Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, №1, с. 31–39 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0004*

В.А. КЛЯЧИН, А.А. ШИРОКИЙ

ТРИАНГУЛЯЦИЯ ДЕЛОНЕ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ЕЕ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА

Аннотация. В статье вводится понятие триангуляции Делоне для поверхностей и доказывается аналог теоремы Г. Вороного о пустоте сферы. Кроме этого, получена теорема о сходимости градиентов кусочно-линейных приближений, построенных на триангуляции Делоне для дифференцируемых функций на гладких поверхностях.

Ключевые слова: симплекс, триангуляция, аппроксимация градиента.

УДК: 517.518 : 517.27

Abstract. We define the Delaunay triangulation for surfaces and prove an analog of the G. Voronoi empty sphere theorem. We also prove the convergence theorem for gradients of piecewise linear approximations constructed on the Delaunay triangulation for functions differentiable on smooth surfaces.

Keywords: simplex, triangulation, approximation of gradient.

1. Введение

Применение триангуляции в вычислительных задачах и задачах аппроксимации весьма широко распространено. Некоторые применения и результаты можно найти в [1]–[6], а также в цитируемой там литературе. Наиболее часто встречается применение триангуляции Делоне, поскольку получающиеся треугольники в каком-то смысле стремятся к равносторонним [5]. Показательным в этом плане можно считать классический пример Шварца ([7], с. 191) о кусочно-линейном приближении боковой поверхности прямого кругового цилиндра. В этом примере показано, что площади указанных приближений стремятся к площади цилиндра, если выполнено определенное условие на взаимное расположение выбираемых точек на цилиндре. Однако по нашему мнению, ключевую роль здесь играет не это условие, а каким образом производится триангуляция боковой поверхности цилиндра. Именно, из результатов настоящей статьи будет следовать, что нужная сходимость площадей будет иметь место, если производится не произвольная триангуляция и не та, которая участвует в указанном примере, а триангуляция Делоне поверхности. Более того, результаты статьи носят количественный характер — указаны все необходимые погрешности аппроксимаций. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область. Для функций класса $C^1(D)$ через $\overline{\nabla} f(x)$ будем обозначать вектор градиента в точке $x \in D$ и для всякого вектора ξ через $\frac{\partial f}{\partial \xi} = \langle \overline{\nabla} f(x), \xi \rangle$ — производную по направлению вектора ξ.

Поступила 23.12.2010

Если имеется набор точек $p_0, p_1, \ldots, p_k$, $1 \le k \le n$, в $\mathbb{R}^n$, то через $S = S(p_0, \ldots, p_k)$ обозначим k-мерный симплекс с вершинами в этих точках. Будем предполагать, что векторы $p_1 - p_0, p_2 - p_0, \ldots, p_k - p_0$ линейно независимы. Если из этого набора точек убрать точку p_i, $i = 0, \ldots, k$, то можно построить $(k-1)$-мерный симплекс, который обозначим через S_i. Этот симплекс является $(k-1)$-мерной гранью симплекса $S(p_0, \ldots, p_k)$. Обозначим через η_i единичный вектор внешней нормали к грани S_i, лежащий в плоскости симплекса $S(p_0, \ldots, p_k)$.

По отношению к симплексу S произвольный вектор $X \in \mathbb{R}^n$ может быть разложен в сумму $X = X^N + X^T$, где X^T — ортогональная проекция вектора X на плоскость симплекса S, а X^N — его ортогональное дополнение. Введем также отображение проекции на плоскость i-й грани симплекса, полагая $\pi_i(X) = X^T - \langle X, \eta_i \rangle \eta_i$.

Пусть теперь симплекс $S \subset D$. Для $f \in C^1(D)$ построим аффинную функцию $L_f(x) = \langle A, x\rangle + a_0$ такую, что $f(p_i) = L_f(p_i)$, $i = 0, \ldots, k$, и $A^N = 0$.

Несложно проверяется

Лемма 1. *Указанная аффинная функция существует и однозначно определена.*

Для $f \in C^1(D)$ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\omega_{ij} = \overline{\nabla} f(p_i) - \overline{\nabla} f(p_j),\\
&\beta_{ij} = \frac{|f(p_i) - f(p_j) - \langle \overline{\nabla} f(p_j), p_i - p_j\rangle|}{|p_i - p_j|},\\
&\gamma_{ij} = f(p_i) - f(p_j) - \langle \overline{\nabla} f(p_j), p_i - p_j\rangle, \quad i, j = 0, \ldots, k.
\end{aligned}$$

Лемма 2. *Для произвольного вектора $Y \in \mathbb{R}^n$ и пары индексов $i \ne m$, $i, m = 0, \ldots, k$, имеет место неравенство*

$$|\langle Y, \eta_i\rangle| \le \frac{|p_i - p_m|}{|\langle \eta_i, p_i - p_m\rangle|}\left(\frac{|\langle Y, p_i - p_m\rangle|}{|p_i - p_m|} + |\pi_i(Y)|\right). \tag{1}$$

