ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 2 (429)

УДК 519.641

И.В. БОЙКОВ

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В СВЕРТКАХ

Уравнения в свертках находят широкое применение в многочисленных задачах физики и техники [1]–[3]. Подробный анализ методов решения уравнений в свертках содержится в [1], [2]. Ниже предлагается несколько итерационных методов.

Рассмотрим уравнение

$$\lambda x(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b h(t-\tau) x(\tau) d\tau = f(t), \quad a \le t \le b, \tag{1}$$

где $h(t), f(t) \in L_2[a,b]$; $\lambda \ge 0$; $-\infty \le a < b \le \infty$.

Обозначим через P_{ab} оператор, определенный на числовой оси и действующий по формуле

$$P_{ab} f = \begin{cases} f(t), & t \in [a,b]; \\ 0, & t \notin [a,b]. \end{cases}$$

Пользуясь оператором P_{ab}, распространим уравнение (1) на числовую ось $-\infty < t < \infty$

$$\lambda x(t) + P_{ab}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) P_{ab}[x(\tau)] d\tau\right] = f^*(t), \quad -\infty \le t \le \infty, \tag{2}$$

где $f^*(t) = f(t)$ при $t \in [a,b]$, $f^*(t) = 0$ при $t \notin [a,b]$.

Продолжим функцию $h(t)$ с сегмента $[a-b,\ b-a]$ на числовую ось и полученную в результате функцию обозначим через $h^*(t)$.

Обозначим через $X(\omega)$, $H^*(\omega)$, $F^*(\omega)$ преобразование Фурье функций $x(t)$, $h^*(t)$, $f^*(t)$, которое вычисляется по формуле

$$X(\omega) = V(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt.$$

Обратное преобразование вычисляется по формуле

$$x(t) = V^{-1}(X(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Будем говорить, что выполнено условие A, если найдется такое комплексное число γ, что $|\lambda + H^*(\omega) - \frac{1}{\gamma}| \le \frac{1}{|\gamma|}$. Отсюда следует, что $q = \sup\limits_{-\infty<\omega<\infty} |1 - \gamma(\lambda + H^*(\omega))| \le 1$. Подобное условие было использовано в [4] при исследовании краевой задачи Римана.

Для решения уравнения (1) воспользуемся итерационными методами

$$x_{n+1} = x_n - \gamma\Big(\lambda x_n + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b h(t-\tau) x_n(\tau) d\tau - f(t)\Big), \quad a \le t \le b, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 94-01-00653).

если $q < 1$;

$$x_{n+1}(t) = \alpha_n x_n(t) + (1-\alpha_n)\Big(x_n(t) - \gamma\Big(\lambda x_n(t) + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b h(t-\tau)x_n(\tau)d\tau - f(t)\Big)\Big), \quad a \le t \le b, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{4}$$

если $q = 1$.

В итерационном методе (4) предполагается выполнение условий $0 < \alpha \le \alpha_n \le \beta < 1$.

Теорема 1. *Пусть для функции h^* выполнено условие* A, *причем $q < 1$. Тогда итерационный процесс* (3) *сходится при любом начальном приближении к единственному решению уравнения* (1) *со скоростью Aq^n.*

Доказательство. Покажем, что оператор

$$Kx \equiv x - \gamma\Big(\lambda x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b h(t-\tau)x(\tau)d\tau\Big)$$

является оператором сжатия в пространстве $L_2[a,b]$. Через $x^*(t)$ обозначим функцию $x^*(t) = x(t)$ при $t \in [a,b]$, $x^*(t) = 0$ при $t \notin [a,b]$. Через $X^*_{ab}(\omega)$ обозначим преобразование Фурье функции $x^*(t)$. Из определения оператора P_{ab} следует, что $P_{ab}x^* = x^*$ и $\|P_{ab}\|_{L_2(-\infty,\infty)} = 1$. Известно также, что $\|V\|_{L_2(-\infty,\infty)} = \|V^{-1}\|_{L_2(-\infty,\infty)} = 1$. Тогда

