theta^0\|_{L_1(\Omega)} + \|\ln\theta^0\|_{L_1(\Omega)} \le N$. При $m = 1$ дополнительно предполагается, что $N^{-1} \le \|\eta^0\|_{L_1(\Omega)} + I_t(u_X - u_0)$ на $(0, T)$.

C_3) $g, f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R} \times Q)$, и функции $g(\chi, x, t)$ и $f(\chi, x, t)$ непрерывны по $\chi \in \mathbb{R}$ для почти всех $(x, t) \in Q$. Кроме того, $|g(\chi, x, t)| \le \overline{g}(x, t)$ и $0 \le f(\chi, x, t) \le \overline{f}(x, t)$ п. в. в $\mathbb{R} \times Q$, где $\|\overline{g}\|_{L_{2,1}(Q)} + \|\overline{f}\|_{L_1(Q)} \le N$.

C_4) $\mu_0, \mu_X, \chi_0, \chi_X, u_0, u_X, p_0, p_X \in \mathfrak{M}(0, T)$, функции μ_0, μ_X, χ_0, χ_X, p_0, p_X неотрицательны. Кроме того, $\|\mu_0\|_{L_s(0,T)} + \|\mu_X\|_{L_s(0,T)} \le N$ для некоторого $s > 2$, $\|\chi_0\|_{L_1(0,T)} + \|\chi_X\|_{L_1(0,T)} \le N$, $\|u_0\|_{V[0,T]} + \|u_X\|_{V[0,T]} \le N$, $\|p_0\|_{L_\infty(0,T)} + \|p_X\|_{L_\infty(0,T)} \le N$. Предполагается также, что для всех $\tau \in (0, T)$ и почти всех $t \in (0, T - \tau)$ выполнены неравенства

$$p_0(t+\tau) - p_0(t) \le a_\tau(t) \int_t^{t+\tau} p_0(t')\,dt', \quad p_X(t+\tau) - p_X(t) \le a_\tau(t) \int_t^{t+\tau} p_X(t')\,dt',$$

где $a_\tau \in L_1(0, T)$, $a_\tau \ge 0$ и $\sup_{0<\tau<T} \|a_\tau\|_{L_1(0,T)} \le N$.

Обобщенным решением задачи $\mathcal{P}_m$ ($1 \le m \le 3$) назовем вектор-функцию $z = (\eta, u, \theta, x_e) \in \mathcal{N}(Q) \times V_2(Q) \times [V_1(Q) \cap \mathfrak{M}_+(Q)] \times S_2^{1,1}W(Q)$ такую, что:

1) уравнения (1.1) и (1.4) удовлетворяются в $L_2(Q)$;

2) выполнены интегральные тождества

$$-(u, D_t\varphi)_Q + (\sigma, D\varphi)_Q = (u^0, \varphi^0)_\Omega + (g[x_e], \varphi)_Q - \\ -(p_X, \varphi_X)_{(0,T)} + (p_0, \varphi_0)_{(0,T)} \quad \forall \varphi \in \mathring{C}^1(\overline{Q}; S_m^T), \quad (1.10)$$

$$-(c_V\theta, D_t\psi)_Q + (\varpi, D\psi)_Q = (c_V\theta^0, \psi^0)_\Omega + (\sigma Du + f[x_e], \psi)_Q - \\ -(\mu_0\theta|_{x=0} - \chi_0, \psi_0)_{(0,T)} - (\mu_X\theta|_{x=X} - \chi_X, \psi_X)_{(0,T)} \quad \forall \psi \in \mathring{C}^1(\overline{Q}; S_3^T), \quad (1.11)$$

где σ и ϖ определены в (1.2) и (1.3), кроме того, $\varphi^0 = \varphi|_{t=0}$, $\varphi_0 = \varphi|_{x=0}$, $\varphi_X = \varphi|_{x=X}$ и $\psi^0 = \psi|_{t=0}$, $\psi_0 = \psi|_{x=0}$, $\psi_X = \psi|_{x=X}$;

3) начальные условия $\eta|_{t=0} = \eta^0$ и $x_e|_{t=0} = x_e^0$ выполнены в смысле пространств $C([0, T]; L_2(\Omega))$ и $C(\overline{Q})$;

4) краевые условия

$$u|_{x=0} = u_0 \text{ при } m = 1 \text{ и } u|_{x=X} = u_X \text{ при } m = 1, 2 \quad (1.12)$$

выполнены в $L_2(0, T)$ в смысле следов функций из $W_2^{1,0}(Q)$.

Верна следующая теорема существования "в целом" обобщенного решения.

Теорема 1.1. 1. *Пусть выполнены условия $C_1) - C_4)$. Тогда существует обобщенное решение задачи $\mathcal{P}_m$, удовлетворяющее оценкам*

$$|\!|\!|\, \eta \,|\!|\!|_{\mathcal{N}(Q)} + \|u\|_{V_2^{(1,1/2)}(Q)} + \|\theta\|_{V_1(Q)} + \|x_e\|_{S_2^{1,1}W(Q)} \le K(N), \quad (1.13)$$

$$\|\ln\theta\|_{L_{1,\infty}(Q)} + \|D\ln\theta\|_{L_2(Q)} \le K(N), \quad (1.14)$$

$$\|\theta\|_{L_{q_0,r_0}(Q)} + \|D\theta\|_{L_{q_1,r_1}(Q)} \le K_\varepsilon(N), \quad \|\theta\|_{2,1}^{\langle 0,1/2\rangle} \le K(N) \quad (1.15)$$

с любыми $q_0, r_0 \in [1,\infty]$, $q_1, r_1 \in [1,2]$ *такими, что* $(2q_0)^{-1}+r_0^{-1} = (1+\varepsilon)/2$, $(2q_1)^{-1}+r_1^{-1} = 1+\varepsilon/4$, $\varepsilon \in (0,1)$.

2. *Если дополнительно* $N^{-1} \le \theta^0(x)$ *п.в. в* Ω, *то верна также оценка*

$$K_2(N)^{-1} \le \theta(x,t) \quad \text{п. в. в} \quad Q. \tag{1.16}$$

Доказательство этой теоремы будет дано в § 5.

2. Полудискретная параболическая задача

Пусть $h = X/n$, $n = 2,3,\ldots$ Введем узлы $x_i = ih$, $i = \overline{0,n}$, и $x_{i-1/2} = (i-1/2)h$, $i = \overline{1,n}$. Положим $\Omega_{1/2} = [0,x_1)$, $\Omega_{i-1/2} = (x_{i-1},x_i)$ для $i = \overline{2,n-1}$ и $\Omega_{n-1/2} = (x_{n-1},X]$. Положим также $\Omega_0 = [0,x_{1/2})$, $\Omega_i = (x_{i-1/2},x_{i+1/2})$ для $i = \overline{1,n-1}$, и $\Omega_n = (x_{n-1/2},X]$. Пусть $\Omega^h = (x_{1/2},x_{n-1/2})$, $Q^h = Q^h_T = \Omega^h \times (0,T)$.

Введем пространства кусочно-постоянных функций

$$S^h(\overline{\Omega}) = \{w \mid w(x) = w_i \text{ на } \Omega_i,\ i = \overline{0,n}\},$$
$$S^h_{1/2}(\overline{\Omega}) = \{v \mid v(x) = v_{i-1/2} \text{ на } \Omega_{i-1/2},\ i = \overline{1,n}\}.$$

Для $w \in S^h(\overline{\Omega})$ через $\widehat{w}$ обозначаем функцию из $C(\overline{\Omega})$, совпадающую с w в узлах x_i, $i = \overline{0,n}$, и линейную на $\Omega_{i-1/2}$, $i = \overline{1,n}$. Для $v \in S^h_{1/2}(\overline{\Omega})$ через $\widehat{v}$ обозначаем функцию из $C(\overline{\Omega})$, совпадающую с v в узлах $x_{i-1/2}$, $i = \overline{1,n}$, и линейную на Ω_i, $i = \overline{0,n}$; предполагается, что функция $\widehat{v}$ доопределена некоторым образом при $x = 0,\ X$ (вообще говоря, $\widehat{v}(0) \ne v_{1/2}$, $\widehat{v}(X) \ne v_{n-1/2}$).

Справедлива формула интегрирования по частям

$$(w, D\widehat{v})_\Omega = w\widehat{v}|_{x=0}^{x=X} - (D\widehat{w}, v)_\Omega \quad \forall w \in S^h(\overline{\Omega}), \quad v \in S^h_{1/2}(\overline{\Omega}). \tag{2.1}$$

Для функций $w \in S^h(\overline{\Omega})$ верны неравенства

$$\|\widehat{w}\|_{L_q(\Omega)} \le \|w\|_{L_q(\Omega)} \le 2^{1/q}\|\widehat{w}\|_{L_q(\Omega)}. \tag{2.2}$$

Они верны и для функций $v \in S^h_{1/2}(\overline{\Omega})$, если $\widehat{v}|_{x=0} = v|_{x=0}$, $\widehat{v}|_{x=X} = v|_{x=X}$.

Введем операторы проектирования $\pi^h : L_1(\Omega) \to S^h(\overline{\Omega})$, $\pi^h_{1/2} : L_1(\Omega) \to S^h_{1/2}(\overline{\Omega})$, сопоставляющие заданной функции ψ кусочно-постоянную функцию, равную на множествах Ω_i ($i = \overline{0,n}$), $\Omega_{i-1/2}$ ($i = \overline{1,n}$) соответствующим средним значениям функции ψ. Обратим внимание на тождества

$$(\pi^h\psi, w)_\Omega = (\psi, w)_\Omega \quad \forall \psi \in L_1(\Omega), \quad w \in S^h(\overline{\Omega}), \tag{2.3}$$
$$(\pi^h_{1/2}\psi, v)_\Omega = (\psi, v)_\Omega \quad \forall \psi \in L_1(\Omega), \quad v \in S^h_{1/2}(\overline{\Omega}). \tag{2.4}$$

Пусть $w \in S^h(\overline{\Omega})$, $v \in S^h_{1/2}(\overline{\Omega})$. Положим $(I_h w)(x) = \int\limits_0^{x_{i-1/2}} w(x')\,dx'$ на $\Omega_{i-1/2}$, $i = \overline{1,n}$, и $(I_h v)(x) = \int\limits_0^{x_i} v(x')\,dx'$ на Ω_i, $i = \overline{0,n}$. Заметим, что $I_h : S^h(\overline{\Omega}) \to S^h_{1/2}(\overline{\Omega})$ и $I_h : S^h_{1/2}(\overline{\Omega}) \to S^h(\overline{\Omega})$. Введем на Ω^h функции $v_{(-)}$ и $v_{(+)}$ такие, что $v_{(-)}(x) = v_{i-1/2}$ и $v_{(+)}(x) = v_{i+1/2}$ на Ω_i, $i = \overline{1,n-1}$.

