ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 2 (429)

УДК 510.57

А.А. ЕФРЕМОВ

ИЗОЛИРОВАННЫЕ СВЕРХУ d-Р.П. СТЕПЕНИ, I

1. Введение

Множество $A \subseteq \omega$ называется *d–рекурсивно перечислимым* (d-р.п.), если существуют рекурсивно перечислимые (р.п.) множества A_1 и A_2 такие, что $A = A_1 - A_2$. Тьюрингова степень называется d-р.п. степенью, если она содержит d-р.п. множество; d-р.п. степень называется *собственно* d-р.п. , если она не является р.п. степенью (не содержит р.п. множеств).

В данной статье изучается взаимодействие р.п. и d-р.п. степеней. С.Б. Купер и К. Йи [3] ввели определение *изолированой* d-р.п. степени следующим образом: d-р.п. степень $\mathbf{d}$ называется изолированной, если существует р.п. степень $\mathbf{a} < \mathbf{d}$ такая, что между ними нет р.п. степеней. Естественным образом можно расширить определение изолированных d-р.п. степеней, например, изучать не нижний конус р.п. степеней под d-р.п. степенью, а верхний конус р.п. степеней над d-р.п. степенью. Тогда изолированную степень в терминах предыдущего определения можно назвать *изолированной снизу* (ИСН) и по аналогии ввести новое

Определение. d-р.п. степень $\mathbf{d}$ называется *изолированной сверху* (*ИСВ*), если существует р.п. степень $\mathbf{b} > \mathbf{d}$ такая, что между $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$ нет р.п. степеней. В противном случае она называется неизолированной сверху. Будем говорить, что степени $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$ образуют *изолированную сверху пару*, и обозначать $\langle \mathbf{d}, \mathbf{b} \rangle$.

В 1984 г. Л. Хэй и Р. Шор (неопубликовано) прямой конструкцией построили d-р.п. степень $\mathbf{d}$ такую, что между $\mathbf{d}$ и $\mathbf{0}'$ нет р.п. степеней, т.е. фактически доказали существование изолированной сверху пары $\langle \mathbf{d}, \mathbf{0}' \rangle$. После того, как С.Б. Купер, С. Лемпп и П. Вотсон [2] доказали, что d-р.п. степени плотны в структуре р.п. степеней, естественно ставить вопрос о плотности в р.п. степенях любого класса d-р.п. степеней с определенными свойствами. Отметим, что вопросы о плотности ИСН d-р.п. степеней и неизолированных снизу d-р.п. степеней, поставленные в [3], решены положительно в [4] и [1] соответственно. Относительно ИСВ d-р.п. степеней в этом направлении мы показываем, что их "достаточно много". А именно, в теореме 1 утверждается, что над любой неполной р.п. степенью в том же самом классе скачков существует ИСВ пара. Более того, оказалось, что свойство плотности для ИСВ d-р.п. степеней в р.п. степенях не выполняется, т.к. существует нерекурсивная р.п. степень, под которой все d-р.п. степени являются неизолированными сверху. Доказательству этого утверждения будет посвящена вторая часть статьи. Необходимо отметить, что ИСВ пара в теореме 1 строится в виде $\langle \mathrm{dg}\,(D_1 - D_2), \mathrm{dg}\,(D_1 \oplus D_2) \rangle$, и доказывается утверждение, с помощью которого *все* ИСВ пары можно представить в таком виде.

2. Обозначения и терминология

Обозначения стандартны и в основном мы следуем [6]. Рассматриваются множества и функции на натуральных числах $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Обычно греческими буквами Φ, $\Psi, \dots, \varphi$, $\psi, \dots$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проектов 93-011-16004, 96-01-00830), Международного научного фонда Сороса (грант NNL000) и гранта Новосибирского университета.

будут обозначаться частично рекурсивные (ч.р.) функции; f, g, $h, \dots$ — общерекурсивные (о.р.) функции; прописными латинскими буквами A, B, $C, \dots$ — подмножества ω. Для ч.р. функции Φ символ $\Phi(x)\downarrow$ означает, что $x \in \operatorname{dom}\Phi$; в противном случае пишется $\Phi(x)\uparrow$. Множество A отождествляется с его характеристической функцией χ_A. Запись $f \upharpoonright x$ означает ограничение f на аргументы, меньшие чем x; аналогично для множеств; $A \subset B$ означает, что $A \subseteq B$, но $A \neq B$; $A \oplus B = \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x+1 \mid x \in B\}$; Φ_e, W_e (Φ_e^X, W_e^X) означает e-ю ч.р. функцию и ее область определения (с оракулом X) в некоторой фиксированной стандартной нумерации; наибольшее число, используемое в вычислении функционалов Φ^X, $\Psi^X, \dots$ в точке x, будет обозначаться соответствующей строчной греческой буквой $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Таким образом, изменение $X \upharpoonright (\gamma(x)+1)$ будет позволять изменять значение $\Gamma^X(x)$. Запись $\leqslant_{\mathrm{T}}$ означает Тьюрингову сводимость, а $\equiv_{\mathrm{T}}$ — отношение эквивалентности, индуцируемое ею.