$$\|Kx\|_{L_2[a,b]} = \Big\|x(t) - \gamma\Big(\lambda x(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_a^b h(t-\tau)x(\tau)d\tau\Big)\Big\|_{L_2[a,b]} =$$
$$= \Big\|P_{ab}\Big[x^*(t) - \gamma\Big(\lambda x^*(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h^*(t-\tau)P_{ab}[x^*(\tau)]d\tau\Big)\Big]\Big\|_{L_2(-\infty,\infty)} \le$$
$$\le \Big\|P_{ab}[x^*(t)] - \gamma\Big(\lambda P_{ab}[x^*(t)] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h^*(t-\tau)P_{ab}[x^*(\tau)]d\tau\Big)\Big\|_{L_2(-\infty,\infty)} =$$
$$= \|X^*_{ab}(\omega) - \gamma(\lambda X^*_{ab}(\omega) + H^*(\omega)X^*_{ab}(\omega))\|_{L_2(-\infty,\infty)} \le$$
$$\le \sup_\omega |1 - \gamma(\lambda + H^*(\omega))|\, \|X^*_{ab}(\omega)\|_{L_2(-\infty,\infty)} \le q\|X^*_{ab}(\omega)\|_{L_2(-\infty,\infty)} =$$
$$= q\|P_{ab}x^*(t)\|_{L_2(-\infty,\infty)} = q\|x(t)\|_{L_2[a,b]}.$$

Из этого неравенства и теоремы Банаха о сжатых отображениях следует справедливость теоремы.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1) *имеет единственное решение $x^*(t)$ и для $h^*(t)$ выполнено условие* A. *Тогда итерационный процесс* (4) *сходится к $x^*(t)$ в метрике пространства $L_2[a,b]$.*

При доказательстве теоремы 2 используется

Теорема ([5], с. 420–421). *Пусть U — линейный оператор, действующий в рефлексивном пространстве E и обладающий свойством: существует такая постоянная C, что $\|U^n\| \le C$, $n = 0, 1\ldots$ Тогда метод вида*

$$x^{n+1} = \alpha_n x^n + (1-\alpha_n)Ux^n, \quad 0 < \epsilon_0 \le \alpha_n \le 1 - \epsilon_1 < 1, \quad n = 0,1,\ldots,$$

сходится к неподвижной точке при любом $x^0 \in E$.

Доказательство теоремы 2. Повторяя выкладки, проведенные при доказательстве теоремы 1, имеем

$$\|Kx\|_{L_2[a,b]} \le \sup_\omega |1 - \gamma(\lambda + H^*(\omega))|\, \|x\|_{L_2[a,b]} \le \|x\|_{L_2[a,b]}. \tag{5}$$

Из неравенства (5) следует, что $\|K\|_{L_2[a,b]} = 1$. Отсюда и из процитированной теоремы Л.Я. Обломской следует справедливость теоремы 2.

В случае, когда $a = -\infty$ и $b = \infty$, условия, налагаемые на функцию $h(t)$, можно ослабить.

Рассмотрим уравнение

$$\lambda x(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad \lambda \geq 0. \tag{6}$$

Будем считать, что условие A для функции $h(t)$ не выполняется. Пусть $\lambda + H(\omega) \neq 0$. Обозначим через T_0 и T_N достаточно большие по абсолютной величине числа, выбор которых определяется условием

$$\epsilon = \Big[\int_{-\infty}^{T_0} |X(\omega)|^2 d\omega + \int_{T_N}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \Big]^{1/2}.$$

Введем сегменты $\Delta_k = [T_{k-1}, T_k]$, $k = 1, 2, \ldots, N$, где $T_0 < T_1 < \cdots < T_N$, таким образом, чтобы при изменении ω в сегменте Δ_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ приращение аргумента функции $\lambda + H(\omega)$ было меньше π. Каждому сегменту Δ_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ поставим в соответствие такую константу γ_k, при которой значения функций $\gamma_k(\lambda + H(\omega))$ при $\omega \in \Delta_k$ лежат внутри единичного круга с центром в точке $(1, 0)$. Обозначим через $E_j(\omega)$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ характеристические функции сегментов Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, а через $x_j^*(t)$, $x_{oj}(t)$, $f_j(t)$ — прообразы функций $E_j(\omega)X^*(\omega)$, $E_j(\omega)X_0(\omega)$, $E_j(\omega)F(\omega)$ соответственно.