Рассмотрим полудискретную параболическую начально-краевую задачу

$$\alpha D_t v = D\widehat{s} + f \text{ в } Q, \quad s = \varkappa D\widehat{v} + \psi \text{ в } Q^h, \tag{2.5}$$
$$v|_{t=0} = v^0 \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{2.6}$$
$$-s|_{x=0} + \mu_0 v|_{x=0} = \chi_0, \quad s|_{x=X} + \mu_X v|_{x=X} = \chi_X \text{ на } (0,T) \tag{2.7}$$

относительно функции $v \in S^h_{1/2}(\overline{\Omega}) \otimes W^1_1(0,T)$ (знак $\otimes$ обозначает тензорное произведение линейных пространств). Здесь $\alpha, v^0 \in S^h_{1/2}(\overline{\Omega})$, $\varkappa \in S^h(\overline{\Omega}) \otimes L_\infty(0,T)$, $\psi \in S^h(\overline{\Omega}) \otimes L_2(0,T)$,

$f \in S^h_{1/2}(\overline{\Omega}) \otimes L_1(0,T)$, $\mu_0, \mu_X, \chi_0, \chi_X \in L_1(0,T)$. Кроме того, $s \in S^h(\overline{\Omega}) \otimes L_2(0,T)$. Предполагается, что $N^{-1} \le \alpha \le N$, $N^{-1} \le \varkappa \le N$, $\|(\mu_0)_-\|_{(0,T)} + \|(\mu_X)_-\|_{(0,T)} \le N$.

Искомая функция v принимает значения $v_{i-1/2}(t)$ на $\Omega_{i-1/2} \times [0,T]$, $i = \overline{1,n}$. Относительно функций $v_{i-1/2}(t)$ задача (2.5)–(2.7) является задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\alpha_{i-1/2} D_t v_{i-1/2} = \frac{s_i - s_{i-1}}{h} + f_{i-1/2}, \quad v_{i-1/2}(0) = v^0_{i-1/2}, \quad 1 \le i \le n,$$
$$\text{где } s_i = \varkappa_i \frac{v_{i+1/2} - v_{i-1/2}}{h} + \psi_i,\ 0 < i < n, \quad s_0 = \mu_0 v_{1/2} - \chi_0,$$

$s_n = -\mu_X v_{n-1/2} + \chi_X$. Ясно, что в сделанных предположениях решение v этой задачи существует и единственно. Выведем нужные нам результаты об оценках решения. Будем считать, что $\widehat{v}|_{x=0} = v|_{x=0}$, $\widehat{v}|_{x=X} = v|_{x=X}$.

Лемма 2.1. *При $\psi = 0$ и $\mu_0 \ge 0$, $\mu_X \ge 0$ справедлива оценка*

$$\max\{\|\alpha v\|_{L_{1,\infty}(Q)}, \|\mu_0 v|_{x=0}\|_{L_1(0,T)} + \|\mu_X v|_{x=X}\|_{L_1(0,T)}\} \le$$
$$\le \|\alpha v^0\|_{L_1(\Omega)} + \|f\|_{L_1(Q)} + \|\chi_0\|_{L_1(0,T)} + \|\chi_X\|_{L_1(0,T)}.$$

Доказательство. Умножим уравнение (2.5) на $\operatorname{sign} v$, проинтегрируем по Q_t и после интегрирования по частям (см. формулу (2.1)) получим равенство

$$\|\alpha v\|_{L_1(\Omega)} + (\varkappa D\widehat{v}, D\widehat{\operatorname{sign} v})_{Q_t} + (\mu_0 |v|_{x=0}| + \mu_X |v|_{x=X}|, 1)_{(0,t)} =$$
$$= \|\alpha v^0\|_{L_1(\Omega)} + (f, \operatorname{sign} v)_{Q_t} + (\chi_0, \operatorname{sign} v|_{x=0})_{(0,t)} + (\chi_X, \operatorname{sign} v|_{x=X})_{(0,t)}.$$

Поскольку $(D\widehat{v}) D\widehat{\operatorname{sign} v} \ge 0$, то из него легко следует утверждение леммы.

Лемма 2.2. *Если $\psi = 0$ и $f \ge 0$, $v^0 \ge 0$, $\chi_0 \ge 0$, $\chi_X \ge 0$, то $v \ge 0$.*

Доказательство. Представим функцию v в виде $v = v_+ - v_-$. Положим $\widehat{v}_- = \widehat{v_-}$. Известно ([16], гл. 2, лемма 3.3), что $D_t v_-(x,t) = D_t v(x,t)$ для почти всех тех $(x,t) \in Q$, где $v(x,t) < 0$, и $D_t v_-(x,t) = 0$ для почти всех остальных $(x,t) \in Q$. Ясно также, что $(D\widehat{v}_-)^2 \le (D\widehat{v}) D\widehat{v}_-$. Умножим уравнение (2.5) на v_- и проинтегрируем результат по Q_t. Отбрасывая знакоопределенные слагаемые, приходим к неравенству

$$0.5(\alpha v_-, v_-)_\Omega + (\varkappa D\widehat{v}_-, D\widehat{v}_-)_{Q_t} \le ((\mu_0)_-, (\widehat{v}_-|_{x=0})^2)_{(0,t)} + ((\mu_X)_-, (\widehat{v}_-|_{x=X})^2)_{(0,t)}.$$

Используя для $w = \widehat{v}_-$ неравенство (2.2) и мультипликативное неравенство

$$\|w\|^2_{C(\overline{\Omega})} \le c_X \|w\|_\Omega (\|w\|_\Omega + \|Dw\|_\Omega), \tag{2.8}$$

а также применяя неравенство Коши с ε, получаем

$$N^{-1} \|\widehat{v}_-\|^2_{V_2(Q_t)} \le N c I_t \big[((\mu_0)_- + (\mu_X)_-)^2 \|\widehat{v}_-\|^2_\Omega\big].$$

В силу леммы Гроноулла (см., напр., ([2], с. 33)) заключаем, что $\|\widehat{v}_-\|^2_{V_2(Q)} = 0$. Таким образом, $v_- = 0$, т.е. $v \ge 0$. $\square$

Лемма 2.3. *Справедлива энергетическая оценка*

$$\|\widehat{v}\|_{V_2(Q)} \le K(N)(\|v^0\|_\Omega + \|\psi\|_{Q^h} + \|f\|_{L_{q,r}(Q)} + \|\chi_0\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|\chi_X\|_{L_{4/3}(0,T)})$$

с произвольными $q, r \in [1, \infty]$, для которых $(2q)^{-1} + r^{-1} \le 5/4$.

Доказательство. Умножим уравнение (2.5) на v и проинтегрируем по Q_t. В результате получим равенство

$$0.5(\alpha v, v)_\Omega + (\varkappa D\widehat{v}, D\widehat{v})_{Q_t} + ((\mu_0)_+, (\widehat{v}|_{x=0})^2)_{(0,t)} + ((\mu_X)_+, (\widehat{v}|_{x=X})^2)_{(0,t)} =$$
$$= 0.5(\alpha v^0, v^0)_\Omega - (\psi, D\widehat{v})_{Q_t^h} + (f, v)_{Q_t} +$$
$$+((\mu_0)_-\widehat{v}|_{x=0} + \chi_0, \widehat{v}|_{x=0})_{(0,t)} + ((\mu_X)_-\widehat{v}|_{x=X} + \chi_X, \widehat{v}|_{x=X})_{(0,t)}.$$

Из него с учетом неравенств (2.2), (1.8), (1.9) и (2.8) следует оценка

$$N^{-1}\|\widehat{v}\|^2_{V_2(Q_t)} \le Nc_1\{I_t[((\mu_0)_- + (\mu_X)_-)^2\|\widehat{v}\|^2_\Omega] +$$
$$+ \|v^0\|^2_\Omega + \|\psi\|^2_{Q^h} + \|f\|^2_{L_{q,r}(Q)} + \|\chi_0\|^2_{L_{4/3}(0,T)} + \|\chi_X\|^2_{L_{4/3}(0,T)}\}.$$

Остается воспользоваться леммой Гронуолла. □

Лемма 2.4. *Пусть $q, r \in [1, \infty]$, $(2q)^{-1} + r^{-1} = 1 - \varepsilon/2$, $r_\varepsilon = 2/(1-\varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0, 1)$. Пусть выполнено условие*

$$\|(\mu_0)_-\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} + \|(\mu_X)_-\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} \le N. \tag{2.9}$$

Тогда справедлива оценка

$$\|v\|_{L_\infty(Q)} \le K_\varepsilon(N)(\|v^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\psi\|_{L_{2q,2r}(Q^h)} + \|f\|_{L_{q,r}(Q)} + \|\chi_0\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} + \|\chi_X\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)}). \tag{2.10}$$

Если $\psi = 0$, то оценка (2.10) справедлива и при $q = \infty$, $r = 1$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что в силу линейности задачи достаточно доказать оценку $\|v\|_{L_\infty(Q)} \le K_\varepsilon(N)$ в предположении, что

$$\|v^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\psi\|_{L_{2q,2r}(Q^h)} + \|f\|_{L_{q,r}(Q)} + \|\chi_0\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} + \|\chi_X\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} = 1. \tag{2.11}$$

Пусть $p \ge 1$ — параметр. Положим $v_p = |v|^{p-1}v$, $v_p^0 = |v^0|^{p-1}v^0$, $\widehat{v}_p = \widehat{v_p}$. Умножим уравнение (2.5) на $2pv_{2p-1}$ и проинтегрируем по Q_t. В результате получим равенство

$$(\alpha v_p, v_p)_\Omega + 2p(\varkappa D\widehat{v} + \psi, D\widehat{v}_{2p-1})_{Q_t^h} + 2pI_t[(\mu_0 v|_{x=0} - \chi_0)v_{2p-1}|_{x=0}] +$$
$$+ 2pI_t[(\mu_X v|_{x=X} - \chi_X)v_{2p-1}|_{x=X}] = (\alpha v_p^0, v_p^0)_\Omega + 2p(f, v_{2p-1})_{Q_t}. \tag{2.12}$$

Пользуясь неравенством $(D\widehat{v}_p)^2 \le p(D\widehat{v})D\widehat{v}_{2p-1}$ (оно следует из числового неравенства $(|b|^{p-1}b - |a|^{p-1}a)^2 \le p(b-a)(|b|^{2p-2}b - |a|^{2p-2}a)$), а также неравенством $|v_{2p-1}| \le v_p^2 + 1$ и предположением (2.11), выводим

$$(4N)^{-1}\|\widehat{v}_p\|^2_{V_2(Q)} \le N\|v_p^0\|^2_\Omega + 2p[\|\psi\|_{L_{2q,2r}(Q^h)}\|D\widehat{v}_{2p-1}\|_{L_{(2q)',(2r)'}(Q)} +$$
$$+(\|(\mu_0)_-\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} + \|(\mu_X)_-\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} + \|\chi_0\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} +$$
$$+\|\chi_X\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)})\|v_p^2 + 1\|_{L_{\infty,r'_\varepsilon}(Q)} + \|f\|_{L_{q,r}(Q)}\|v_p^2 + 1\|_{L_{q',r'}(Q)}] \le NX^2 +$$
$$+2p[\|D\widehat{v}_{2p-1}\|_{L_{(2q)',(2r)'}(Q)} + (N+1)\|v_p^2 + 1\|_{L_{\infty,r'_\varepsilon}(Q)} + \|v_p^2 + 1\|_{L_{q',r'}(Q)}]. \tag{2.13}$$