Когда речь идет о деревьях, α, β, $\gamma, \dots$ будут означать вершины дерева, $|\alpha|$ — длину α, $\alpha\hat{\ }\beta$ — конкатенацию α и β; $\alpha \subseteq \beta$ ($\alpha \subset \beta$) означает, что α является (собственным) начальным сегментом β; $\alpha <_{\mathrm{L}} \beta$ означает, что для некоторого n $\alpha \upharpoonright n = \beta \upharpoonright n$ и $\alpha(n) <_\Lambda \beta(n)$ (где $<_\Lambda$ — соответствующий порядок на дереве, возможно различный на разных уровнях и $T \subseteq \Lambda^{<\omega}$); $\alpha \leqslant \beta$ ($\alpha < \beta$) означает, что $\alpha <_{\mathrm{L}} \beta$ или $\alpha \subseteq \beta$ ($\alpha \subset \beta$). Множество $[T]$ бесконечных путей через дерево $T \subseteq \Lambda^{<\omega}$ определяется как $\{h \in \Lambda^\omega \mid (\forall n)[h \upharpoonright n \in T]\}$.

Теорема будет доказываться методом приоритета с бесконечными нарушениями с использованием дерева стратегий. План доказательства таков: 1) выписывается бесконечный список требований, которые нужно удовлетворить (выполнить); 2) для каждого вида требований приводится стратегия, которую называем *основным модулем* для удовлетворения требований данного вида; 3) рассматриваются возможные *выходы* (результаты работы) основных модулей для всех видов требований; 4) определяется дерево стратегий и каждой вершине дерева назначается некоторое требование; 5) описывается основная конструкция, которая определяет, как работают и взаимодействуют стратегии на дереве; 6) доказываются леммы, показывающие, что построенные в процессе конструкции объекты удовлетворяют условиям теоремы. Более подробно метод приоритета, использующий деревья, изложен в ([6], гл. 14; [2] для d-р.п. степеней).

При описании стратегий используем следующую терминологию: при выборе представителя цикла слова “достаточно большое число” означают первое число, большее всех упоминаемых в конструкции к данному моменту; *начинаем* цикл, позволяя ему выполнить (1) и перейти в (2); *останавливаем* цикл, прекращая его работу, определяя его запрет равным нулю и заставляя перейти в (1); *разрушаем* цикл, останавливая его и считая, что его часть функционала становится неопределенной; *инициализируем* стратегию, разрушая все ее циклы и начиная цикл 0; цикл *работает*, переходя из некоторого (кроме (1)) состояния в другое; стратегия *работает*, позволяя циклу с наименьшим номером, который может это сделать, работать (в противном случае ничего не делает).

В процессе наших конструкций будем строить р.п., d-р.п. множества и ч.р. функционалы по шагам. Для обозначения полученного результата к концу шага s для строящихся и данных объектов будем использовать запись типа $A[s]$, $\Phi_e[s]$, $A = \Phi_e[s]$, но, когда это не ведет к двусмысленности, параметр $[s]$ будем опускать. При необходимости подчеркнуть, что объекты рассматриваются как результат различных шагов, будем использовать запись типа A_s, $\varphi_{e,t}$. Параметры, получившие некоторое значение в ходе конструкции, остаются с этим значением, пока не будут переопределены.

3. Основной результат

Теорема 1. *Над любой р.п. степенью* $\mathbf{a} < \mathbf{0}'$ *существует изолированная сверху пара* $\langle \mathbf{d}, \mathbf{b} \rangle$ (*т.е.* $\mathbf{a} < \mathbf{d} < \mathbf{b}$) *такая, что* $\mathbf{a}' = \mathbf{b}'$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathbf{a}$ — данное р.п. множество. Будем строить р.п. множества $D_1, D_2 \subseteq D_1$ такие, что $\deg((D_1 - D_2) \oplus A)$ и $\deg((D_1 \oplus D_2) \oplus A)$ будут образовывать искомую пару. Для этого достаточно удовлетворить для всех e следующим требованиям:

$\mathcal{P}_e:\ (D_1 \oplus D_2) \neq \Phi_e^{((D_1 - D_2)\oplus A)}$,
где $\{\Phi_e\}_{e\in\omega}$ — перечисление ч.р. функционалов;

$\mathcal{R}_e:\ (D_1 - D_2) = \Phi_e^{W_e} \Longrightarrow (\exists \Delta_e)((D_1 \oplus D_2) = \Delta_e^{W_e})$,
где $\{\Phi_e, W_e\}_{e\in\omega}$ — перечисление пар, состоящих из ч.р. функционала Φ_e и р.п. множества W_e;

$\mathcal{N}:\ ((D_1 \oplus D_2) \oplus A)' \leqslant_{\mathrm{T}} A'$.

Необходимо отметить, что $((D_1 - D_2) \oplus A) \restriction x$ и $((D_1 \oplus D_2) \oplus A) \restriction x$ в оракуле рассматривается как $((D_1 - D_2) \restriction x) \oplus (A \restriction x)$ и $((D_1 \oplus D_2) \restriction x) \oplus (A \restriction x)$ соответственно.

Рассмотрим основные модули для удовлетворения этих требований.

Основной модуль для $\mathcal{P}_e$: $(D_1 \oplus D_2) \neq \Phi_e^{((D_1 - D_2)\oplus A)}$

Стратегия работает по циклам, каждый из которых действует следующим образом.