Для нахождения функции $x^*(t)$ используем итерационный процесс

$$x_{n+1,j}(t) = x_{n,j}(t) - \gamma_j \Big(\lambda x_{n,j} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x_{n,j}(\tau)d\tau - f_j(t) \Big), \tag{7}$$

$j = 1, 2, \ldots, N$, $n = 0, 1, \ldots$

Определим $x_{n+1}(t)$ из выражения

$$x_{n+1}(t) = \sum_{j=1}^{N} x_{n+1,j}(t). \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть уравнение* (6) *имеет решение* $x^*(t)$. *Тогда последовательные приближения* $x_{n+1}(t)$ *сходятся и справедлива оценка*

$$\|x^*(t) - x_{n+1}(t)\|_{L_2} \leq A(q^n) + \epsilon,$$

где $q = \max q_i$, $q_i = \sup\limits_{\omega \in \Delta_i} |1 - \gamma_i(\lambda + H(\omega))|$, $1 \leq i \leq N$.

Доказательство. Докажем сходимость итерационного процесса (7)–(8). Так как решение $x^*(t)$ уравнения (6) принадлежит пространству L_2, то для любого $\epsilon > 0$ найдется такая константа T, при которой

$$\int_{-\infty}^{-T} |X^*(\omega)|^2 d\omega + \int_{T}^{\infty} |X^*(\omega)|^2 d\omega < \epsilon^2.$$

Возьмем в качестве начального приближения функцию $x_0(t)$ с финитным спектром, сосредоточенным на сегменте $[-T, T]$.

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, убеждаемся, что $x_{n+1,j}(t) \to x_j^*(t)$. Таким образом, последовательность $x_{n+1}(t)$, определяемая выражением (8), сходится к функции $x^*(t)$ при $n \to \infty$ и $T \to \infty$. Оценка погрешности итерационной схемы (7)–(8) может быть получена повторением выкладок, проведенных при доказательстве теоремы 1. $\square$

Обоснование изложенных выше итерационных методов заключалось в “переходе” в спектральную область. Метод, основанный на выполнении итераций в спектральной области, оказывается чрезвычайно эффективным и простым в реализации.

Рассмотрим уравнение (6). Применив к нему преобразование Фурье, имеем

$$(\lambda + H(\omega))X(\omega) = F(\omega).$$

Введем сетку узлов $\omega_k = -A + kA/N$, $k = 0, 1, \dots, 2N$, где A — достаточно большое число. Пусть $\lambda + H(\omega_k) \neq 0$, $k = 0, 1, \dots, 2N$.

Рассмотрим итерационный процесс

$$X_{n+1}(\omega_k) = X_n(\omega_k) - \gamma_k((\lambda + H(\omega_k))X_n(\omega_k) - F(\omega_k)), \tag{9}$$

$k = 0, 1, \dots, 2N$, $n = 0, 1, \dots$, где γ_k подбирается из требования, чтобы $q_k = |1 - \gamma_k(\lambda + H(\omega_k))| \leq 1/2$, $k = 0, 1, \dots, 2N$. При налагаемых на функцию $\lambda + H(\omega_k)$ условиях это всегда возможно.

Нетрудно видеть, что при каждом k ($k = 0, 1, \dots, 2N$) итерации (9) сходятся со скоростью Aq_k^n. Затем по квадратурным формулам преобразования Фурье находим функцию $x(t)$.

Исследуем погрешность, которая возникает при численной реализации предложенных вычислительных схем.

Вначале остановимся на решении уравнения (1) по вычислительной схеме (3). Исследуем величину погрешности, которая обусловлена дискретизацией интеграла $\int\limits_a^b h(t-\tau)x(\tau)d\tau$. Для простоты дальнейших выкладок будем рассматривать интегральное уравнение

$$Kx \equiv \lambda x(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \tag{10}$$

с непрерывной функцией $h(t)$.