Заметим, что $v_{2p-1} = |v_p|^{1-1/p}v_p$, и поэтому в силу формулы конечных приращений Лагранжа имеем $D\widehat{v}_{2p-1} = (2-1/p)(D\widehat{v}_p)|\widetilde{v}_p|^{1-1/p}$, где $\widetilde{v}_p$ — промежуточное значение между $(v_p)_{(-)}$ и $(v_p)_{(+)}$. Поскольку $|\widetilde{v}_p|^{1-1/p} \le |\widetilde{v}_p| + 1$, то $\|D\widehat{v}_{2p-1}\|_{L_{(2q)',(2r)'}(Q)} \le 4\|D\widehat{v}_p\|_Q\| \, |v_p| \, + 1\|_{L_{2q',2r'}(Q)}$, и из (2.13) имеем

$$\|\widehat{v}_p\|_{V_2(Q)} \le pK_1[\|v_{p/(1+\varepsilon)}\|^{1+\varepsilon}_{L_{2q'(1+\varepsilon),2r'(1+\varepsilon)}(Q)} + \|v_{p/(1+\varepsilon)}\|^{1+\varepsilon}_{L_{\infty,4}(Q)} + 1].$$

Положим $p = p_k = (1+\varepsilon)^k$, $\Phi_k = \|\widehat{v}_{p_k}\|_{V_2(Q)}$, $k = 0, 1, \ldots$ Из полученного неравенства с учетом оценок (2.2) и (1.8) следует

$$\Phi_k \le (1+\varepsilon)^k K_2(\Phi^{1+\varepsilon}_{k-1} + 1), \quad k \ge 1.$$

Отсюда $\Phi_k^{1/p_k} \le K_{3,\varepsilon}(\Phi_0+1)$ ([14], гл. 2, лемма 5.6). Поэтому

$$\|v\|_{L_\infty(Q)} = \lim_{k\to\infty} \|\widehat{v}\|_{L_{2p_k,\infty}(Q)} \le \overline{\lim}_{k\to\infty}\Phi_k^{1/p_k} \le K_{3,\varepsilon}(\Phi_0+1).$$

Поскольку $\Phi_0 = \|\widehat{v}\|_{V_2(Q)} \le K_4$, см. лемму 2.3, то оценка (2.10) доказана.

Покажем, что если $\psi = 0$, то оценка (2.10) верна и при $q=\infty$, $r=1$. В силу линейности задачи можно считать $v^0 = 0$, $\chi_0 = \chi_X = 0$. Пусть сначала $(\mu_0)_- = (\mu_X)_- = 0$. Умножив уравнение (2.5) на $2pv_{2p-1}$ скалярно в $L_2(\Omega)$, приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt}\|\alpha^{1/(2p)}v\|^{2p}_{L_{2p}(\Omega)} \le 2p\|f\|_{L_{2p}(\Omega)}\|v\|^{2p-1}_{L_{2p}(\Omega)}.$$

Из него в свою очередь вытекает, что $\|v\|_{L_{2p,\infty}(Q)} \le N\|f\|_{L_{2p,1}(Q)}$. Переходя к пределу при $p\to\infty$, приходим к неравенству $\|v\|_{L_\infty(Q)} \le N\|f\|_{L_{\infty,1}(Q)}$.

Теперь, рассматривая $(\mu_0)_-v|_{x=0}$ и $(\mu_X)_-v|_{x=X}$ как заданные граничные значения типа χ_0, χ_X из $L_{r_\varepsilon}(0,T)$, пользуясь линейностью задачи и полученными выше в доказательстве оценками, имеем на $[0,T]$ неравенство

$$\|v\|_{L_\infty(Q_t)} \le K_\varepsilon\left[\|(\mu_0)_-v|_{x=0}\|_{L_{r_\varepsilon}(0,t)} + \|(\mu_X)_-v|_{x=X}\|_{L_{r_\varepsilon}(0,t)}\right] + N\|f\|_{L_{\infty,1}(Q)}.$$

Ясно, что $|v|_{x=0}| + |v|_{x=X}| \le 2\|v\|_{L_\infty(\Omega)}$. Возводя обе части неравенства в степень r_ε, по лемме Гроноулла имеем $\|v\|_{L_\infty(Q)} \le \overline{K}_\varepsilon\|f\|_{L_{\infty,1}(Q)}$. □

Следствие 2.1. В условиях леммы 2.4 справедлива оценка

$$\|v_+\|_{L_\infty(Q)} \le K_\varepsilon(N)\big(\|(v^0)_+\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\psi\|_{L_{2q,2r}(Q^h)} + \|f_+\|_{L_{q,r}(Q)} + \|(\chi_0)_+\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} + \|(\chi_X)_+\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)}\big).$$

Доказательство. Представим $v = u-w$, где u, w — решения задачи (2.5)–(2.7), отвечающие данным $(v^0)_+$, ψ, f_+, $(\chi_0)_+$, $(\chi_X)_+$ и $(v^0)_-$, $\psi=0$, f_-, $(\chi_0)_-$, $(\chi_X)_-$ соответственно. Из леммы 2.2 следует, что $w\ge 0$. Поэтому $v\le u$ и $v_+\le |u|$. Оценивая $\|u\|_{L_\infty(Q)}$ с помощью леммы 2.4, приходим к заявленной оценке. □

Лемма 2.5. *Пусть $q,r\in[1,\infty]$, $(2q)^{-1}+r^{-1} = 1-\varepsilon/2$, $r_\varepsilon = 2/(1-\varepsilon)$, где $\varepsilon\in(0,1)$. Пусть $v\in S^h_{1/2}(\overline{\Omega})\otimes W^1_1(0,T)$ удовлетворяет уравнению*

$$\alpha D_t v = D\widehat{s} + bv + f \quad в \quad Q, \qquad s = \varkappa D\widehat{v} \quad в \quad Q^h, \tag{2.14}$$

а также начальному условию (2.6) и краевым условиям (2.7). Пусть $f\ge 0$, $\chi_0\ge 0$, $\chi_X\ge 0$, $\|(\mu_0)_+\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} + \|(\mu_X)_+\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} \le N$ и $b\in S^h_{1/2}(\overline{\Omega})\otimes L_1(0,T)$, $\|b_-\|_{L_{q,r}(Q)}\le N$.

Если $0 < v^0_{\min} \le v^0(x)$ на Ω, то справедлива оценка

$$K_{1,\varepsilon}(N)^{-1}v^0_{\min} \le v \quad на \quad Q. \tag{2.15}$$

Доказательство. Поскольку $v^0>0$ и функция v непрерывна по t, то оценку (2.15) достаточно установить в предположении, что $v>0$ в Q. Разделим уравнение (2.14) на $-v^2$ и для функции $y = 1/v$ получим уравнение

$$\alpha D_t y = D\widehat{w} - by - (g+f)y^2 \quad \text{в} \quad Q, \qquad w = \varkappa D\widehat{y} \quad \text{в} \quad Q^h,$$

где $g = D\widehat{s} + v^2 D\widehat{w}$. Начальное условие (2.6) преобразуем к виду $y|_{t=0} = 1/v^0$, а краевые условия (2.7) — к виду

$$-w|_{x=0} - \mu_0 y|_{x=0} = -\chi_0(y|_{x=0})^2, \quad w|_{x=X} - \mu_X y|_{x=X} = -\chi_X(y|_{x=X})^2.$$

Справедлива формула $g_{i+1/2} = d_i y_{i-1/2} + d_{i+1}y_{i+3/2}$ для $1\le i\le n-2$, где $d_i = \varkappa_i\big[(v_{i+1/2} - v_{i-1/2})/h\big]^2$; кроме того, $g_{1/2} = d_1 y_{3/2}$ и $g_{n-1/2} = d_{n-1}y_{n-3/2}$ (ср. с [3]). В силу этих формул $g\ge 0$.

Согласно следствию 2.1 справедлива оценка

$$\|y\|_{L_\infty(Q_t)} \le K_\varepsilon(\|1/v^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|b_-y\|_{L_{q,r}(Q_t)}), \quad 0\le t\le T.$$

Возводя обе части полученного неравенства в степень r и применяя лемму Гронуолла, выводим оценку (2.15). $\square$

Лемма 2.6. *Пусть* $q_0, r_0 \in [1,\infty]$, $q_1, r_1 \in [1,2]$ *и* $(2q_0)^{-1} + r_0^{-1} = (1+\varepsilon)/2$ *или* $q_0 = 1$, $r_0 = \infty$, $(2q_1)^{-1} + r_1^{-1} = 1 + \varepsilon/4$, $\varepsilon \in (0,1)$. *Пусть* $\psi = 0$ *и выполнено условие* (2.9). *Тогда справедлива оценка*

$$\|v\|_{L_{q_0,r_0}(Q)} + \|D\widehat{v}\|_{L_{q_1,r_1}(Q)} \leq K_{2,\varepsilon}(N)(\|v^0\|_{L_1(\Omega)} + \|f\|_{L_1(Q)} + \|\chi_0\|_{L_1(0,T)} + \|\chi_X\|_{L_1(0,T)}). \quad (2.16)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную сопряженную задачу

$$-\alpha D_t V = D\widehat{S} + \pi^h_{1/2}\Phi \quad \text{в} \quad Q, \quad S = \varkappa D\widehat{V} - \pi^h\Psi \quad \text{в} \quad Q^h,$$
$$V|_{t=T} = 0, \quad -S|_{x=0} + \mu_0 V|_{x=0} = 0, \quad S|_{x=X} + \mu_X V|_{x=X} = 0,$$

где $V \in S^h_{1/2}(\overline{\Omega}) \otimes W^1_1(0,T)$, а $\Phi \in L_{q_0',r_0'}(Q)$, $\Psi \in L_{q_1',r_1'}(Q)$. В силу леммы 2.4 и неравенств

$$\|\pi^h\varphi\|_{L_q(\Omega^h)} \leq \|\varphi\|_{L_q(\Omega^h)}, \quad \|\pi^h_{1/2}\varphi\|_{L_q(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{L_q(\Omega)}, \ q \in [1,\infty],$$

для ее решения справедлива оценка

$$\|V\|_{L_\infty(Q)} \leq K_\varepsilon(\|\Phi\|_{L_{q_0',r_0'}(Q)} + \|\Psi\|_{L_{q_1',r_1'}(Q^h)}). \quad (2.17)$$

Умножим уравнение (2.5) на V и проинтегрируем результат по Q. Интегрируя по частям и применяя тождества (2.3), (2.4), придем к равенству

$$(v,\Phi)_Q + (D\widehat{v},\Psi)_{Q^h} = (\alpha v^0, V|_{t=0})_\Omega + (f,V)_Q + (\chi_0, V|_{x=0})_{(0,T)} + (\chi_X, V|_{x=X})_{(0,T)}.$$

Применяя оценку (2.17), имеем

$$\sup_{\|\Phi\|_{L_{q_0',r_0'}(Q)}\leq 1}(v,\Phi)_Q + \sup_{\|\Psi\|_{L_{q_1',r_1'}(Q^h)}\leq 1}(D\widehat{v},\Psi)_{Q^h} \leq$$
$$\leq K_{2,\varepsilon}(\|v^0\|_{L_1(\Omega)} + \|f\|_{L_1(Q)} + \|\chi_0\|_{L_1(0,T)} + \|\chi_X\|_{L_1(0,T)}).$$