Цикл k

(1) Выбираем представителя цикла x_k достаточно большим.
(2) Ждем шага $s_1 : \Phi_e^{((D_1 - D_2)\oplus A)}(2x_k) \downarrow = \Phi_e^{((D_1 - D_2)\oplus A)}(2x_k+1) \downarrow = 0[s_1]$.
(3) Определяем функционал $\Gamma_e^A(k)[s_1+1] = K(k)[s_1]$ с $\gamma_e(k)[s_1+1] = \varphi_e(2x_k+1)[s_1]$, где K — креативное множество. Определяем запрет $r(k)[s_1+1] = \varphi_e(2x_k+1)[s_1]$. Начинаем $(k+1)$-й цикл. Одновременно продолжаем работу нашего цикла, переходя в (4).
(4) Ждем изменения $A \restriction \gamma_e(k)$ или $K(k)$.
 (а) Изменение $A \restriction \gamma_e(k)$ произошло раньше. Тогда разрушаем циклы с номерами $k' > k$, полагаем запрет $r(k) = 0$, $\Gamma_e^A(k)$ считаем неопределенным (из-за изменения $A \restriction \gamma_e(k)$) и идем в (2).
 (б) Изменение $K(k)$ произошло раньше. Тогда останавливаем циклы с номерами $k' > k$, запрет $r(k) = \varphi_e(2x_k+1)$ сохраняется, идем в (5).
(5) Перечисляем x_k в D_1 и в D_2 (тем самым $(D_1 - D_2)(x_k)$ не изменилось, а $(D_1 \oplus D_2)$ в точках $2x_k$ и $2x_k+1$ стало равным 1).
(6) Ждем шага t, на котором произойдет изменение $A \restriction \gamma_e(k)$.
(7) Разрушаем циклы с номерами $k' > k$, переопределяем функционал $\Gamma_e^A(k)[t+1] = K(k)[t]$ с $\gamma_e(k)[t+1] = \varphi_e(2x_k+1)+1$, полагаем $r(k)[t+1] = 0$, начинаем $(k+1)$-й цикл и идем в (8).
(8) Конец работы.

Выходы $\mathcal{P}_e$-стратегии

1) Существует шаг s_0, после которого ни один цикл не работает. Тогда некоторый цикл k_0 остается навсегда в (2) или в (6). Требование удовлетворено. Общий запрет всех циклов имеет конечный предел. Обозначим этот выход через f (конечный).
2) Работает бесконечное число циклов, но существует цикл с наименьшим номером k_0, который бесконечно много раз переходит из (4) (через (а)) в (2). Требование удовлетворено, т.к. функционал $\Phi_e^{((D_1 - D_2)\oplus A)}$ в точке $2x_{k_0}+1$ расходится. Общий запрет всех циклов $R(e)$ может быть бесконечным в пределе, но существует конечный $\liminf\limits_s R(e)$. Номер цикла k_0 и будет обозначать этот выход.
3) Работает бесконечное число циклов, но каждый работает конечное число раз, останавливаясь в (4) или в (8). Требование не выполнено и построен всюду определенный функционал Γ_e^A, который правильно вычисляет креативное множество K в каждой точке. Так как $A <_{\mathrm{T}} K$ по условию теоремы, то этот выход невозможен в нашей конструкции, и его учитывать не будем.

Основной модуль для $\mathcal{R}_e$: $(D_1 - D_2) = \Phi_e^{W_e} \Longrightarrow (\exists \Delta_e)((D_1 \oplus D_2) = \Delta_e^{W_e})$

Стратегия работает по циклам, каждый из которых действует следующим образом.

Цикл k

(1) Выбираем представителя цикла x_k достаточно большим.
(2) Ждем шага $s : (D_1 - D_2) \upharpoonright (x_k+1) = \Phi_e^{W_e} \upharpoonright (x_k+1)[s]$.
(3) (Пере)определяем функционал $\Delta_e^{W_e}(k)[s+1] = (D_1 \oplus D_2)(c)[s]$ с $\delta_e(k)[s+1] = \varphi_e(x_k)[s]$. Начинаем $(k+1)$-й цикл. Одновременно продолжаем работу нашего цикла, переходя в (4).
(4) Ждем изменения $W_e \upharpoonright \delta_e(k)$ или $(D_1 \oplus D_2)(k)$.
   (а) Изменение $W_e \upharpoonright \delta_e(k)$ произошло раньше. Тогда разрушаем циклы с номерами $k' > k$, перечисляем $x_{k'}$ в D_2, если $x_{k'} \in D_1$, $\Delta_e^{W_e}(k)$ считаем неопределенным и идем в (2).
   (б) Изменение $(D_1 \oplus D_2)(k)$ произошло раньше. Тогда останавливаем циклы с номерами $k' > k$, идем в (5).
(5) Перечисляем x_k в D_1.
(6) Ждем шага $t : (D_1 - D_2) \upharpoonright (x_k+1) = \Phi_e^{W_e} \upharpoonright (x_k+1)[t]$.
(7) Переопределяем функционал $\Delta_e^{W_e}(k)[t+1] = (D_1 \oplus D_2)(k)[t]$. Перечисляем x_k в D_2, разрушаем циклы с номерами $k' > k$, перечисляем $x_{k'}$ в D_2, если $x_{k'} \in D_1$, и идем в (2).

