И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2004 МАТЕМАТИКА № 10 (509)

УДК 515.124

Е.Н. СОСОВ

О МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВСЕХ 2-СЕТЕЙ ПРОСТРАНСТВА НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

В статье исследуются свойства, связанные в основном со свойством метрической выпуклости пространства всех 2-сетей с индуцированной метрикой Хаусдорфа пространства, удовлетворяющего глобальному условию неположительности кривизны в смысле Буземана.

1. Определения и теоремы

Введем следующие обозначения:

R — множество всех вещественных чисел;

$B[X]$ — множество всех непустых ограниченных замкнутых множеств метрического пространства (X,ρ);

$D[M,W]=\sup\{\rho[x,y]: x\in M,\ y\in W\}$, $D[M]=D[M,M]$ для всех M, $W\in B[X]$;

$\rho[x,W]=\inf\limits_{y\in W}\rho[x,y]$;

$B_\rho(x,r)$ — открытый шар с центром в точке $x\in(X,\rho)$ радиуса $r>0$;

$\alpha: B[X]\times B[X]\to R$, $\alpha[M,W]=\max\{\beta[M,W];\beta[W,M]\}$ — метрика Хаусдорфа на множестве $B[X]$, где $\beta[M,W]=\sup\limits_{x\in M}\rho[x,W]$ ([1], с. 223);

$(\Sigma_2(X),\alpha)$ — метрическое пространство относительно метрики Хаусдорфа непустых 2-сетей, состоящих из не более чем двух точек пространства X;

$\Delta=\{\{x,y\}\in\Sigma_2(X): x=y\}$, $Z[S]=\{S_1\in\Sigma_2(X):\alpha[S,S_1]=D[S,S_1]\}$, где $S\in\Sigma_2(X)$.

Для $S=\{x,y\}\in\Sigma_2(X)$ положим $S[x]=x$ при $x=y$ и $S[x]=y$ при $x\neq y$. Метрическое пространство X называется метрически выпуклым, если для всех $x,y\in X$ $\omega[x,y]=\{z\in X: 2\max[\rho[x,z],\rho[z,y]]\le\rho[x,y]\}\neq\emptyset$. (Это частный случай выпуклости метрического пространства по Менгеру ([2], с. 43). Если метрически выпуклое пространство X полное, то оно называется геодезическим пространством [3].)

Лемма 1 дает возможность упростить рассуждения о свойствах пространства $(\Sigma_2(X),\alpha)$.

Лемма 1. (i) *Для всех* $x,y,u,v\in X$ $\alpha[\{x,y\},\{u,v\}]=\min\{\max[\rho[x,u],\rho[y,v]];\max[\rho[x,v],\rho[y,u]]\}$.

(ii) *Пространство* $(\Sigma_2(X),\alpha)$ *метрически выпукло тогда и только тогда, когда пространство* (X,ρ) *метрически выпуклое* (ср. [4], Corollary 1).

В дальнейшем на метрическое пространство X будем налагать

Условие 1. Для любых $p,x,y\in X$ множество $\omega[p,x]$ одноточечное и выполняется неравенство
$$2\rho[\omega[p,x],\omega[p,y]]\le\rho[x,y].$$

В G-пространстве Буземана условие 1 является глобальным условием неположительности кривизны этого пространства ([2], с. 304). Отметим также, что в хордовом пространстве условие 1 совпадет с условием глобальной неположительности кривизны, если определить $\omega[p,x]$ как середину единственной хорды с концами в точках p, x ([5], с. 63).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00308.

Кроме того, иногда на метрическое пространство X будем налагать также

Условие 2. Для любых различных точек $x, y \in X$ найдется такая единственная точка $z \in X$, что $y = \omega[x, z]$.

Лемма 2. *Пусть метрическое пространство X удовлетворяет условию 1. Тогда отображение $\pi : (\Sigma_2(X), \alpha) \to (X, \rho)$, $\pi[\{x, y\}] = \omega[x, y]$ обладает следующими свойствами:*

(i) *для любых $S, S_1 \in \Sigma_2(X)$ $\rho[\pi[S], \pi[S_1]] \leq \alpha[S, S_1] \leq \rho[\pi[S], \pi[S_1]] + (D[S] + D[S_1])/2$;*

(ii) *для любых $x, y \in X$ $\inf\{\alpha[S, S_1] : S \in \pi^{-1}[x], S_1 \in \pi^{-1}[y]\} = \rho[x, y]$.*

Пусть пространство X удовлетворяет условию 1 и $S, S_1 \in \Sigma_2(X)$. Введем множество $\Omega[S, S_1] = \{\{\omega[x, S_1[u]], \omega[S[x], u]\} \in \Sigma_2(X) : x \in S,\ u \in S_1,\ \rho[x, u] = D[S, S_1]\}$.