Используя результат, обратный неравенству Гёльдера ([13], § 2.6), приходим к оценке (2.16). Отметим, что аналог оценки (2.16) содержится в [10]. $\square$

Следствие 2.2. Если $\psi = 0$ и выполнено условие (2.9), то

$$\|s|_{x=0}\|_{L_1(0,T)} + \|s|_{x=X}\|_{L_1(0,T)} \leq K_{3,\varepsilon}(N)(\|v^0\|_{L_1(\Omega)} + \|f\|_{L_1(Q)} + \|\chi_0\|_{L_1(0,T)} + \|\chi_X\|_{L_1(0,T)}).$$

Доказательство. Ясно, что $-s|_{x=0} + (\mu_0)_+ v|_{x=0} = \widetilde{\chi}_0$, $s|_{x=X} + (\mu_X)_+ v|_{x=0} = \widetilde{\chi}_X$, где $\widetilde{\chi}_a = \chi_a + (\mu_a)_- v|_{x=a}$, $a = 0, X$. По лемме 2.1 имеем

$$\|s|_{x=0}\|_{L_1(0,T)} + \|s|_{x=X}\|_{L_1(0,T)} \leq \|\alpha v^0\|_{L_1(\Omega)} + \|f\|_{L_1(Q)} + 2\|\widetilde{\chi}_0\|_{L_1(0,T)} + 2\|\widetilde{\chi}_X\|_{L_1(0,T)}.$$

Поскольку

$$\|\widetilde{\chi}_a\|_{L_1(0,T)} \leq \|\chi_a\|_{L_1(0,T)} + c\|(\mu_a)_-\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)}(\|v\|_{L_{1,r_\varepsilon'}(Q)} + \|D\widehat{v}\|_{L_{1,r_\varepsilon'}(Q)})$$

для $a = 0, X$, то остается применить оценку (2.16). $\square$

Лемма 2.7. *Пусть* $\psi = 0$ *и выполнено условие* (2.9). *Тогда*

$$\|v\|_{2,1}^{\langle 0,1/2\rangle} \leq K_{4,\varepsilon}(N)(\|v^0\|_{L_1(\Omega)} + \|f\|_{L_1(Q)} + \|\chi_0\|_{L_1(0,T)} + \|\chi_X\|_{L_1(0,T)}). \quad (2.18)$$

Доказательство. Для $w \in S^h_{1/2}(\overline{\Omega})$ справедливо неравенство

$$\|w\|^2_\Omega \le N(\alpha w, w)_\Omega \le N(\|w\|_\Omega + \|D\widehat{w}\|_{\Omega^h})\|\alpha w\|^{(-1)}_h,$$

где $\|z\|^{(-1)}_h = \max_{\varphi \in S^h_{1/2}(\overline{\Omega})}(z,\varphi)_\Omega/(\|\varphi\|_\Omega + \|D\widehat{\varphi}\|_{\Omega^h})$. Из него следует, что

$$\|\Delta^{(\tau)}v\|^2_{L_{2,1}(Q_{T-\tau})} \le 2N(\|v\|_{L_{2,1}(Q)} + \|D\widehat{v}\|_{L_{2,1}(Q)})\big\|\|\alpha\Delta^{(\tau)}v\|^{(-1)}_h\big\|_{L_1(0,T-\tau)}. \tag{2.19}$$

Далее с учетом уравнения (2.5) имеем

$$\begin{aligned}\big\|\|\alpha\Delta^{(\tau)}v\|^{(-1)}_h\big\|_{L_1(0,T-\tau)} \le \tau\big\|\|\alpha D_t v\|^{(-1)}_h\big\|_{L_1(0,T)} = \tau\big\|\|D\widehat{s} + f\|^{(-1)}_h\big\|_{L_1(0,T)} \le \\ \le c_X(\|s\|_{L_{2,1}(Q)} + \|s|_{x=0}\|_{L_1(0,T)} + \|s|_{x=X}\|_{L_1(0,T)} + \|f\|_{L_1(Q)})\tau.\end{aligned}$$

Применяя лемму 2.6, следствие 2.2 и учитывая, что $\|s\|_{L_{2,1}(Q)} \le N\|D\widehat{v}\|_{L_{2,1}(Q)}$, переходим от неравенства (2.19) к неравенству (2.18). □

3. Полудискретный метод решения задач $\mathcal{P}_m$

Построим полудискретный аналог системы уравнений (1.1)–(1.4):

$$D_t\eta^h = D\widehat{u}^h \quad \text{в} \quad Q, \tag{3.1}$$

$$D_t u^h = D\widehat{\sigma}^h + g^h, \sigma^h = \nu^h\rho^h D\widehat{u}^h - p^h, p^h = k^h\rho^h\theta^h, \rho^h = 1/\eta^h \text{ в } Q, \tag{3.2}$$

$$c^h_V D_t\theta^h = D\widehat{\varpi}^h + \sigma^h D\widehat{u}^h + f^h \quad \text{в} \quad Q, \quad \varpi^h = \lambda^h\widetilde{\rho}^h D\widehat{\theta}^h \quad \text{в} \quad Q^h, \tag{3.3}$$

$$D_t x^h_e = u^h \quad \text{в} \quad Q. \tag{3.4}$$

Здесь $\nu^h = \pi^h_{1/2}\nu$, $k^h = \pi^h_{1/2}k$, $c^h_V = \pi^h_{1/2}c_V$, $\lambda^h = \pi^h\lambda$, $\widetilde{\rho}^h = [\pi^h\eta^h]^{-1}$, $g^h = \pi^h g[\widehat{x}^h_e]$, $f^h = \pi^h_{1/2}f[\widehat{x}^h_e]$. Кроме того, $\widehat{u}^h = \widehat{u^h}$, $\widehat{\sigma}^h = \widehat{\sigma^h}$, $\widehat{\varpi}^h = \widehat{\varpi^h}$, $\widehat{\theta}^h = \widehat{\theta^h}$, $\widehat{x}^h_e = \widehat{x^h_e}$. Искомой является вектор-функция $z^h = (\eta^h, u^h, \theta^h, x^h_e)$ со свойствами $\eta^h, \theta^h \in S^h_{1/2}(\overline{\Omega}) \otimes W^1_1(0,T)$, $u^h, x^h_e \in S^h(\overline{\Omega}) \otimes W^1_1(0,T)$ и $\eta^h > 0$, $\theta^h > 0$ в Q.

Выписанную систему уравнений дополним начальными условиями

$$(\eta^h, u^h, \theta^h, x^h_e)\,|_{t=0} = (\eta^{0,h}, u^{0,h}, \theta^{0,h}, x^{0,h}_e) \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{3.5}$$

краевыми условиями

$$-\varpi^h|_{x=0} + \mu_0\theta^h|_{x=0} = \chi_0, \quad \varpi^h|_{x=X} + \mu_X\theta^h|_{x=X} = \chi_X \quad \text{на} \quad (0,T) \tag{3.6}$$

и одной из пар краевых условий

$$u^h\big|_{x=0} = u^{(\tau)}_0, \qquad u^h\big|_{x=X} = u^{(\tau)}_X \qquad \text{на } (0,T), \tag{3.7$_1$}$$

$$\widehat{\sigma}^h\big|_{x=0} = -p^{(\tau)}_0, \qquad u^h\big|_{x=X} = u^{(\tau)}_X \qquad \text{на } (0,T), \tag{3.7$_2$}$$

$$\widehat{\sigma}^h\big|_{x=0} = -p^{(\tau)}_0, \qquad \widehat{\sigma}^h\big|_{x=X} = -p^{(\tau)}_X \qquad \text{на } (0,T). \tag{3.7$_3$}$$

Здесь $\eta^{0,h} = \pi^h_{1/2}\eta^0$, $\theta^{0,h} = \pi^h_{1/2}\theta^0$, $x^{0,h}_e = I_h\eta^{0,h}$. Дополнительно $u^{0,h} = \pi^h u^0$ на Ω^h при $m = 1$, на $\Omega \setminus \Omega_n$ при $m = 2$, на Ω при $m = 3$, а также $u^{0,h} = u^{(\tau)}_0(0)$ на Ω_0 при $m = 1$, $u^{0,h} = u^{(\tau)}_X(0)$ на Ω_n при $m = 1, 2$. Кроме того, при $t > T$ полагаем $u_0(t) = u_0(T)$, $u_X(t) = u_X(T)$, $p_0(t) = p_X(t) = 0$.

Положим $\widehat{\theta}^h\big|_{x=0} = \theta^h\big|_{x=0}$, $\widehat{\theta}^h\big|_{x=X} = \theta^h\big|_{x=X}$. Способ доопределения значений $\widehat{\sigma}^h\,|_{x=0,X}$ ясен из краевых условий (3.7$_m$) и уравнения (3.2). Так, $\widehat{\sigma}^h\,|_{x=0} = \widehat{\sigma}^h\,\Big|_{x=x_{1/2}} - (h/2)\big(D_t u^{(\tau)}_0 - g^h\,|_{x=0}\big)$ при $m = 1$ и $\widehat{\sigma}^h\,|_{x=X} = \widehat{\sigma}^h\,\Big|_{x=x_{n-1/2}} + (h/2)\big(D_t u^{(\tau)}_X - g^h\,|_{x=X}\big)$ при $m = 1, 2$.

Обратим внимание на следующие из условий C_3) неравенства

$$\|u_a^{(\tau)}\|_{C[0,T]} + \|D_t u_a^{(\tau)}\|_{L_1(0,T)} \le \|u_a\|_{V[0,T]} \le N, \quad a = 0, X, \tag{3.8}$$

$$\|p_a^{(\tau)}\|_{C[0,T]} \le \|p_a\|_{L_\infty(0,T)}, \quad D_t p_a^{(\tau)} \le a_\tau p_a^{(\tau)}, \quad a = 0, X. \tag{3.9}$$

Задачу (3.1)–(3.6), (3.7_m) назовем *задачей* $\mathcal{P}_m^h$ ($m = 1, 2, 3$). Сформулируем для нее аналог теоремы 1.1. Пусть $\tau \le N^{-2}$ при $m = 1$.

Теорема 3.1. 1. *Пусть выполнены условия* $C_1) - C_4$). *Тогда задача* $\mathcal{P}_m^h$ *имеет решение* $z^h = (\eta^h, u^h, \theta^h, x_e^h)$, *удовлетворяющее оценкам*

$$\left| \eta^h \right|_{\mathcal{N}(Q)} + \|\widehat{u}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} + \|\widehat{\theta}^h\|_{V_1(Q)} + \|\widehat{x}_e^h\|_{S_2^{1,1}W(Q)} \le K(N), \tag{3.10}$$

$$\|\ln\theta^h\|_{L_{1,\infty}(Q)} + \|D\widehat{\ln\theta^h}\|_{L_2(Q^h)} \le K(N), \tag{3.11}$$

$$\|\theta^h\|_{L_{q_0,r_0}(Q)} + \|D\widehat{\theta}^h\|_{L_{q_1,r_1}(Q)} \le K_\varepsilon(N), \quad \|\theta^h\|_{2,1}^{\langle 0,1/2\rangle} \le K(N) \tag{3.12}$$

с любыми $q_0, r_0 \in [1, \infty]$, $q_1, r_1 \in [1, 2]$ *такими, что* $(2q_0)^{-1} + r_0^{-1} = (1+\varepsilon)/2$, $(2q_1)^{-1} + r_1^{-1} = 1 + \varepsilon/4$, $\varepsilon \in (0, 1)$.