Выходы $\mathcal{R}_e$–стратегии

1) Работает конечное число циклов. В этом случае некоторый цикл k_0 либо ждет в (2) или в (6), либо бесконечное число раз переходит из (4) в (2). Требование $\mathcal{R}_e$ удовлетворено, т.к. $(D_1 - D_2)(x_{k_0}) \neq \Phi_e^{W_e}(x_{k_0})$. Функционал $\Delta_e^{W_e}$ не является всюду определенным в этом случае. Отметим, что перечисляется только конечное число элементов в D_1 и D_2. Обозначим этот выход через 1.
2) Работает бесконечное число циклов. Возможны два случая.
   (а) (настоящий бесконечный выход) Для каждого k существует шаг s_k, после которого цикл с номером k не работает. Тогда каждый из циклов окончательно ждет в (4). Требование $\mathcal{R}_e$ удовлетворено, т.к. в этом случае функционал $\Delta_e^{W_e}$ всюду определенный и правильно вычисляет $(D_1 \oplus D_2)$.
   (б) (мнимый бесконечный выход) Существует цикл k_0, который бесконечное число раз переходит из (4) в (2). Требование $\mathcal{R}_e$ удовлетворено, т.к. $\Phi_e^{W_e}(x_{k_0}) \uparrow$. Функционал Δ^{W_e} в этом случае не является всюду определенным, т.к. мы его постоянно в точках $k \geqslant k_0$ разрушаем и $\delta_e(k) \to \infty$.

   Заметим, что в обоих случаях все элементы, положенные в D_1, затем перечисляются в D_2 и на $(D_1 - D_2)$ не оказывается никакого влияния, но в $(D_1 \oplus D_2)$ кладется бесконечно много чисел. Возникает проблема между требованием $\mathcal{R}_e$ и требованием $\mathcal{N}_j$, которое расположено в дереве стратегий ниже бесконечного выхода $\mathcal{R}_e$. Эта проблема решается в процессе конструкции и ей посвящено доказательство леммы 1.3. Обозначим этот выход через 0.

Требование $\mathcal{N}$: $((D_1 \oplus D_2) \oplus A)' \leqslant_{\mathrm{T}} A'$

Наша стратегия будет естественной релятивизацией известной стратегии построения низкого множества ([6], с.111). Таким образом, будем строить множество $((D_1 \oplus D_2) \oplus A)$ низким относительно A (аналогичная идея использовалась в [5]).Для этого требование $\mathcal{N}$ разобьем на бесконечный список требований

$$\mathcal{N}_e : (\exists^\infty s)[(\Phi_e^{((D_1 \oplus D_2) \oplus A)}(e) \downarrow [s]) \,\&\, (A_s \upharpoonright \varphi_{e,s}(e) = A \upharpoonright \varphi_{e,s}(e))] \Longrightarrow \Phi_e^{((D_1 \oplus D_2) \oplus A)}(e) \downarrow$$

для всех $e \in \omega$, где $\{\Phi_e\}_{e \in \omega}$ — перечисление ч.р. функционалов.

Покажем, как при условии удовлетворения требований $\mathcal{N}_e$, $e \in \omega$, выполняется требование $\mathcal{N}$. Определим A-рекурсивную функцию

$$g^A(e,s) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi_e^{((D_1 \oplus D_2) \oplus A)}(e) \downarrow [s] \,\&\, A_s \upharpoonright \varphi_{e,s}(e) = A \upharpoonright \varphi_{e,s}(e); \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если требования $\mathcal{N}_e$ для всех $e \in \omega$ удовлетворены, то $\hat{g}(e) = \lim_s g^A(e,s)$ существует для всех e. По лемме о пределе ([6], с. 57) $\hat{g} \leqslant_{\mathrm{T}} A'$, и, т.к. $\hat{g}$ является характеристической функцией $((D_1 \oplus D_2) \oplus A)'$, имеем $((D_1 \oplus D_2) \oplus A)' \leqslant_{\mathrm{T}} A'$.

Основной модуль для $\mathcal{N}_e$

Стратегия для удовлетворения требования $\mathcal{N}_e$ работает следующим образом.

(1) Ждем шага $s_1 : \Phi_e^{((D_1 \oplus D_2) \oplus A)}(e) \downarrow [s_1]$.
(2) Устанавливаем запрет $r(e)[s_1+1] = \varphi_e(e)[s_1]$ на $(D_1 \oplus D_2)$.
(3) Ждем шага s_2, на котором произошло изменение $A \upharpoonright \varphi_e(e)$.
(4) Устанавливаем запрет $r(e)[s_2+1] = 0$, и идем в (1).

Выходы $\mathcal{N}_e$-стратегии

1) Существует шаг s, после которого стратегия не работает. Тогда она ждет либо в (1), либо в (3). В этом случае запрет $r(e)$ имеет конечный предел. Обозначим этот выход через 1.
2) Стратегия работает бесконечно много раз, переходя из (4) в (1). В этом случае существует $\liminf_s r(e) = 0$. Обозначим этот выход через 0.

Дерево стратегий

Обозначим множества выходов стратегий $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{N}$ через Λ_P, Λ_R и Λ_N соответственно, т.е. $\Lambda_P = \{0 <_{\Lambda_P} 1 <_{\Lambda_P} 2 <_{\Lambda_P} \cdots <_{\Lambda_P} f\}$, $\Lambda_R = \{0 <_{\Lambda_R} 1\}$, $\Lambda_N = \{0 <_{\Lambda_N} 1\}$. Пусть $\Lambda = \Lambda_P \cup \Lambda_R \cup \Lambda_N$. Тогда деревом стратегий назовем множество

$$T = \{\alpha \in \Lambda^{<\omega} \big| (\forall k < |\alpha|)[\alpha(k) \in \Lambda_P,\ \Lambda_R,\ \Lambda_N \text{ для } k \equiv 0,1,2 \pmod 3)]\}.$$

Каждой вершине $\alpha \in T$ назначаем некоторое требование, над которым она будет работать. Пусть $|\alpha| = 3e + k$, где $e, k \in \omega$ и $k \leqslant 2$. Тогда

$$\text{назначаем вершине } \alpha \text{ требование } \begin{cases} \mathcal{P}_e, & \text{если } k = 0; \\ \mathcal{R}_e, & \text{если } k = 1; \\ \mathcal{N}_e, & \text{если } k = 2, \end{cases}$$

т.е. каждый уровень дерева работает над одним требованием.