Доказательство. Поскольку $Y = Y^N + Y^T$, то учитывая, что $Y^T = \pi_i(Y) + \langle Y, \eta_i\rangle\eta_i$, будем иметь $\langle Y, p_i - p_m\rangle = \langle Y, \eta_i\rangle\langle \eta_i, p_i - p_m\rangle + \langle \pi_i(Y), p_i - p_m\rangle$. Поэтому (1) выполнено. □

Теорема 1. *Если симплекс $S(p_0, p_1, \ldots, p_k) \subset D$, $k > 1$ и функция $f(x)$ дифференцируема в вершинах этого симплекса, то для любого номера $i = 0, \ldots, k$ и любой пары номеров $j, m = 0, \ldots, k$, отличных от i, имеет место неравенство*

$$\left|\frac{\partial f(p_m)}{\partial \eta_i} - \frac{\partial L_f(p_m)}{\partial \eta_i}\right| \le \frac{1}{\sin\theta_{im}}\left(\beta_{im} + |\pi_i(\omega_{jm})| + |\pi_i(\overline{\nabla} f(p_j) - \overline{\nabla} L_f(p_j))|\right),$$

где θ_{im} — угол между вектором $p_i - p_m$ и плоскостью грани S_i. Если $k = 1$, то

$$\left|\frac{\partial f(p_0)}{\partial \eta} - \frac{\partial L_f(p_0)}{\partial \eta}\right| \le \beta_{10},$$

где $\eta = (p_1 - p_0)/|p_1 - p_0|$.

Доказательство. В лемме 2 положим $Y = \overline{\nabla} f(p_m) - \overline{\nabla} L_f(p_m)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial f(p_m)}{\partial \eta_i} - \frac{\partial L_f(p_m)}{\partial \eta_i}\right| \le\\
&\qquad \le \frac{|p_i - p_m|}{|\langle p_i - p_m, \eta_i\rangle|}\left(\frac{|\langle \overline{\nabla} L_f(p_m) - \overline{\nabla} f(p_m), p_i - p_m\rangle|}{|p_i - p_m|} + |\pi_i(\overline{\nabla} f(p_m) - \overline{\nabla} L_f(p_m))|\right).
\end{aligned}$$

Замечая, что

$$\frac{|p_i - p_m|}{|\langle p_i - p_m, \eta_i\rangle|} = \frac{1}{\sin\theta_{im}}, \quad \frac{|\langle \overline{\nabla} L_f(p_m) - \overline{\nabla} f(p_m), p_i - p_m\rangle|}{|p_i - p_m|} = \beta_{im},$$

и

$$|\pi_i(\overline{\nabla} f(p_m) - \overline{\nabla} L_f(p_m))| \le |\pi_i(\overline{\nabla} f(p_m) - \overline{\nabla} f(p_j))| + |\pi_i(\overline{\nabla} f(p_j) - \overline{\nabla} L_f(p_j))| = \\ = |\pi_i(\omega_{jm})| + |\pi_i(\overline{\nabla} f(p_j) - \overline{\nabla} L_f(p_j))|,$$

получаем требуемое. В случае $k = 1$ требуемое неравенство следует непосредственно из определения величины β_{10} и построения функции $L_f(x)$. □

Лемма 3. *Пусть* Π *— некоторая* k*-мерная плоскость, образующая с плоскостью симплекса угол* $0 \le \alpha < \pi$*. Обозначим через* $(v)^{\Pi}$ *ортогональную проекцию вектора* v *на эту плоскость, а через* $(v)^{\perp}$ *— соответствующее ортогональное дополнение. Тогда имеет место неравенство*

$$|(\overline{\nabla} f(p_m) - \overline{\nabla} L_f(p_m))^{\Pi}| \le |(\overline{\nabla} f(p_m) - \overline{\nabla} L_f(p_m))^T| + |\overline{\nabla} f(p_m)| \sin\alpha.$$

Доказательство. Поскольку угол между плоскостями равен углу между их ортогональными дополнениями, то для всякого вектора Y выполнено неравенство $|(Y^N)^{\perp}| \ge \cos\alpha |Y^N|$, откуда $|(Y^N)^{\Pi}| \le \sin\alpha|Y^N| \le \sin\alpha|Y|$. Учитывая, что $|Y^{\Pi}| \le |(Y^N)^{\Pi}| + |(Y^T)^{\Pi}|$, получаем $|Y^{\Pi}| \le |Y^T| + \sin\alpha|Y|$. Полагая $Y = \overline{\nabla} f(p_m) - \overline{\nabla} L_f(p_m)$ и используя тот факт, что по построению $[\overline{\nabla} L_f(p_m)]^N = 0$, получаем требуемое. □

Замечание 1. Если в качестве Π выбрать плоскость, касательную к некоторой гладкой поверхности в точке p_m, то доказанное неравенство вместе с результатом теоремы 1 позволяет получить оценку погрешности вычисления градиента функции в метрике этой поверхности.