2. *Если дополнительно* $N^{-1} \le \theta^0(x)$ *п. в. в* Ω, *то верна оценка*

$$K_2(N)^{-1} \le \theta^h(x, t) \quad \text{в} \quad Q. \tag{3.13}$$

Задача $\mathcal{P}_m^h$ является задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\eta_{i-1/2}^h(t)$ ($i = \overline{1, n}$), $u_i^h(t)$ ($i = \overline{1, n-1}$ при $m = 1$, $i = \overline{0, n-1}$ при $m = 2$, $i = \overline{0, n}$ при $m = 3$), $\theta_{i-1/2}^h(t)$ ($i = \overline{1, n}$) и $x_{e,i}^h(t)$ ($i = \overline{0, n}$). В сделанных предположениях на данные в силу теоремы Каратеодори [17] ее решение существует на достаточно малом отрезке времени $0 \le t \le T_0$ ($T_0 > 0$). Возможность продолжения решения на весь отрезок $[0, T]$ с сохранением свойств $\eta^h > 0$, $\theta^h > 0$ вытекает из априорной оценки (3.10) и оценки $\theta^h \ge \delta^h = \exp(-K(N)/h) > 0$, следующей из (3.11). Поэтому ниже в § 4 мы сосредоточимся на выводе оценок (3.10)–(3.13) произвольного решения z^h задачи $\mathcal{P}_m^h$.

4. Вывод априорных оценок приближенных решений

Заметим, что уравнение (3.1) с учетом формулы $\sigma^h = \nu^h \rho^h D\widehat{u}^h - k^h \rho^h \theta^h$ может быть записано в каждой из следующих форм:

$$D_t \eta^h = (1/\nu^h)\sigma^h \eta^h + (k^h/\nu^h)\theta^h, \tag{4.1}$$

$$\sigma^h \eta^h = D_t(\nu^h \eta^h) - k^h \theta^h. \tag{4.2}$$

Положим $V^h(t) = \|\eta^h(\cdot, t)\|_{L_1(\Omega)}$.

Лемма 4.1. *При* $m = 1$ *верны формула* $V^h = \|\eta^0\|_{L_1(\Omega)} + I_t(u_X^{(\tau)} - u_0^{(\tau)})$ *и двусторонняя оценка*

$$(2N)^{-1} \le V^h(t) \le (X + 2T)N. \tag{4.3}$$

Доказательство см. в ([12], лемма 3.1). Именно здесь используются условия $N^{-1} \le \|\eta^0\|_{L_1(\Omega)} + I_t(u_X - u_0)$ и $\tau \le N^{-2}$.

При $m = 1$ положим $u_\Gamma^h = (1 - \ell^h)u_0^{(\tau)} + \ell^h u_X^{(\tau)}$, где $\ell^h = I_h \eta^h / V^h$. Заметим, что $u_\Gamma^h|_{x=0} = u_0^{(\tau)}$, $u_\Gamma^h|_{x=X} = u_X^{(\tau)}$, $0 \le \ell^h \le 1$ и справедливы формулы

$$D_t u_\Gamma^h = (1 - \ell^h)D_t u_0^{(\tau)} + \ell^h D_t u_X^{(\tau)} + d_V(u^h - u_\Gamma^h), \ D\widehat{u}_\Gamma^h = d_V \eta^h, \tag{4.4}$$

где $d_V = (u_X^{(\tau)} - u_0^{(\tau)})/V^h$. Положим $u_\Gamma^h = u_X^{(\tau)}$ при $m = 2$, $u_\Gamma^h = 0$ при $m = 3$. Введем функцию $v^h = u^h - u_\Gamma^h$ и (при $m = 3$) функцию $p_\Gamma^{(\tau)}(x, t) = (1 - x/X)\, p_0^{(\tau)}(t) + (x/X)p_X^{(\tau)}(t)$.

Лемма 4.2. *Справедливо уравнение энергетического баланса*

$$D_t\mathcal{E}^h = \Gamma^h_m + (g^h - D_t u^h_\Gamma, v^h)_\Omega + (f^h, 1)_\Omega + \chi_0 + \chi_X, \tag{4.5}$$

в котором $\mathcal{E}^h = \|c^h_V\theta^h\|_{L_1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v^h\|^2_\Omega + I_t(\mu_0\theta^h|_{x=0} + \mu_X\theta^h|_{x=X}) \ge 0$, $\Gamma^h_1 = D_t(d_V, \nu^h\eta^h)_\Omega - (D_t d_V, \nu^h\eta^h)_\Omega - (d_V, k^h\theta^h)_\Omega$, $\Gamma^h_2 = -D_t(p^{(\tau)}_0, \eta^h)_\Omega + (D_t p^{(\tau)}_0, \eta^h)_\Omega$, $\Gamma^h_3 = -D_t(p^{(\tau)}_\Gamma, \eta^h)_\Omega + (D_t p^{(\tau)}_\Gamma, \eta^h)_\Omega - ((p^{(\tau)}_X - p^{(\tau)}_0)/X, u^h)_\Omega$.

Доказательство. Запишем уравнение (3.2) в виде $D_t v^h = D\widehat{\sigma}^h + g^h - D_t u^h_\Gamma$. Умножив его скалярно в $L_2(\Omega)$ на v^h, получим равенство

$$\frac{1}{2}D_t\left(\|v^h\|^2_\Omega\right) + (\sigma^h, D\widehat{u}^h)_\Omega = \Gamma^h + (g^h - D_t u^h_\Gamma, v^h)_\Omega, \tag{4.6}$$

в котором $\Gamma^h = (\sigma^h, D\widehat{u}^h_\Gamma)_\Omega + \left(\widehat{\sigma}^h v^h\right)|_{x=X} - \left(\widehat{\sigma}^h v^h\right)|_{x=0}$. Преобразуем выражение для Γ^h. При $m = 1$ имеем $v^h|_{x=0} = v^h|_{x=X} = 0$, $D\widehat{u}^h_\Gamma = d_V\eta^h$ и поэтому (с учетом формулы (4.2)) $\Gamma^h = d_V(\sigma^h, \eta^h)_\Omega = \Gamma^h_1$. При $m = 2$ имеем $v^h|_{x=X} = 0$, $D\widehat{u}^h_\Gamma = 0$ и поэтому $\Gamma^h = -\left(\widehat{\sigma}^h v^h\right)|_{x=0} = p^{(\tau)}_0(u^h|_{x=0} - u^h|_{x=X}) = -(p^{(\tau)}_0, D\widehat{u}^h)_\Omega = -(p^{(\tau)}_0, D_t\eta^h)_\Omega = \Gamma^h_2$. При $m = 3$, учитывая, что величина $Dp^{(\tau)}_\Gamma = (p^{(\tau)}_X - p^{(\tau)}_0)/X$ не зависит от x, имеем $\Gamma^h = -(p^{(\tau)}_\Gamma\widehat{u}^h)|_{x=X} + (p^{(\tau)}_\Gamma\widehat{u}^h)|_{x=0} = -(Dp^{(\tau)}_\Gamma, \widehat{u}^h)_\Omega - (p^{(\tau)}_\Gamma, D\widehat{u}^h)_\Omega = -(Dp^{(\tau)}_\Gamma, u^h)_\Omega - (p^{(\tau)}_\Gamma, D_t\eta^h)_\Omega = \Gamma^h_3$.

Интегрируя уравнение (3.3) по Ω с учетом краевых условий (3.6), имеем

$$D_t\|c^h_V\theta^h\|_{L_1(\Omega)} + \mu_0\theta^h|_{x=0} + \mu_X\theta^h|_{x=X} = (\sigma^h, D\widehat{u}^h)_\Omega + (f^h, 1)_\Omega + \chi_0 + \chi_X.$$

Складывая это равенство с равенством (4.6), приходим к уравнению (4.5). □

Предложение 4.1. *Справедлива энергетическая оценка*

$$\|\theta^h\|_{L_{1,\infty}(Q)} + \|u^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} \le K(N). \tag{4.7}$$

Доказательство. Применим к уравнению (4.5) оператор I_t и получим

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^h(t) &= \mathcal{E}^h(0) + I_t\Gamma^h_m + (g^h - D_t u^h_\Gamma, v^h)_{Q_t} + (f^h, 1)_{Q_t} + I_t\chi_0 + I_t\chi_X \le \\ &\le N\|\theta^0\|_{L_1(\Omega)} + \|u^0\|^2_\Omega + \|u^h_\Gamma|_{t=0}\|^2_\Omega + I_t\Gamma^h_m + \|\overline{g}\|_{L_{2,1}(Q)}\|v^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} + \\ &+ I_t\left[\|D_t u^h_\Gamma\|_\Omega\|v^h\|_\Omega\right] + \|\overline{f}\|_{L_1(Q)} + \|\chi_0\|_{L_1(0,T)} + \|\chi_X\|_{L_1(0,T)} \le \\ &\le I_t\Gamma^h_m + N\|v^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} + I_t\left[\|D_t u^h_\Gamma\|_\Omega\|v^h\|_\Omega\right] + K_1.\end{aligned} \tag{4.8}$$

В последнем неравенстве использованы условия $C_2)$–$C_4)$.

При $m = 1$, учитывая, что $\|\nu^h\eta^h\|_{L_1(\Omega)} \le NV^h$, $k^h \le N^2 c^h_V$, используя формулу $D_t d_V = \left[D_t(u^{(\tau)}_X - u^{(\tau)}_0)\right]/V^h - d^2_V$, оценки (4.3) и (3.8), имеем

$$|I_t\Gamma^h_1| \le K_2(\|d_V\|_{C[0,T]} + \|D_t d_V\|_{L_1(0,T)} + \|d_V\|_{C[0,T]}I_t\|c^h_V\theta^h\|_{L_1(\Omega)}) \le K_3 I_t\mathcal{E}^h + K_4.$$

Используя неравенство (4.8), первую из формул (4.4) и оценку $\|v^h\|_\Omega \le \sqrt{2}(\mathcal{E}^h)^{1/2}$, приходим к неравенству

$$Y \le I_t(bY) + K_5 Y^{1/2}_{\max} + K_6 \tag{4.9}$$

для функции $Y = \mathcal{E}^h$; здесь $b = 2|d_V| + K_3$, $Y_{\max} = \|Y\|_{C[0,T]}$.

При $m = 2$ и $m = 3$ при помощи неравенств (3.8) и (3.9) выводим из (4.8) неравенство вида (4.9), в котором $Y = \mathcal{E}^h + (p^{(\tau)}_0, \eta^h)_\Omega$ при $m = 2$, $Y = \mathcal{E}^h + (p^{(\tau)}_\Gamma, \eta^h)_\Omega$ при $m = 3$ и $b = a_\tau$ при $m = 2, 3$.

В силу леммы Гроноулла из неравенства (4.9) следует оценка $Y_{\max} \le K_7$ и тем самым — оценка (4.7). □

Разрешая уравнение (4.1) относительно η^h, получаем важную формулу

$$\eta^h = a^h \left\{ \eta^{0,h} + I_t \left[(1/a^h)(k^h/\nu^h)\theta^h \right] \right\}, \quad a^h = \exp\left[(1/\nu^h) I_t \sigma^h \right]. \tag{4.10}$$

Лемма 4.3. *Справедлива оценка* $\|I_t \sigma^h\|_{L_\infty(Q)} \le K(N)$.