Теперь α-стратегией будем называть вариант основного модуля для требования, которое назначено вершине α, с некоторыми изменениями, описанными в конструкции; S-стратегией, где $S \in \{\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{N}\}$, будем называть стратегию α, если она работает над требованием вида $\mathcal{P}_e$, $\mathcal{R}_e$, $\mathcal{N}_e$ соответственно. Шаг s назовем α-шагом, если стратегия α имела возможность работать на шаге s.

Полная конструкция

Шаг 0. $D_{1,0} = D_{2,0} = \emptyset$, все Δ_e, Γ_e неопределены, все стратегии $\alpha \in T$ инициализированы.
Шаг $s+1$ состоит из двух фаз.

1-я фаза. Ищем самую левую $\mathcal{P}$–стратегию $\alpha \in T$ такую, что некоторый цикл с наименьшим номером k_0 ждет в (4) и $K(k_0)[s] \neq K(k_0)[s_1]$, где s_1 — шаг, на котором цикл k_0 стратегии α прошел через (2) в (3). Если такая найдется, то позволяем этому циклу перейти через (4б) в (5) и выполнить его. Затем инициализируем все стратегии $\beta \geqslant \alpha^\frown k_0$. Если такой стратегии нет, то ничего не делаем.

2-я фаза. Работаем по подшагам $t \leqslant 3s+2$, причем на каждом подшаге t одна из стратегий α длины t будет иметь возможность работать. Возможны три случая.

$|\alpha| = t = 3e$. Стратегия α работает над требованием $\mathcal{P}_e$, как описано в основном модуле для $\mathcal{P}_e$. Определяем выход o стратегии α следующим образом: если некоторый цикл работал, то выходом будет номер этого цикла, в противном случае — f. Далее, инициализируем стратегии $\beta >_{\mathrm{L}} \alpha^\frown o$ и определяем следующую стратегию β, которая имеет возможность работать на подшаге $t+1$: если работающий цикл k_0 перешел из (4) в (2), то $\beta = \alpha\hat{\ }k_0$, в противном случае $\beta = \alpha\hat{\ }f$. Переходим к подшагу $t+1$.

$|\alpha| = t = 3e+1$. Стратегия α работает над требованием $\mathcal{R}_e$, как описано в основном модуле для $\mathcal{R}_e$ с небольшими изменениями, а именно: если между двумя последовательными α-шагами $t_1 < t_2$ некоторый цикл k_0 ждет в (4), и изменилось сначала значение $(D_1 \oplus D_2)(k_0)$, а затем $W_e \upharpoonright \delta_e(k_0)$, то на шаге t_2 цикл k_0 (если ему дадут работать) переходит из (4) в (2) через (4a) (т.е. не смотрит на то, что изменение $(D_1 \oplus D_2)(k_0)$ произошло раньше). Определяем выход o стратегии α следующим образом: если некоторый цикл работал впервые, то выходом считаем 0, в противном случае — 1. Далее, инициализируем стратегии $\beta >_{\mathrm{L}} \alpha\hat{\ }o$. Если работающий цикл прошел через (5) или (7), то определяем $\delta_{s+1} = \alpha$, инициализируем стратегии $\beta \supset \alpha\hat{\ }1$ и переходим к следующему шагу $s+2$. В противном случае определяем следующую стратегию β, которая имеет возможность работать на подшаге $t+1 : \beta = \alpha\hat{\ }o$. Переходим к подшагу $t+1$.

$|\alpha| = t = 3e+2$. Стратегия α работает над требованием $\mathcal{N}_e$, как описано в основном модуле для $\mathcal{N}_e$. Определяем выход o стратегии α следующим образом: если произошел переход из (3) в (1), то выход — 0, в противном случае — 1. Далее, инициализируем стратегии $\beta >_{\mathrm{L}} \alpha\hat{\ }o$. Если был выполнен (2), то инициализируем еще стратегии $\beta \supset \alpha\hat{\ }o$. Если $t = 3s+2$, то определяем $\delta_{s+1} = \alpha$ и переходим к следующему шагу $s+2$. В противном случае определяем стратегию $\beta = \alpha\hat{\ }o$, которая имеет возможность работать на подшаге $t+1$. Переходим к подшагу $t+1$. Конструкция закончена.

Проверка конструкции

Для завершения доказательства теоремы докажем ряд лемм.

Определим истинный путь $f \in [T]$ как самую левую бесконечную ветвь дерева T, посещаемую δ_s в течение конструкции бесконечное число раз, т.е. для всех n, если $\alpha = f \upharpoonright n$, то $f(n) = a$ означает окончательный выход стратегии α. Покажем, что истинный путь в нашей конструкции определяется корректно.