Теорема. *Для метрического пространства X, удовлетворяющего условию 1, верны следующие свойства:*

(i) *если $S_1 \notin Z[S] \setminus \Delta$, то существует единственная 2-сеть $\Omega[S, S_1] \in \Sigma_2(X)$;*

(ii) *$S \in \Sigma_2(X) \setminus \Delta$, $S_1 \in Z[S] \setminus \Delta$ тогда и только тогда, когда множество $\Omega[S, S_1] \subset \Sigma_2(X)$ состоит из двух различных 2-сетей;*

(iii) *если пространство X удовлетворяет и условию 2, то для каждого $x \in \Delta$ и для каждого $S \in \Sigma_2(X) \setminus \{x\}$ существует единственная 2-сеть $S_1 \in \Sigma_2(X)$ такая, что $S = \Omega[x, S_1]$;*

(iv) *если пространство X удовлетворяет также условию 2, то для каждых $S \in \Sigma_2(X) \setminus \Delta$ и $S_1 \in Z[S]$ не существует 2-сети $S_2 \in \Sigma_2(X) \setminus S_1$ такой, что $S_1 \in \Omega[S, S_2]$.*

Следствие. Пусть метрическое пространство X удовлетворяет условию 1. Тогда верны следующие свойства:

(i) для каждого $S \in \Sigma_2(X)$ найдется такое $r = r[S] > 0$, что для каждого $S_1 \in B_\alpha(S, r[S])$ существует единственная 2-сеть $\Omega[S, S_1] \in B_\alpha(S, r[S])$;

(ii) для каждого $S \in \Sigma_2(X) \setminus \Delta$ найдется такое $t = t[S] > 0$, что для всех $S_1, S_2 \in B_\alpha(S, t[S])$ существует единственная 2-сеть $\Omega[S_1, S_2] \in B_\alpha(S, t[S])$.

Примеры.

1. Пусть полуплоскость $P = \{(x; y) \in R^2 : x \geq y\}$ наделена метрикой $d : P \times P \to R$, $d[(x; y), (u; v)] = \max[|x - u|, |y - v|]$. Тогда отображение $f : (P, d) \to (\Sigma_2(R), \alpha)$, $f[(x; y)] = \{x, y\}$ является изометрией, поскольку для всех $(x; y), (u; v) \in P$

$$\min[\max[|x - u|, |y - v|], \max[|x - v|, |y - u|]] = \max[|x - u|, |y - v|].$$

При этом $f^{-1}[\Omega[S, S_1]]$ изображается серединой отрезка $[f^{-1}[S], f^{-1}[S_1]]$, где S, $S_1 \in \Sigma_2(R)$.

2. Пусть $S \in \pi^{-1}[x]$. Тогда для евклидова пространства (X, ρ)

$$\alpha[S, \pi^{-1}[y]] = \rho[x, y] \quad \text{для всех} \quad x, y \in X.$$

3. Пусть в открытом шаре $B(0, 1)$ вещественного гильбертового пространства задана метрика

$$\rho[x, y] = \mathrm{Arch}\left[\frac{1 - (x, y)}{((1 - x^2)(1 - y^2))^{1/2}}\right],$$

где (x, y) — скалярное произведение векторов x, y из $B(0, 1)$. Таким образом, получили бесконечномерный вариант известной интерпретации Бельтрами–Клейна геометрии Лобачевского ([6], с. 48). В пространстве $(B(0, 1), \rho)$ рассмотрим такие невырожденные перпендикулярные отрезки $[x, y]$, $[a, b]$, что $x = \omega[a, b]$. Тогда, используя соображения симметрии и тригонометрию плоскости Лобачевского, нетрудно получить равенство

$$\mathrm{sh}[\alpha[\{a, b\}, \pi^{-1}[y]]] = \mathrm{ch}[\rho[a, b]/2]\,\mathrm{sh}[\rho[x, y]].$$

Следовательно, в этом случае $\alpha[\{a, b\}, \pi^{-1}[y]] > \rho[x, y]$.