Будем искать приближенное решение уравнения (10) в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \psi_k(t),$$

где x_k — неизвестные коэффициенты, а $\psi_k(t)$ — фундаментальные полиномы по узлам z_k, $k = 1, 2, \dots, n$, полинома Лежандра $L_n(t)$. Обозначим через P_n^t оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов степени $n-1$ по узлам z_k, $k = 1, 2, \dots, n$, по переменной t.

Уравнение (10) аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений

$$\lambda x_k + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{l=1}^{n} a_{nl} h_n(z_k - z_l) x_l = f(z_k), \tag{11}$$

$k = 1, 2, \dots, n$, где

$$a_{kl} = \frac{2}{1 - z_l^2} \frac{1}{L_n'(z_l)^2}, \quad h_n(t) = P_n^t h(t).$$

В операторной форме система уравнений (11) имеет вид

$$K_n x_n = \lambda x_n + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P_n^t \Big[\int_{-1}^{1} P_n^\tau [h_n(t-\tau)x_n(\tau)] d\tau \Big] = P_n^t[f(t)]. \tag{12}$$

Уравнение (12) эквивалентно следующему

$$K_n x_n = \lambda x_n + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} h_n(t-\tau)x_n(\tau)d\tau = f_n(t), \tag{13}$$

где $f_n(t) = P_n^t[f(t)]$.

Пусть в пространстве $C[-1,1]$ непрерывных функций с нормой $\|x(t)\| = \max_{-1\le t\le 1}|x(t)|$ оператор K непрерывно обратим. Пусть функции $h(t)$ и $f(t)$ принадлежат пространству $W^r(1)$, т.е. имеют непрерывные производные до $r-1$ порядка и кусочно-непрерывную производную r порядка, с нормой, равной единице. Из общей теории приближенных методов анализа [6], [7] и конструктивной теории функций [8] следует, что при n, для которых $q = A\|K^{-1}\|n^{-r+1/2} < 1$, система уравнений (12) имеет единственное решение $x_n^*(t)$ и справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*(t)\| \le A\|K^{-1}\|n^{-r+1/2},$$

где x^* — решение уравнения (10), A — постоянная, не зависящая от n.

Обозначим через $h_n^*(t)$ функцию, являющуюся продолжением с сегмента $[-2,2]$ на числовую ось функции $h_n(t)$, причем продолжение осуществляется точно по такому же алгоритму, по которому ранее функция $h(t)$ была продолжена до $h^*(t)$. (В качестве одного из вариантов можно предположить, что функции $h^*(t)$ и $h_n^*(t)$ равны нулю вне сегмента $[-2,2]$.)

Обозначим через $H_n^*(\omega)$ преобразование Фурье функции $h_n^*(t)$. Тогда

$$|H_n^*(\omega) - H^*(\omega)| = \Big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(h^*(t) - h_n^*(t))e^{i\omega t}dt\Big| \le An^{-r+1/2}.$$

Поэтому при достаточно больших n для системы уравнений (12) выполняется условие А с константой q_1, удовлетворяющей неравенству $|q_1 - q| \le An^{-r+1/2}$.

Итак, решая систему (12) (или, что эквивалентно, уравнение (13)) итерационным методом (3) и ограничиваясь m итерациями, имеем $\|x^*(t) - x_n^m(t)\| \le A(n^{-r+1/2} + q_1^m)$, где $x^*(t)$ — решение уравнения (10), $x_n^m(t)$ — значение m-й итерации решения уравнения (13) по итерационной схеме (3).

Исследуем теперь погрешность реализации вычислительной схемы (9). Эта погрешность имеет три составляющие: 1) погрешность вычисления прямого преобразования Фурье функций $h(t)$ и $f(t)$ на сетке ω_k, $k = 0,1,\dots,M$; 2) погрешность вычислений по итерационной схеме (9); 3) погрешность вычисления обратного преобразования Фурье функции $X_n(\omega)$.

Оценим каждую из этих составляющих в отдельности. Ограничимся случаем, когда функции $h(t)$ и $f(t)$ финитны с носителем $[-T,T]$ и принадлежат классу $W^r(1)$. По [9], [10] в этом случае вычисление преобразования Фурье по квадратурным формулам, использующим значения функций $h(t)$ и $f(t)$ в N точках, имеет погрешность AN^{-r}.