Лемма 1.1. *Истинный путь f существует.*

Доказательство. Доказательство ведем индукцией по глубине дерева n. Полагаем $f \upharpoonright 0 = \lambda$. Пусть $\alpha = f \upharpoonright n$ уже определено. Покажем, что $f(n)$ определяется единственным образом. Возможны три случая.

1) $|\alpha| = n = 3e$, т.е. α является $\mathcal{P}$–стратегией. В этом случае $f(n) = \liminf\limits_s \delta_s(n)$ в том смысле, что $(\exists^{<\infty} s)[\delta_s(n) <_{\mathrm{L}} f(n)]$ и $(\exists^{\infty} s)[f(n) = \delta_s(n)]$. То есть либо $f(n) = k_0$, где k_0 — номер цикла, бесконечно много раз переходящего из (4) в (2), либо $f(n) = f$. Заметим, что из предположения $f = \alpha$ получаем $K \leqslant_{\mathrm{T}} A$, что противоречит условию теоремы.

2) $|\alpha| = n = 3e+1$, т.е. α является $\mathcal{R}$–стратегией. Определяем $f(n) = \liminf\limits_s \delta_s(n)$, т.к. в этом случае предел существует всегда. Легко показывается, что в случае, когда $f(n) = 0$, $(\exists^{\infty} s)[\alpha\hat{\ }0 \subseteq \delta_s]$, т.е. конструкция “не застревает” на $\mathcal{R}$–стратегии.

3) $|\alpha| = n = 3e+2$, т.е. α является $\mathcal{N}$–стратегией. Определяем $f(n) = \liminf\limits_s \delta_s(n)$, т.к. в этом случае предел существует всегда. $\square$

Лемма 1.2. *Все вершины $\alpha \subset f$ инициализируются конечное число раз.*

Доказательство. Вначале покажем, что из-за 1-й фазы конструкции α инициализируется конечное число раз. Действительно, т.к. $\alpha \subset f$, то стратегии $\gamma <_{\mathrm{L}} \alpha$ в первой фазе могут работать конечное число раз. Что касается $\mathcal{P}$–стратегий $\gamma\hat{\ }k \subseteq \alpha$, то любой цикл k $\mathcal{P}$–стратегии может перечислить своих представителей лишь один раз. Так как таких γ лишь конечное число, то α в этом случае инициализируется конечное число раз.

Из-за 2-й фазы конструкции α может инициализироваться стратегиями β, которые либо $\beta <_{\mathrm{L}} \alpha$, либо $\beta \subset \alpha$. В первом случае, т.к. $\alpha \subset f$, β может это делать только конечное число раз.

Во втором случае, если α находится под конечным выходом β, то α инициализируется конечное число раз; в противном случае β вообще не инициализирует α. $\square$

Лемма 1.3. *Запрет $\mathcal{N}$–стратегии $\alpha \subset f$ нарушается конечное число раз.*

Доказательство. Единственным заслуживающим внимания является положение, когда $\mathcal{N}$–стратегия $\alpha \subset f$ расположена под бесконечными выходами $\mathcal{R}$–стратегий. Достаточно рассмотреть два случая.

1) Пусть $\mathcal{R}$–стратегия одна: $\beta\hat{\ }0 \subseteq \alpha \subset f$. Первоначально $\mathcal{R}$–стратегия β может перечислить некоторый элемент x в $(D_1 \oplus D_2)$ только из-за перечисления $\mathcal{P}$–стратегией γ в первой фазе конструкции некоторого элемента $y < x$. Самым интересным является случай, когда $\beta\hat{\ }0 \subseteq \gamma \subset \alpha$, т.к. в этом случае α инициализируется, а β нет. Однако α будет иметь возможность работать (устанавливать свой новый запрет) только после того, как β пройдет через (5), (6), (7) и (2), т.е. β ничего не нарушает.

2) Пусть имеются две $\mathcal{R}$–стратегии: $\beta_1\hat{\ }0 \subset \beta_2\hat{\ }0 \subseteq \alpha$, и некоторая $\mathcal{P}$–стратегия γ в первой фазе конструкции перечислила некоторый элемент x в $(D_1 \oplus D_2)$. Опять самый интересный случай, когда $\beta_1\hat{\ }0 \subset \beta_2\hat{\ }0 \subseteq \gamma \subset \alpha$. Обозначим через $y_1(k)$ и $y_2(k)$ представителей k-го цикла стратегий β_1 и β_2 соответственно. Рассмотрим ситуацию, когда β_2 создает работу для β_1. Это может происходить следующим образом: β_1 выполняет свой цикл x и, корректируя свой функционал в точке x, перечисляет $y_1(x)$ вначале в D_1, а затем в D_2; до того, как β_2 получит возможность работать, β_1 успевает запустить свой $y_2(x)$-й цикл; теперь β_2 корректирует свой функционал в точке x, перечисляя $y_2(x)$ в D_1; после этого β_1 вынужден корректировать функционал в точке $y_2(x)$, перечисляя $y_1(y_2(x))$. На этом процесс взаимной работы β_1 и β_2 заканчивается. Не вдаваясь в подробности, отметим, что β_1 для β_2 работы не создает. Но заметим, что по конструкции до α мы доберемся только после того, как вся эта работа будет завершена.

Если рассмотреть любую конечную последовательность $\beta_1\hat{\ }0 \subset \beta_2\hat{\ }0 \subset \ldots \subset \beta_n\hat{\ }0 \subseteq \alpha$, то совершенно аналогично можно показать, что процесс взаимной работы $\beta_1, \ldots, \beta_n$ конечен и никак не затрагивает запрет стратегии α.