Доказательство. В случае $m = 1$ справедлива формула

$$I_t \sigma^h = I_h u_g^h - (I_h u_g^h, \eta^h/V^h)_\Omega + I_t(\sigma^h, \eta^h/V^h)_\Omega - I_t(u_g^h, v^h/V^h)_\Omega, \tag{4.11}$$

где $u_g^h = u^h - u^{0,h} - I_t g^h$ (см. [18], доказательство леммы 3.4; аналогичная формула имеется также в [12], доказательство леммы 3.3).

Принимая во внимание формулу (4.2), имеем

$$I_t(\sigma^h, \eta^h/V^h)_\Omega = \left(\nu^h, \eta^h/V^h\right)_\Omega - \left(\nu^h, \eta^{0,h}/V^h(0)\right)_\Omega + \\ + I_t\left[d_V\left(\nu^h, \eta^h/V^h\right)_\Omega\right] - I_t(k^h\theta^h, 1/V^h)_\Omega. \tag{4.12}$$

Учитывая также, что $\|\eta^h\|_{L_1(\Omega)} = V^h$, $0 \le \nu^h \le N, 0 \le k^h \le N$ и $(2N)^{-1} \le V^h$, из равенств (4.11) и (4.12) выводим оценку

$$\|I_t\sigma^h\|_{L_\infty(Q)} \le X^{1/2}\|u_g^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} + N + 2N^2(\|u_X^{(\tau)}\|_{L_1(0,T)} + \|u_0^{(\tau)}\|_{L_1(0,T)}) + \\ + 2NT\big(N\|\theta^h\|_{L_{1,\infty}(Q)} + \|u_g^h\|_{L_{2,\infty}(Q)}\|v^h\|_{L_{2,\infty}(Q)}\big).$$

Отсюда уже в силу энергетической оценки (4.7) следует заявленная оценка. □

При $m = 2, 3$ из уравнения (2.2) и краевого условия $\widehat{\sigma}^h|_{x=0} = -p_0^{(\tau)}$ сразу следует равенство $I_t\sigma^h = I_h u_g^h - I_t p_0^{(\tau)}$. Поэтому верна оценка

$$\|I_t\sigma^h\|_{L_\infty(Q)} \le X^{1/2}\|u_g^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} + \|p_0\|_{L_1(0,T)} \le K.$$

Следствие 4.1. Справедливы двусторонние оценки

$$K_1(N)^{-1} \le \eta^h \le K_1(N)(1 + I_t\theta^h), \tag{4.13}$$

$$K_2(N)^{-1} \le V^h \le K_2(N). \tag{4.14}$$

Доказательство. Оценка (4.13) непосредственно следует из формулы (4.10), леммы 4.3 и неравенства $N^{-1} \le \eta^{0,h} \le N$. Так как $\|\theta^h\|_{L_{1,\infty}(Q)} \le K$, то при $m = 2, 3$ интегрирование неравенства (4.13) по Ω приводит к оценке (4.14). При $m = 1$ эта оценка содержится в лемме 4.1. □

Лемма 4.4. *Справедлив закон изменения полной энтропии:*

$$D_t\big(c_V^h \ln\theta^h + k^h \ln\eta^h, 1\big)_\Omega = \big(-\lambda^h\widetilde{\rho}^h D\widehat{\theta}^h, D(\widehat{1/\theta^h})\big)_{\Omega^h} - \mu_0 - \mu_X + \\ + \chi_0/\theta^h|_{x=0} + \chi_X/\theta^h|_{x=X} + \big(1/\theta^h, \nu^h\rho^h\left(D\widehat{u}^h\right)^2 + f^h\big)_\Omega. \tag{4.15}$$

Доказательство. Умножим уравнения (3.1) и (3.3) скалярно в $L_2(\Omega)$ на k^h/η^h и $1/\theta^h$ соответственно, проинтегрируем по частям с учетом краевых условий (3.6). Сложив полученные равенства, выведем уравнение (4.15). □

Следствие 4.2. Справедливы оценки

$$\|\beta^h\|_{L_1(0,T)} \le K(N), \text{ где } \beta^h = \big(-\widetilde{\rho}^h D\widehat{\theta}^h, D(\widehat{1/\theta^h})\big)_{\Omega^h} \ge 0, \tag{4.16}$$

$$\|\ln\theta^h\|_{L_{1,\infty}(Q)} + \|(\widetilde{\rho}^h)^{1/2} D\widehat{\ln\theta^h}\|_{Q^h} \le K(N). \tag{4.17}$$

Доказательство. Применим к уравнению (4.15) оператор I_t. Учтем формулу $\ln\theta^h = -|\ln\theta^h| + 2(\ln\theta^h)_+$ и отбросим знакоопределенные слагаемые. Кроме того, воспользуемся неравенствами $(\ln\theta^h)_+ \le \theta^h$, $\ln\eta^h \le \eta^h$ и неравенствами $-\ln\theta^{0,h} \le -\pi^h_{1/2}(\ln\theta^0)$, $-\ln\eta^{0,h} \le \ln N$. Тогда получим

$$N^{-1}(\|\ln\theta^h\|_{L_1(\Omega)} + I_t\beta^h) \le \big(2c_V^h(\ln\theta^h)_+ + k^h\ln\eta^h, 1\big)_\Omega -$$
$$- \big(c_V^h\ln\theta^{0,h} + k^h\ln\eta^{0,h}, 1\big)_\Omega + I_t\mu_0 + I_t\mu_X \le$$
$$\le 2N\|\theta^h\|_{L_1(\Omega)} + NV^h - \big(c_V^h\ln\theta^0, 1\big)_\Omega + (k^h\ln N, 1)_\Omega + T^{1/s'}N.$$

Учитывая оценки $\|\theta^h\|_{L_1(\Omega)} \le K_1$, $V^h \le K_2$ и условие $\|\ln\theta^0\|_{L_1(\Omega)} \le N$, приходим к (4.16) и оценке $\|\ln\theta^h\|_{L_{1,\infty}(Q)} \le K_3$. Остается учесть, что $(D\widehat{\ln\theta^h})^2 \le -(D\widehat{\theta}^h)D(\widehat{1/\theta^h})$ (это следует из числового неравенства $(\ln b - \ln a)^2 \le -(b-a)(1/b - 1/a)$). $\square$

Лемма 4.5. *Справедливы оценки*

$$\|\theta^h\|_{L_\infty(\Omega)} \le X^{-1}\|\theta^h\|_{L_1(\Omega)} + \|D\widehat{\theta}^h\|_{L_1(\Omega^h)} \le K(N)\big[\beta^h\|\eta^h\|_{L_\infty(\Omega)} + 1\big]. \qquad (4.18)$$

Доказательство. Первая из оценок (4.18) элементарна. Учитывая формулу $D\widehat{\theta}^h = -\theta^h_{(+)}\theta^h_{(-)}D(\widehat{1/\theta^h})$ на Q^h и неравенство $\|\theta^h\|_{L_1(\Omega)} \le K_1$, имеем

$$\|D\widehat{\theta}^h\|_{L_1(\Omega^h)} \le \|\eta^h\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\big\|[-\tilde{\rho}^h\theta^h_{(-)}\theta^h_{(+)}(D\widehat{\theta}^h)D(\widehat{1/\theta^h})]^{1/2}\big\|_{L_1(\Omega^h)} \le$$
$$\le \big[\beta^h\|\eta^h\|_{L_\infty(\Omega)}\|\theta^h\|_{L_\infty(\Omega)}\|\theta^h\|_{L_1(\Omega)}\big]^{1/2} \le \frac{1}{2}\|\theta^h\|_{L_\infty(\Omega)} + K_2\beta^h\|\eta^h\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Теперь вторая из оценок (4.18) получается с учетом первой. $\square$

Предложение 4.2. *Справедливы оценки*

$$K(N)^{-1} \le \eta^h \le K(N), \qquad (4.19)$$

$$\|\widehat{\theta}^h\|_{V_1(Q)} \le K(N), \quad \|p^h\|_Q \le K(N). \qquad (4.20)$$

Доказательство. Оценки (4.13) и (4.18) приводят к неравенству

$$\|\eta^h\|_{L_\infty(\Omega)} \le K_1\big[I_t(\beta^h\|\eta^h\|_{L_\infty(\Omega)}) + 1\big].$$

Применяя лемму Гронуолла и пользуясь оценкой (4.16), выводим правое неравенство (4.19); левое неравенство доказано ранее, см. (4.13). Из неравенства (4.18) теперь следует оценка $\|\theta^h\|_{L_{\infty,1}(Q)} \le c\|\widehat{\theta}^h\|_{V_1(Q)} \le K_2$. Остается учесть, что

$$\|p^h\|_Q \le N\|\rho^h\|_{L_\infty(Q)}\|\theta^h\|_Q \le K_3\|\theta^h\|^{1/2}_{L_{1,\infty}(Q)} \cdot \|\theta^h\|^{1/2}_{L_{\infty,1}(Q)} \le K_4. \; \square$$

Предложение 4.3. *Справедлива оценка* $\|\widehat{u}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} \le K(N)$.

Доказательство. Применим к равенству (4.6) оператор I_t и получим

$$\frac{1}{2}\|v^h\|^2_\Omega + (\nu^h\rho^h D\widehat{u}^h - p^h, D\widehat{u}^h)_Q = \frac{1}{2}\|v^{0,h}\|^2_\Omega + I_t\Gamma^h + (g^h - D_t u^h_\Gamma, v^h)_{Q_t}.$$

С учетом оценок (4.19), (4.20), (1.9), (4.7) и формул (4.4) имеем

$$\|D\widehat{u}^h\|^2_Q \le K_1\big[\|p^h\|_Q\|D\widehat{u}^h\|_Q + \|v^{0,h}\|^2_\Omega + (\|D\widehat{u}^h\|_Q + \|p^h\|_Q)\|D\widehat{u}^h_\Gamma\|_Q +$$
$$+ c(\|p_0\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|p_X\|_{L_{4/3}(0,T)})\|\widehat{v}^h\|_{V_2(Q)} +$$
$$+ (\|\overline{g}\|_{L_{2,1}(Q)} + \|D_t u^h_\Gamma\|_{L_{2,1}(Q)})\|v^h\|_{L_{2,\infty}(Q)}\big] \le K_2(\|D\widehat{u}^h\|_Q + 1).$$

Отсюда следует оценка $\|\widehat{u}^h\|_{V_2(Q)} \le K$. Оценка $\|\widehat{u}^h\|^{\langle 0,1/2\rangle}_{2,2} \le K$ доказана в ([18], лемма 3.6) (см. также [12], лемма 3.5). $\square$

Предложение 4.4. *Справедливы оценки* (3.11), (3.12).

Доказательство. Оценка (3.11) следует из оценок (4.17) и (4.19).