2. Доказательства полученных результатов

Доказательство леммы 1.

(i) Пусть для определенности $\rho[x,u] = D[S,S_1]$, $S = \{x,y\}$, $S_1 = \{u,v\}$. Тогда $\alpha[\{x,y\},\{u,v\}] = \max\{\max[\rho[x,v],\rho[y,S_1]];\max[\rho[y,u],\rho[v,S]]\}$. Рассмотрим два случая.

1. Если $\rho[y,u]>\rho[y,v]$, то $\alpha[\{x,y\},\{u,v\}]= \max\{\max[\rho[x,v],\rho[y,v]];\rho[y,u]\}= \max[\rho[x,v],\rho[y,u]] = \min\{\max[\rho[x,u],\rho[y,v]];\max[\rho[x,v],\rho[y,u]]\}$.

2. Если $\rho[y,u] \leq \rho[y,v]$, то $\alpha[\{x,y\},\{u,v\}] = \max\{\max[\rho[x,v],\rho[y,u]];\max[\rho[y,u],\rho[v,S]]\} = \max[\rho[x,v],\rho[y,u]] = \min\{\max[\rho[x,u],\rho[y,v]];\max[\rho[x,v],\rho[y,u]]\}$.

(ii) Доказательство необходимости очевидно.

Достаточность. Пусть пространство X метрически выпуклое и для определенности $\rho[x,u] = D[S,S_1]$, $S = \{x,y\}$, $S_1 = \{u,v\}$. Выберем $a \in \omega[x,v]$, $b \in \omega[y,u]$, $S^* = \{a,b\}$. Тогда $\alpha[S,S^*] = \alpha[S^*,S_1] = \alpha[S,S_1]/2$ и пространство $(\Sigma_2(X),\alpha)$ метрически выпуклое. $\square$

Доказательство леммы 2.

(i) Пусть $\rho[x,u] = D[S,S_1]$, $S = \{x,y\}$, $S_1 = \{u,v\}$. Тогда в силу условия 1 и утверждения (i) леммы 1 получим $\rho[\pi[S],\pi[S_1]] = \rho[\omega[x,y],\omega[u,v]] \leq \rho[\omega[x,y],\omega[y,v]]+\rho[\omega[y,v],\omega[u,v]] \leq \rho[x,v]/2+\rho[y,u]/2 \leq \max[\rho[x,v],\rho[y,u]] = \min\{\max[\rho[x,u],\rho[y,v]];\max[\rho[x,v],\rho[y,u]]\} = \alpha[S,S_1]$.

С другой стороны, $\alpha[S,S_1] = \min\{\max[\rho[x,u],\rho[y,v]];\max[\rho[x,v],\rho[y,u]]\} = \max[\rho[x,v],\rho[y,u]] \leq \max\{\rho[x,\pi[\{x,y\}]] + \rho[\pi[\{x,y\}],\pi[\{u,v\}]] + \rho[\pi[\{u,v\}],v];\rho[u,\pi[\{u,v\}]] + \rho[\pi[\{u,v\}],\pi[\{x,y\}]] + \rho[\pi[\{x,y\}],y]\} = \rho[\pi[S],\pi[S_1]] + (D[S] + D[S_1])/2$. Доказательство (ii) сразу следует из (i). $\square$

Доказательство теоремы.

(i) Пусть $\rho[x,u] = D[S,S_1] > \alpha[S,S_1]$, $S = \{x,y\}$, $S_1 = \{u,v\}$. Тогда в силу утверждения (i) леммы 1 $\alpha[\{x,y\},\{u,v\}] = \max[\rho[x,v],\rho[y,u]]$. Следовательно, $\Omega[S,S_1] = \{\omega[x,v],\omega[y,u]\}$.

(ii) Пусть $\rho[x,u] = \alpha[S,S_1] = D[S,S_1]$, $S = \{x,y\}$, $S_1 = \{u,v\}$. Тогда в силу утверждения (i) леммы 1 $\alpha[\{x,y\},\{u,v\}] = \max[\rho[x,v],\rho[y,u]]$. Следовательно, $\Omega[S,S_1] = \{\{\omega[x,v],\omega[y,u]\}, \{\omega[x,u],\omega[y,v]\}\}$.