Погрешность вычисления по итерационной схеме (9) складывается из двух составляющих: погрешности, обусловленной выходом из цикла на n-й итерации, и погрешности, обусловленной неточными значениями $F(\omega_k)$ и $H(\omega_k)$. Учитывая, что константа γ_k при каждом ω_k выбрана так, что $q_k \le 1/2$, а значения $F(\omega_k)$ и $H(\omega_k)$ вычислены с точностью AN^{-r}, убеждаемся, используя результаты исследования сходимости итерационных процессов с неточно заданными параметрами [11], что погрешность непосредственной реализации итераций (9) оценивается величиной $\epsilon_1 = A(N^{-r} + 2^{-n})$, где n — номер итерации, при которой осуществляется выход из цикла (9).

Погрешность восстановления решения $x(t)$ по вычисленным значениям $X_n(\omega_k)$ — это погрешность вычисления обратного преобразования Фурье по квадратурным формулам, использующим вычисленные с точностью ϵ_1 значения функции $X(\omega)$ в узлах ω_k.

Возьмем в качестве узлов ω_k, $k = 1,2,\dots,M$, образы корней полиномов Лежандра степени M при линейном отображении сегмента $[-1,1]$ на $[-D,D]$, где D — достаточно большое число.

Погрешность применения обратного преобразования Фурье при этих условиях оценивается величиной $\epsilon_2 = (AN^{-r} + 2^{-n})\lambda_M + AM^{-r}$, где $\lambda_M = AM^{1/2}$ — константа Лебега для полиномов Лежандра.

Собирая полученные оценки, убеждаемся, что погрешность решения уравнения в свертках по итерационной схеме (9) не превосходит величины $A(N^{-r}M^{1/2} + M^{-r} + 2^{-n}M^{1/2})$, где N, M, n описаны выше.

Замечание. Приведенные выше итерационные схемы применимы к приближенному решению уравнений, у которых известна локализация спектра. В частности, они применимы к дифференциальным уравнениям и к системам линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим несколько модельных примеров, иллюстрирующих эффективность изложенных выше итерационных схем. Прежде всего отметим, что анализ известных итерационных методов показывает, что к предлагаемым уравнениям, которые для краткости обозначим $Kx = f$, применима лишь итерационная схема $x_{n+1} = (1+\alpha)x_n + \beta(K^*Kx_n - K^*f)$, где α и β — константы, $\alpha, \beta > 0$.

Применение этой итерационной схемы требует умножения на сопряженный оператор K^*. Кроме того, введение регуляризующего параметра α вносит погрешность порядка, не меньшего $A\alpha$. Эти обстоятельства делают предлагаемые в работе итерационные схемы более предпочтительными.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\lambda x(t) - \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{14}$$

где $0 \le \lambda \le 1$,

$$g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1; \\ 2-t, & 1 \le t \le 2; \\ 0, & t \notin [0,2], \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda - \beta t^2/2, & 0 \le t \le 1; \\ \beta t^2 - 3\beta t + 1,5\beta, & 0 \le t \le 2; \\ -\beta t^2/2 + 3t\beta - 4,5\beta, & 2 \le t \le 3; \\ 0, & t \notin [0,3]. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что решением этого уравнения будет функция

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1; \\ 0, & t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Преобразование Фурье функции $g(t)$ равно

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\omega}{\omega} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega}(\cos\omega + 1),$$

и, следовательно, функция $\lambda - \beta\sqrt{2\pi}G(\omega)$ при $\lambda > 0$, $\beta > \lambda$ принимает значения во всех четырех октантах, причем при изменении ω в пределах от $-\infty$ до ∞ значение функции $\lambda - \beta\sqrt{2\pi}G(\omega)$ бесконечное число раз пробегает каждый октант. Применение итерационной схемы (7)–(8) к данному примеру требует введения большого числа сегментов Δ_k, что усложняет программу. Поэтому для решения данного уравнения более предпочтительной является итерационная схема (9). Результаты вычислений по итерационной схеме (9) приведены в таблице. Под средней погрешностью здесь понимается

$$\epsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |x^*(t_k) - \tilde{x}(t_k)|,$$

где t_k, $k = 0, 1, \ldots, N$, — узлы дискретизации, $x^*(t)$ — точное решение соответствующего уравнения, $\tilde{x}(t)$ — приближенное решение этого же уравнения, полученное итерационным методом.