Функция θ^h является решением задачи (2.5)–(2.7) с $\alpha = c_V^h$, $\varkappa = \lambda^h\widetilde{\rho}^h$, $\psi = 0$, $f = \sigma^h D\widehat{u}^h + f^h$, $v^0 = \theta^{0,h}$. Заметим, что $N^{-1} \le c_V^h \le N$, $K^{-1} \le \varkappa \le K$ и $\|\theta^{0,h}\|_{L_1(\Omega)} \le N$, $\|\chi_0\|_{L_1(0,T)} + \|\chi_X\|_{L_1(0,T)} \le N$. В силу предложения 4.3 имеем также $\|\sigma^h D\widehat{u}^h + f^h\|_{L_1(Q)} \le \|\sigma^h\|_Q\|D\widehat{u}^h\|_Q + \|\overline{f}\|_{L_1(Q)} \le K$. Поэтому оценки (3.12) следуют из лемм 2.6 и 2.7. $\square$

Для завершения доказательства п.1 теоремы 3.1 учтем, что $D_t\eta^h = D\widehat{u}^h$, $\widehat{x}_e^h = \widehat{x}^{0,h} + I_t\widehat{u}^h$, $D_t\widehat{x}^h = \widehat{u}^h$, $D\widehat{x}_e^h = \eta^h$, $DD_t\widehat{x}_e^h = D\widehat{u}^h$. Поэтому $\|D_t\eta^h\|_Q + \|\widehat{x}_e^h\|_{S_2^{1,1}W(Q)} \le c(\|\widehat{u}^h\|_{V_2(Q)} + \|\eta^0\|_\Omega + \|\eta^h\|_Q) \le K(N)$.

Предложение 4.5. *Если $N^{-1} \le \theta^0$ на Ω, то $K(N)^{-1} \le \theta^h$ в Q.*

Доказательство. Рассмотрим функцию θ^h как решение задачи (2.14), (2.6), (2.7) с $\alpha = c_V^h$, $\varkappa = \lambda^h\widetilde{\rho}^h$, $f = \nu^h\rho^h(D\widehat{u}^h)^2 + f^h \ge 0$, $b = -k^h\rho^h D\widehat{u}^h$, $v^0 = \theta^{0,h}$. Учитывая, что $\|b\|_Q \le K_1$, $N^{-1} \le \theta^{0,h}$, приходим в силу леммы 2.5 к неравенству $K^{-1} \le \theta^h$. Теорема 3.1 полностью доказана. $\square$

5. Сходимость приближенных решений

Выполним предельный переход в задаче $\mathcal{P}_m^h$ ($m = \overline{1,3}$) при $h \to 0$. Пусть $\tau = \tau(h) \to 0$ при $h \to 0$.

В силу теоремы 3.1 существует последовательность $z^h = (\eta^h, u^h, \theta^h, x_e^h)$ решений задачи $\mathcal{P}_m^h$, удовлетворяющая равномерным по h оценкам (3.10)–(3.12). Поэтому существуют вектор-функция $z = (\eta, u, \theta, x_e) \in \mathcal{N}(Q) \times V_2(Q) \times V_1(Q) \times S_2^{1,1}W(Q)$, функции $\sigma \in L_2(Q)$, $\varpi \in L_1(Q)$ и подпоследовательность (за которой сохраним прежнее обозначение z^h) такие, что

$$\eta^h \to \eta \quad * -\text{слабо в} \quad L_\infty(Q), \quad D_t\eta^h \to D_t\eta \quad \text{слабо в} \quad L_2(Q),$$
$$\widehat{u}^h \to u \quad \text{в} \quad L_2(Q) \quad \text{и} \quad * -\text{слабо в} \quad L_\infty(0,T;L_2(\Omega)),$$
$$D\widehat{u}^h \to Du \quad \text{и} \quad \sigma^h \to \sigma \quad \text{слабо в} \quad L_2(Q),$$
$$\widehat{\theta}^h \to \theta \quad \text{в} \quad L_{q_0,r_0}(Q), \quad D\widehat{\theta}^h \to D\theta \quad \text{и} \quad \varpi^h \to \varpi \quad \text{слабо в} \quad L_{q_1,r_1}(Q)$$
$$\text{для всех } q_0, r_0 \text{ и } q_1, r_1, \text{ указанных в теореме 1.1},$$
$$\widehat{x}_e^h \to x_e \quad \text{слабо в} \quad S_2^{1,1}W(Q) \quad \text{и сильно в} \quad C(\overline{Q}).$$

Так как $\|\widehat{\theta}^h - \theta^h\|_{L_{\infty,1}(Q)} \le \|D\widehat{\theta}^h\|_{L_{2,1}(Q)}h^{1/2} \le Kh^{1/2}$, то $\theta^h \to \theta$ в $L_{\infty,1}(Q)$. Поскольку $\theta^h \ge 0$, то и $\theta \ge 0$. Из оценок $\|\theta^h\|_{L_{1,\infty}(Q)} \le K$, $\|\ln\theta^h\|_{L_{1,\infty}(Q)} \le K$ и теоремы Фату следуют оценки $\|\theta\|_{L_{1,\infty}(Q)} \le K$, $\|\ln\theta\|_{L_{1,\infty}(Q)} \le K$. Последняя из них гарантирует свойство $\theta > 0$ п. в. в Q. В силу неравенства $\|D\widehat{\ln\theta^h}\|_{Q^h} \le K$, положив $\widehat{\ln\theta^h}\big|_{x=0} = \ln\theta^h\big|_{x=0}$ и $\widehat{\ln\theta^h}\big|_{x=X} = \ln\theta^h\big|_{x=X}$, можно считать, что $D\widehat{\ln\theta^h} \to D\ln\theta$ слабо в $L_2(Q)$.

Ясно, что вектор-функция z удовлетворяет оценкам (1.13)–(1.15).

Лемма 5.1. *Справедливы свойства $I_t\widehat{\sigma}^h \to I_t\sigma$ в $C(\overline{Q})$, $I_t\sigma^h \to I_t\sigma$ в $C([0,T];L_\infty(\Omega))$.*

Доказательство. Применяя оператор I_t к уравнению (3.2), имеем $DI_t\widehat{\sigma}^h = u_g^h$, откуда $\|DI_t\widehat{\sigma}^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} \le \|u^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} + \|u^{0,h}\|_\Omega + \|\overline{g}\|_{L_{2,1}(Q)} \le K$.

Положим $\widetilde{\sigma}^h = \widehat{\sigma}^h$ на Q^h и $\widetilde{\sigma}^h = \sigma^h$ на $Q \setminus Q^h$. Нетрудно видеть, что

$$\|I_t\widetilde{\sigma}^h\|_{W(Q)} \le c_T\|\sigma^h\|_Q + \|DI_t\widehat{\sigma}^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} \le K_1.$$

В силу этой оценки последовательность $I_t\widetilde{\sigma}^h$ относительно компактна в $C(\overline{Q})$. Осталось заметить, что $I_t\sigma^h \to I_t\sigma$ слабо в $L_2(Q)$ и верна оценка $\|I_t\widetilde{\sigma}^h - I_t\widehat{\sigma}^h\|_{C(\overline{Q})} + \|I_t\sigma^h - I_t\widetilde{\sigma}^h\|_{C([0,T];L_\infty(\Omega))} \le 2\|DI_t\widehat{\sigma}^h\|_{L_{2,\infty}(Q)}h^{1/2}$. $\square$

Обратимся к формуле (4.10). Заметим, что $\eta^{0,h} \to \eta^0$, $1/\nu^h \to 1/\nu$, $k^h/\nu^h \to k/\nu$ в $L_q(\Omega)$ для всех $q \in [1,\infty)$, $\theta^h \to \theta$ в $L_{\infty,1}(Q)$. С учетом этих свойств и леммы 5.1 из (4.10) следует

$$\eta^h \to \eta, \quad \rho^h \to \rho, \quad \widetilde{\rho}^h \to \rho \quad \text{в} \quad C([0,T];L_q(\Omega)) \quad \forall q \in [1,\infty), \tag{5.1}$$

причем верна формула $\eta = a\,\{\eta^0 + I_t\,((1/a)(k/\nu)\theta)\}$, где $a = \exp\,[(1/\nu)I_t\sigma]$.

Убедимся в том, что вектор-функция z является обобщенным решением задачи $\mathcal{P}_m$. Ясно, что уравнения (1.1) и (1.4) удовлетворяются в $L_2(Q)$; кроме того, выполнены начальные условия $\eta|_{t=0} = \eta^0$ и $x_e|_{t=0} = x_e^0$.

Лемма 5.2. *Верны формулы $\sigma = \nu\rho Du - p$, $p = k\rho\theta$ и $\varpi = \lambda\rho D\theta$.*

Доказательство. Для обоснования указанных формул достаточно перейти к слабому пределу в $L_1(Q)$ в равенствах $\sigma^h = \nu^h\rho^h D\widehat{u}^h - p^h$, $p^h = k^h\rho^h\theta^h$ и $\varpi^h = \lambda^h\widetilde{\rho}^h D\widehat{\theta}^h$. При этом следует воспользоваться тем, что $\nu^h \to \nu$, $\lambda^h \to \lambda$, $k^h \to k$ в $L_4(\Omega)$, свойствами (5.1) с $q = 4$, а также тем, что $D\widehat{u}^h \to Du$ слабо в $L_2(Q)$, $\theta^h \to \theta$ в $L_{2,1}(Q)$ и $D\widehat{\theta}^h \to D\widehat{\theta}$ слабо в $L_{2,1}(Q)$. $\square$

Лемма 5.3. *Функция u удовлетворяет тождеству* (1.10) *и краевым условиям* (1.12). *Кроме того, справедливо тождество*

$$-(\frac{1}{2}u^2, D_t\psi)_Q + (\sigma, D(u\psi))_Q = (\frac{1}{2}(u^0)^2, \psi^0)_\Omega + (g[x_e]u, \psi)_Q -$$
$$-(S)\int_0^T (I_t\sigma)|_{x=X}\, d(u_X\psi_X) - (p_X, u|_{x=X}\psi_X)_{(0,T)} +$$
$$+(S)\int_0^T (I_t\sigma)|_{x=0}\, d(u_0\psi_0) + (p_0, u|_{x=0}\psi_0)_{(0,T)} \quad \forall\psi \in \mathring{C}^1(\overline{Q}; S_3^T), \tag{5.2}$$

где интегралы с символом (S) понимаются в смысле Римана-Стилтьеса.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathring{C}^1(\overline{Q}; S_m^T)$ и дополнительно $D_tD\varphi \in L_1(Q)$. Умножим уравнение (3.2) на φ, проинтегрируем по Q и после интегрирования по частям получим равенство

$$-(u^h, D_t\varphi)_Q - (I_t\widehat{\sigma}^h, D_tD\varphi)_Q - (g[\widehat{x}_e^h], \pi^h\varphi)_Q = (u^{0,h}, \varphi^0)_\Omega - (p_X^{(\tau)}, \varphi_X)_{(0,T)} + (p_0^{(\tau)}, \varphi_0)_{(0,T)}.$$

Переходя в нем к пределу при $h \to 0$ и учитывая, что $-(I_t\sigma, D_tD\varphi)_Q = (\sigma, D\varphi)_Q$, выводим тождество (1.10). Требование $D_tD\varphi \in L_1(Q)$ снимается предельным переходом с использованием усреднений φ по t.