(iii) Пусть $S = \{u,v\}$. В силу условий 1, 2 найдутся единственные точки $z \in X$ и $w \in X$ такие, что $u = \omega[x,z]$, $v = \omega[x,w]$. Следовательно, $S = \Omega[x,S_1]$, где $S_1 = \{z,w\}$.

(iv) Предположим противное. Тогда найдется 2-сеть $S_2 \in \Sigma_2(X)\backslash S_1$ такая, что $S_1 \in \Omega[S,S_2]$. Пусть для определенности $\rho[x,u] = \rho[x,v] = \alpha[S,S_1] = D[S,S_1]$, $S = \{x,y\}$, $S_1 = \{u,v\}$, $S_2 = \{a,b\}$. Тогда возможны два случая.

Случай 1. $\rho[x,a] = \rho[x,b] = \alpha[S,S_2] = D[S,S_2]$. Следовательно, $\rho[x,a] = \rho[x,u] + \alpha[S_1,S_2]$. Пусть $\rho[u,a] = \alpha[S_1,S_2]$ (оставшиеся случаи сводятся к данному изменением обозначений). Тогда $\rho[x,a] = \rho[x,u] + \rho[u,a]$. Здесь возможны два варианта.

1a. Если $\rho[v,a] \leq \alpha[S_1,S_2]$, то $u = v$. Но тогда $\rho[v,b] \leq \alpha[S_1,S_2]$ и $a = b$. Получили противоречие с условием 2.

1b. Если $\rho[v,b] \leq \alpha[S_1,S_2]$, то $\rho[v,b] = \alpha[S_1,S_2]$. Но тогда или $v = \omega[y,b]$, или $u = \omega[y,a]$. В обоих выводах $x = y$. Получили противоречие.

Случай 2. $\rho[y,a] = \rho[y,b] = \alpha[S,S_2] = D[S,S_2]$. Следовательно, $\rho[y,a] = \rho[x,u] + \alpha[S_1,S_2]$. Пусть $\rho[u,a] = \alpha[S_1,S_2]$. Тогда $\rho[y,a] = \rho[x,u] + \rho[u,a]$. Здесь возможны два варианта.

2a. Если $\rho[v,a] \leq \alpha[S_1,S_2]$, то $u = v$. Но тогда $\rho[v,b] \leq \alpha[S_1,S_2]$ и $a = b$. Получили противоречие с условием 2.

2b. Если $\rho[v,b] \leq \alpha[S_1,S_2]$, то $\rho[v,b] = \alpha[S_1,S_2]$. Но тогда или $v = \omega[x,b]$, или $u = \omega[x,a]$. В обоих выводах $x = y$. Получили противоречие. $\square$

Доказательство следствия.

(i) Нетрудно заметить, что для каждого $S \in \Sigma_2(X)$ $\alpha[S,Z[S]] \leq \alpha[S,\pi[S]]$. Пусть $S_1 \in Z[S]$, $S = \{x,y\}$. Тогда из условия 1 следует $\alpha[S,\pi[S_1]] \leq \alpha[S,S_1]$. В силу произвольности выбора $S_1 \in Z[S]$ $\alpha[S,Z[S]] \geq \alpha[S,\pi[S]]$. Таким образом, $\alpha[S,Z[S]] = \alpha[S,\pi[S]] = D[S]/2$. Для завершения доказательства осталось использовать свойство (i) из теоремы и положить

$$r[S] = D[S]/2 \ \text{ при } \ S \in \Sigma_2(X)\backslash\Delta; \quad r[S] = \infty \ \text{ при } \ S \in \Delta.$$

(ii) Положим $t[S] = D[S]/4$. Тогда $\alpha[S_1, S_2] < D[S]/2 < D[S_1, S_2]$ и осталось использовать свойство (i) теоремы. □

Литература

1. Куратовский К. *Топология.* – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
2. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.
3. Ефремович В.А. *Неэквиморфность пространств Евклида и Лобачевского* // УМН. – 1949. – Т. 4. – Вып. 2. – С. 178–179.
4. Sosov E.N. *On Hausdorff intrinsic metric* // Lobachevskii J. of Math. – 2001. – V. 8. – P. 185–189.
5. Busemann H., Phadke B.B. *Spaces with distinguished geodesics.* – New York–Basel: Marsel Dekker Inc., 1987. – 159 p.
6. Нут Ю.Ю. *Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении.* – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 310 с.

Казанский государственный университет

Поступила 09.07.2002