Таблица

Уравнение	Итерационная схема	λ	β	Число итераций	Число узлов	Средняя погрешность
14	(9)	0	10	10	60	0,091723
				20	60	0,014428
				50	60	0,008137
		1	20	10	60	0,011856
				20	60	0,009314
				50	60	0,002017
15	(7)–(8)	20		10	120	0,006805
				20	120	0,001732
				50	120	0,000806
		-20		10	120	0,092216
				20	120	0,050987
				50	120	0,001630
15	(9)	20		10	120	0,003471
				20	120	0,000984
				50	120	0,000871
		-20		10	120	0,069211
				20	120	0,041729
				50	120	0,000532

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$x(t) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-s|} x(s) ds = f(t), \quad -\infty < t < \infty, \tag{15}$$

где $f(t) = e^{-|t|} + \lambda f_1(t)$,

$$f_1(t) = \begin{cases} e^t - te^t, & -\infty < t \le 0; \\ e^{-t} + te^{-t}, & 0 \le t < \infty. \end{cases}$$

Уравнение (15) исследовалось в ([1], с. 48–49). Решением уравнения (15) является функция $x(t) = e^{-|t|}$. Преобразование Фурье функции $\lambda e^{-|t|}$ равно [1] $\lambda \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1}{\omega^2+1}$, а преобразование Фурье функции $f(t)$ равно

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega^2 - a^2}{(\omega^2+1)^2},$$

где $a^2 = -1 - 2\lambda$. Следовательно [1], уравнение (15) имеет единственное решение при любом λ.

Пусть вначале $\lambda \in [-1/2, \omega)$. В этом случае функция $H(\omega) = (\omega^2 + 1 + 2\lambda)/(\omega^2 + 1)$ при изменении значений ω в пределах от $-\infty$ до ∞ принимает неотрицательные значения из интервала $(1, 1 + 2\lambda)$.

Применим к решению уравнения (15) при $\lambda = 20$ итерационную схему (7)–(8), где $\gamma = 0,04$. В таблице приведены результаты счета и результаты решения уравнения (15) по итерационной схеме (9).

Пусть теперь $\lambda \in (-\infty, -1/2)$. Тогда функция $H(\omega)$ принимает значения из четырех октантов. Для решения уравнения (15) при $\lambda = -20$ в этом случае применима итерационная схема (7)–(8), где $\Delta_1 = [-20, -\sqrt{39}]$, $\Delta_2 = [-\sqrt{39}, 0]$, $\Delta_3 = [0, \sqrt{39}]$, $\Delta_4 = [\sqrt{39}, 20]$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -0,04$, $\gamma_3 = -0,04$, $\gamma_4 = 1$. В таблице приведены результаты счета и результаты решения уравнения (15) по итерационной схеме (9).

Литература

1. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.* – М.: Наука, 1978. – 296 с.
2. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.* – М.: Наука, 1971. – 352 с.
3. Василенко Г.И. *Теория восстановления сигналов.* – М.: Сов. радио, 1979. – 272 с.
4. Симоненко И.Б. *Краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами* // ДАН СССР. – 1959. – Т. 124. – № 2. – С. 278–281.
5. Обломская Л.Я. *О методах последовательных приближений для линейных уравнений в банаховых пространствах* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1968. – Т.8. – № 2. – С. 417–426.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа.* – М.: Наука, 1965. – 520 с.
7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 744 с.
8. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* – М.–Л.: ГИФМЛ, 1949. – 688 с.
9. Крылов В.И. *Приближенное вычисление интегралов.* – М.: Наука, 1967. – 498 с.
10. Задирака В.К. *Теория вычисления преобразования Фурье.* – Киев: Наукова думка, 1983. – 213 с.
11. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 456 с.

Пензенский государственный
технический университет

Поступила
05.01.1995