Делаем вывод, что нарушения запрета α происходят только из-за перечисления элементов в $(D_1 \oplus D_2)$ в первой фазе конструкции $\mathcal{P}$–стратегиями γ такими, что $\gamma < \alpha$. Это всегда сопровождается инициализацией, а по лемме 1.2 это происходит конечное число раз. $\square$

Обозначим через $R(\alpha, s)$ запрет стратегии α после шага s (в случае $\mathcal{P}$–стратегии это будет общий запрет всех циклов).

Лемма 1.4. *Любая стратегия $\alpha \subset f$ для $\gamma \supset \alpha$ на f создает конечный запрет $R(\alpha)$.*

Доказательство. В нашей конструкции запреты устанавливают только $\mathcal{P}$- и $\mathcal{N}$–стратегии. Пусть $\alpha \subset f$ — $\mathcal{P}$–стратегия. Как отмечалось в разделе о выходах $\mathcal{P}$–стратегии, если $\alpha\hat{\ }f \subset f$, то $R(\alpha) = \lim\limits_s R(\alpha, s)$ существует и конечен. Если $\alpha\hat{\ }k_0 \subset f$, то существует конечный $\liminf\limits_s R(\alpha, s) = R(\alpha)$.

Пусть $\alpha \subset f$ — $\mathcal{N}$–стратегия. Как описано в разделе о выходах $\mathcal{N}$–стратегии в случае $\alpha\hat{\ }1 \subset f$, $R(\alpha, s)$ имеет конечный предел, а в случае $\alpha\hat{\ }0 \subset f$ $\liminf\limits_s R(\alpha, s) = 0$. Обозначим эти пределы через $R(\alpha)$. $\square$

Лемма 1.5. *Все требования вдоль истинного пути удовлетворяются.*

Доказательство. Отметим, что по построению дерева стратегий вдоль любой бесконечной ветви расположены все требования.

Пусть $\alpha \subset f$ — любая стратегия. По лемме 1.2 существует шаг s, после которого она уже не инициализируется. Используя лемму 1.4 и тот факт, что $\alpha \subset f$, легко показать, что $R = \max\{R(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ конечен. Так как установка нового запрета сопровождается инициализацией право- и нижележащих стратегий, то все вновь выбранные представители стратегии α после шага s уже будут больше R. На всех последующих α-шагах наша стратегия будет работать, как описано в ее основном модуле, и требование, над которым она работает, будет выполнено. $\square$

Доказательство теоремы закончено.

Следствие 1. Каждый класс скачков содержит бесконечную возрастающую последовательность ИСВ d-р.п. степеней.

Доказательство. Пусть $\mathbb{C}$ — любой класс скачков, кроме High_1, и пусть р.п. степень $\mathbf{b}_0 \in \mathbb{C}$. Применяя теорему 1 с $\mathbf{a} = \mathbf{b}_0$, получаем ИСВ d-р.п. степень $\mathbf{d}_0$ и р.п. степень $\mathbf{b}_1$ такие, что $\mathbf{b}_0 < \mathbf{d}_0 < \mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{C}$. Следовательно, и $\mathbf{d}_0 \in \mathbb{C}$. Применяя теорему 1 с $\mathbf{a} = \mathbf{b}_1$, получаем ИСВ d-р.п. степень $\mathbf{d}_1$ и р.п. степень $\mathbf{b}_2$ такие, что $\mathbf{d}_0 < \mathbf{b}_1 < \mathbf{d}_1 < \mathbf{b}_2$ и $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{C}$, и т.д.

Пусть теперь $\mathbb{C} = \mathrm{High}_1$. Добавим в формулировку теоремы 1 условие $\mathbf{b} < \mathbf{0}'$. Для того чтобы доказать теорему в этом случае, заменим в списке требований теоремы 1 требования вида $\mathcal{N}_e$ на требования $\mathcal{NP}_e : B \neq \Phi_e^{((D_1 \oplus D_2) \oplus A)}$, где B — вспомогательное р.п. множество, которое мы строим. Эти требования гарантируют, что $\deg(((D_1 \oplus D_2) \oplus A)) \neq \mathbf{0}'$. Эти изменения требований не добавляют в конструкцию принципиальных трудностей, и доказательство остается почти в прежнем виде (с необходимыми изменениями в дереве стратегий и полной конструкции). После этого, применяя теорему 1 с новым условием, получаем $\mathbf{b}_0 < \mathbf{d}_0 < \mathbf{b}_1 < \mathbf{0}'$ и $\mathbf{b}_1 \in \mathrm{High}_1$, и т.д. $\square$

Построенная в теореме 1 ИСВ пара имеет вид $\langle \deg(D_1 - D_2), \deg(D_1 \oplus D_2) \rangle$. Оказывается, что любую ИСВ пару можно представить в таком виде. Вначале докажем следующее

Утверждение. *Пусть даны произвольные d-р.п. степень $\mathbf{d}$ и р.п. степень $\mathbf{a} \geqslant \mathbf{d}$. Тогда существует d-р.п. множество $(D_1 - D_2) \in \mathbf{d}$ такое, что $\deg(D_1 \oplus D_2) \leqslant \mathbf{a}$.*

Доказательство. Пусть даны произвольное d-р.п. множество $(B_1 - B_2) \in \mathbf{d}$ и р.п. множество $A \in \mathbf{a}$. Построим d-р.п. множество $(D_1 - D_2) = (B_1 - B_2)$, удовлетворяющее условию $(D_1 \oplus D_2) \leqslant_T A$. Идея состоит в том, чтобы при построении $(D_1 - D_2)$ "пропускать" элементы, которые входят в B_1, а затем в B_2 "без разрешения A". Опишем нашу стратегию.