Так как $\widehat{u}^h \to u$ в $L_2(Q)$ и $D\widehat{u}^h \to Du$ слабо в $L_2(Q)$, то $\widehat{u}^h|_{x=0} \to u|_{x=0}$ и $\widehat{u}^h|_{x=X} \to u|_{x=X}$ слабо в $L_2(0,T)$. В то же время $\widehat{u}^h|_{x=0} = u_0^{(\tau)} \to u_0$ в $L_2(0,T)$ при $m = 1$ и $\widehat{u}^h|_{x=X} = u_X^{(\tau)} \to u_X$ в $L_2(0,T)$ при $m = 1, 2$. Следовательно, краевые условия (1.12) выполнены.

Функцию u можно рассматривать как обобщенное решение из $V_2(Q)$ линейного параболического уравнения $D_tu = D(\varkappa Du - \widetilde{\psi}) + \widetilde{g}$, где $\varkappa = \nu\rho$, $\widetilde{\psi} = p$, $\widetilde{g} = g[x_e]$, с соответствующими начальными и краевыми условиями. Поэтому тождество (5.2) верно в силу ([19], предложение 2.3). $\square$

Лемма 5.4. *Справедливо тождество*

$$-(\frac{1}{2}u^2 + c_V\theta, D_t\psi)_Q + (\sigma u + \varpi, D\psi)_Q = (\frac{1}{2}(u^0)^2 + c_V\theta^0, \psi^0)_\Omega +$$
$$+(g[x_e]u + f[x_e], \psi)_Q - (S)\int_0^T (I_t\sigma)|_{x=X}\, d(u_X\psi_X) - (p_X, u|_{x=X}\psi_X)_{(0,T)} +$$
$$+(S)\int_0^T (I_t\sigma)|_{x=0}\, d(u_0\psi_0) + (p_0, u|_{x=0}\psi_0)_{(0,T)} -$$
$$-(\mu_0\theta|_{x=0} - \chi_0, \psi_0)_{(0,T)} - (\mu_X\theta|_{x=X} - \chi_X, \psi_X)_{(0,T)} \quad \forall\psi \in \mathring{C}^1(\overline{Q}; S_3^T). \tag{5.3}$$

Доказательство. Пусть $\psi \in \overset{\circ}{C}{}^1(\overline{Q}; S_3^T)$, $\psi^h = \pi^h\psi$, $\psi^{0,h} = \pi^h\psi^0$, $\psi_0^h = \psi^h|_{x=0}$, $\psi_X^h = \psi^h|_{x=X}$. Уравнение (3.2) умножим на $u^h\psi^h$, а уравнение (3.3) — на $\pi_{1/2}^h\psi^h$, проинтегрируем по Q и сложим результаты:

$$\begin{gathered}\left(D_t\left[\frac{1}{2}(u^h)^2\right], \psi^h\right)_Q + \left(c_V^h D_t\theta^h, \pi_{1/2}^h\psi^h\right)_Q + (\sigma^h, D(\widehat{u^h\psi^h}))_Q + \\ +(\varpi^h, D(\widehat{\pi_{1/2}^h\psi^h}))_{Q^h} = (\sigma^h D\widehat{u}^h + f^h, \pi_{1/2}^h\psi^h)_Q + (g^h u^h, \psi^h)_Q + \\ +(\widehat{\sigma}^h|_{x=X}, u^h|_{x=X}\psi_X^h)_{(0,T)} - (\widehat{\sigma}^h|_{x=0}, u^h|_{x=0}\psi_0^h)_{(0,T)} + \\ +(\widehat{\varpi}^h|_{x=X}, (\pi_{1/2}^h\psi^h)|_{x=X})_{(0,T)} - (\widehat{\varpi}^h|_{x=0}, (\pi_{1/2}^h\psi^h)|_{x=0})_{(0,T)}.\end{gathered}$$

Преобразуем это равенство, используя интегрирование по частям по t, учитывая краевые условия (3.6), (3.7_m), тождества (2.3), (2.4) и формулы $D(\widehat{u^h\psi^h}) = (\pi_{1/2}^h\psi^h)D\widehat{u}^h + (\pi_{1/2}^h u^h)D\widehat{\psi}^h$ в Q, $D(\widehat{\pi_{1/2}^h\psi^h}) = \pi^h(D\widehat{\psi}^h)$ в Q^h. В результате получим равенство

$$\begin{gathered}-\left(\frac{1}{2}(u^h)^2 + c_V^h\theta^h, D_t\psi^h\right)_Q + (\sigma^h u^h, D\widehat{\psi}^h)_Q + (\varpi^h, D\widehat{\psi}^h)_{Q^h} = \\ = \left(\frac{1}{2}(u^{0,h})^2 + c_V^h\theta^{0,h}, \psi^{0,h}\right)_\Omega + (g[\widehat{x}_e^h]u^h, \psi^h)_Q + (f[\widehat{x}_e^h], \pi_{1/2}^h\psi^h)_Q - \\ -(S)\int_0^T (I_t\widehat{\sigma}^h)|_{x=X}\, d(u_X^{(\tau)}\psi_X^h) - (p_X^{(\tau)}, u^h|_{x=X}\psi_X^h)_{(0,T)} + \\ +(S)\int_0^T (I_t\widehat{\sigma}^h)|_{x=0}\, d(u_0^{(\tau)}\psi_0^h) + (p_0^{(\tau)}, u^h|_{x=0}\psi_0^h)_{(0,T)} - \\ -(\mu_0\theta^h|_{x=0} - \chi_0, (\pi_{1/2}^h\psi^h)|_{x=0})_{(0,T)} - (\mu_X\theta^h|_{x=X} - \chi_X, (\pi_{1/2}^h\psi^h)_{x=X})_{(0,T)}.\end{gathered}$$

Заметим, что $\psi^h \to \psi$, $\pi_{1/2}^h\psi^h \to \psi$, $D_t\psi^h \to D_t\psi$, $D\widehat{\psi}^h \to D\psi$ в $C([0,T]; L_\infty(\Omega))$; $\psi_a^h \to \psi_a$ в $C^1[0,T]$ и $(\pi_{1/2}^h\psi^h)\big|_{x=a} \to \psi_a$ в $C[0,T]$ для $a = 0, X$. Кроме того, $c_V^h \to c_V$ по мере на Ω и $0 \le c_V^h \le N$, $g[\widehat{x}_e^h] \to g[x_e]$ в $L_{2,1}(Q)$, $f[\widehat{x}_e^h] \to f[x_e]$ в $L_1(Q)$. Воспользуемся также тем, что, во-первых, $u^h \to u$ в $L_2(Q)$ и $*$-слабо в $L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$, $\theta^h \to \theta$ в $L_{\infty,1}(Q)$, $u^{0,h} \to u^0$ в $L_2(\Omega)$, $\theta^{0,h} \to \theta^0$ в $L_1(\Omega)$, $\sigma^h \to \sigma$ слабо в $L_2(Q)$, $\varpi^h \to \varpi$ слабо в $L_1(Q)$. Во-вторых, для $a = 0, X$ имеем $(I_t\widehat{\sigma}^h)|_{x=a} \to (I_t\sigma)|_{x=a}$ в $C[0,T]$, $u_a^{(\tau)}(t) \to u_a(t+0)$ для всех $t \in [0,T]$, $\operatorname*{var}_{[0,T]} u_a^{(\tau)} \le \operatorname*{var}_{[0,T]} u_a$, $\theta^h\big|_{x=a} \to \theta\big|_{x=a}$ в $L_r(0,T)$ при всех $r \in [1,2)$. Переходя в полученном равенстве к пределу при $h \to 0$ с использованием перечисленных свойств, приходим к тождеству (5.3). При предельном переходе под знаком интеграла Стилтьеса использована теорема Хелли ([20], гл. IX, § 7). □

Следствие 5.1. Справедливо тождество (1.11).

Для доказательства нужно из тождества (5.3) вычесть тождество (5.2).

Из предложения 4.5 легко следует

Лемма 5.5. *Если $N^{-1} \le \theta^0$ на Ω, то $K(N)^{-1} \le \theta$ в Q.*

Тем самым теорема 1.1 доказана.

Литература

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1978. – 687 с.
2. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.* – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
3. Amosov A.A., Zlotnik A.A. *A study of a finite-difference method for the one-dimensional viscous heat-conductive gas flow equations. Part* 1: *A priori estimates and stability* // Sov. J. Numer. Anal. and Math. Model. – 1987. – V. 2. – № 3. – P. 159–178.

4. Amosov A.A., Zlotnik A.A. *A study of a finite-difference method for the one-dimensional viscous heat-conductive gas flow equations. Part* 2: *Error estimates and realization* // Sov. J. Numer. Anal. and Math. Model. – 1987. – V. 2. – № 4. – P. 239–258.
5. Амосов А.А., Злотник А.А. *Разностная схема на неравномерной сетке для уравнений одномерной магнитной газовой динамики* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29. – № 4. – С. 521–534.
6. Amosov A.A., Zlotnik A.A. *Two-level finite-difference schemes for one-dimensional equations of magnetic gas dynamics (viscous heat-conducting case)* // Sov. J. Numer. Anal. and Math. Model. – 1989. – V. 4. – № 3. – P. 179–197.
7. Шелухин В.В. *Движение с контактным разрывом в вязком теплопроводном газе* // Динам. сплош. среды. – Новосибирск, 1982. – № 57. – С. 131–152.
8. Serre D. *Sur l'équation monodimensionelle d'un fluide visqueux, compressible et conducteur de chaler* // C. r. Acad. sci. – 1986. – V. 303. – Sér. I. – № 14. – P. 703–706.
9. Амосов А.А., Злотник А.А. *Обобщенные решения "в целом" уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного газа* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 301. – № 1. – С. 11–15.
10. Амосов А.А., Злотник А.А. *Разрешимость "в целом" системы уравнений одномерного движения неоднородного вязкого теплопроводного газа* // Матем. заметки. – 1992. – Т. 52. – № 2. – С. 3–16.
11. Hoff D. *Global well-posedness of the Cauchy problem for nonisentropic gas dynamics with discontinuous initial data* // J. Different. Equat. – 1992. – V. 95. – P. 33–74.
12. Амосов А.А., Злотник А.А. *Разрешимость "в целом" одного класса квазилинейных систем уравнений составного типа с негладкими данными* // Дифференц. уравн. – 1994. – Т. 30. – № 4. – С. 596–608.
13. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1975. – 480 с.
14. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* – М.: Наука, 1967. – 736 с.
15. Амосов А.А., Злотник А.А. *О квазиосредненных уравнениях одномерного движения вязкой баротропной среды с быстро осциллирующими данными* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1996. – Т. 36. – № 2. – С. 87–110.
16. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
17. Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* – М.: Наука, 1985. – 224 с.
18. Амосов А.А., Злотник А.А. *Разрешимость "в целом" квазиосредненных уравнений одномерного движения вязкой баротропной среды с негладкими данными* // Вестн. МЭИ. – 1994. – № 4. – С. 7–24.
19. Амосов А.А., Злотник А.А. *Замечания о свойствах обобщенных решений из* $V_2(Q)$ *одномерных линейных параболических задач* // Вестн. МЭИ. – 1996. – № 6. – С. 15–29.
20. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* – М.: Наука, 1974. – 480 с.

Московский энергетический институт
(*технический университет*)

Поступила
07.10.1996