Пусть $(B_1 - B_2) = \Phi_e^A$. Строим $(D_1 - D_2) = (B_1 - B_2)$ и ч.р. функционал $\Delta : \Delta^A = (D_1 \oplus D_2)$. Наша стратегия работает по следующим циклам.

<u>**Цикл k**</u>

(1) Ждем шага $s : (B_1 - B_2)(k) = \Phi_e^A(k) \downarrow [s]$.

(2) (Пере)определяем функционал $\Delta^A(2k) = (D_1 \oplus D_2)(2k) = (B_1 \oplus B_2)(2k)$, $\Delta^A(2k+1) = (D_1 \oplus D_2)(2k+1) = (B_1 \oplus B_2)(2k+1)$ $[s+1]$ с $\delta(2k) = \delta(2k+1) = \varphi_{e,s}(k)$. (Тем самым автоматически определяем $(D_1 - D_2)(k) = (B_1 - B_2)(k)$.) Начинаем $(k+1)$-й цикл. Одновременно продолжаем работу нашего цикла, переходя в (3).

(3) Ждем изменения $A \upharpoonright \delta(2k+1)$ или $(B_1 - B_2)(k)$.
   - (а) Изменение $A \upharpoonright \delta(2k+1)$ произошло раньше. Тогда разрушаем циклы с номерами $k' > k$; $\Delta^A(2k), (2k+1)$ считаем неопределенным (из-за изменения $A \upharpoonright \delta(k)$) и идем в (1).
   - (б) Изменение $(B_1 - B_2)(k)$ произошло раньше. Тогда останавливаем циклы с номерами $k' > k$, идем в (4).

(4) Изменение могло произойти двумя путями:
   - (а) $(B_1 - B_2)(k)$ изменилось с 0 на 1. Тогда ждем восстановления равенства на некотором шаге $t : (B_1 - B_2)(k) = \Phi_e^A(k) \downarrow$ $[t]$. Оно произойдет либо из-за изменения $(B_1 - B_2)(k)$ на 0, либо $A \upharpoonright \varphi_e(k)$. В первом случае продолжаем работу $(k+1)$-го цикла и идем в (5). Во втором случае перечисляем k в D_1, разрушаем циклы с номерами $k' > k$ и идем в (2) переопределять Δ^A в точках $2k$ и $2k+1$.
   - (б) $(B_1 - B_2)(k)$ изменилось с 1 на 0. Тогда ждем восстановления равенства на некотором шаге $t : (B_1 - B_2)(k) = \Phi_e^A(k) \downarrow= 0$ $[t]$. Оно может произойти только из-за изменения $A \upharpoonright \varphi_e(k)$. Перечисляем k в D_2, разрушаем циклы с номерами $k' > k$,

переопределяем $\Delta^A(2k+1) = (D_1 \oplus D_2)(2k+1)$ с окончательным произвольным $\delta(2k+1)$, начинаем $(k+1)$–й цикл и идем в (5).

(5) Конец работы.

Конструкция заключается в том, чтобы на каждом шаге $s > 0$ стратегия давала работу циклу с наименьшим номером, который имеет работу.

Для доказательства леммы отметим, что (т.к. $(B_1 - B_2) = \Phi_e^A$) окончательно все циклы будут находиться в (3) или в (5). Понятно, что $(D_1 - D_2) = (B_1 - B_2)$и $(D_1 \oplus D_2) \leqslant_{\mathrm{T}} A$. $\square$

Из утверждения получаем

Следствие 2. Собственно d-р.п. степень $\mathbf{d}$ и р.п. степень $\mathbf{b} > \mathbf{d}$ образуют изолированную сверху пару тогда и только тогда, когда существует d-р.п. множество $(D_1 - D_2) \in \mathbf{d}$ такое, что $(D_1 \oplus D_2) \in \mathbf{b}$ и между степенями $\deg(D_1 - D_2)$ и $\deg(D_1 \oplus D_2)$ нет р.п. степеней.

Литература

1. Arslanov M.M., Lempp S., Shore R.A. *On isolating r.e. and isolated d-r.e. degrees* // London Math. Soc. – Lecture Note Series. – 1996. – V. 224. – P. 61–80.
2. Cooper S.B., Lempp S., Watson P. *Weak density and cupping in the d-r.e. degrees* // Israel J. Math. – 1989. – V.67. – № 2.
3. Cooper S.B., Yi X., *Isolated d-r.e. degrees* // Preprint. – University of Leeds. – 1995.
4. LaForte G. *The isolated d.r.e. degrees are dense in the r.e. degrees* // Math. Logic Quarterly. – 1996. – V. 42. – P. 83–103.
5. Lempp S., Slaman T.A. *A limit on relative genericity in the recursively enumerable sets* // J. Symb. Logic. – 1989. – V. 54. – № 2.
6. Soare R.I. *Recursively enumerable sets and degrees.* – Berlin: Springer-Verlag, 1987.

Казанский государственный университет

Поступила
07.06.1995