Лемма 4. *Пусть функция* $f \in C^1(D)$ *и функция* $\omega(t)$ *является модулем непрерывности ее градиента, т. е. для всякой пары точек* $x', x'' \in D$ *выполнено неравенство*

$$|\overline{\nabla} f(x') - \overline{\nabla} f(x'')| \le \omega(|x' - x''|).$$

Тогда

$$|\omega_{ij}| \le \omega(|p_i - p_j|),$$

$$\beta_{ij} \le \frac{1}{|p_i - p_j|} \int_0^{|p_i - p_j|} \omega(t)dt.$$

Доказательство. Первое неравенство очевидно. Второе получается, если вдоль отрезка, соединяющего точки p_i и p_j, проинтегрировать равенство $\overline{\nabla} f(x) = \overline{\nabla} f(p_j) + H(x, p_j)$, где по условию леммы $|H(x, p_j)| \le \omega(|x - p_j|)$.

Принимая терминологию теоремы 1, заметим, что

$$|\left(\overline{\nabla} f(p_m) - \overline{\nabla} L_f(p_m)\right)^T| \le \left|\frac{\partial f(p_m)}{\partial \eta_i} - \frac{\partial L_f(p_m)}{\partial \eta_i}\right| + |\pi_i(\overline{\nabla} f(p_m) - \overline{\nabla} L_f(p_m))|.$$

Получим оценку

$$|(\overline{\nabla} f(p_m) - \overline{\nabla} L_f(p_m))^T| \le \frac{1}{\sin\theta_{im}}\left(\frac{1}{|p_i - p_m|}\int_0^{|p_i - p_m|} \omega(t)dt\right) + \\ + \left(\frac{1}{\sin\theta_{im}}(1 + \sin\theta_{im})(\omega(|p_m - p_j|) + |\pi_i(\overline{\nabla} f(p_j) - \overline{\nabla} L_f(p_j))|)\right). \quad (2)$$

Ниже приводятся следствия теоремы 1, которые непосредственно получаются из оценки (2) с применением лемм 3 и 4.

Следствие 1. Пусть $k = 2$. Тогда если $m = 0$, $i = 1$, $j = 2$, а φ_S, d_S обозначают величину угла при вершине p_0 и длину максимальной стороны треугольника S, то имеет место оценка

$$|(\overline{\nabla} f(p_0) - \overline{\nabla} L_f(p_0))^T| \leq \frac{1}{\sin\varphi_S}\left(\frac{3}{d_S}\int_0^{d_S}\omega(t)dt + 2\omega(d_S)\right).$$

Следствие 2. Пусть $k = 2$ и вершины треугольника S лежат на двумерной гладкой поверхности $F \subset D \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что угол между плоскостью этого треугольника и касательной плоскостью к поверхности в точке p_0 равен α, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Если функция $f \in C^1(D)$, то

$$|\nabla f(p_0) - \nabla L_f(p_0)| \leq \frac{1}{\sin\varphi_S}\left(\frac{3}{d_S}\int_0^{d_S}\omega(t)dt + 2\omega(d_S)\right) + \sin\alpha \sup_{x\in D}|\overline{\nabla} f(x)|.$$

Здесь ∇ обозначает градиент дифференцируемой функции в метрике поверхности F.

Следствие 3. Пусть $k = 3$ и $m = 0$, $i = 2$, $j = 1$. Обозначим через θ_S величину угла между вектором $p_2 - p_0$ и двумерной гранью, лежащей напротив вершины p_2, через φ_S — величину угла при вершине p_1 треугольника $p_0p_1p_3$ и через d_S — длину максимального ребра симплекса S. Тогда имеет место оценка

$$|\left(\overline{\nabla} f(p_0) - \overline{\nabla} L_f(p_0)\right)^T| \leq \frac{8}{\sin\varphi_S \sin\theta_S}\left(\frac{1}{d_S}\int_0^{d_S}\omega(t)dt + \omega(d_S)\right).$$

Следствие 4. Пусть $k = 3$ и вершины тетраэдра S лежат на трехмерной гладкой поверхности $F \subset D \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что угол между плоскостью тетраэдра и касательной плоскостью к поверхности в точке p_0 равен α, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Если функция $f \in C^1(D)$, то

$$|\nabla f(p_0) - \nabla L_f(p_0)| \leq \frac{8}{\sin\varphi_S \sin\theta_S}\left(\frac{1}{d_S}\int_0^{d_S}\omega(t)dt + \omega(d_S)\right) + \sin\alpha \sup_{x\in D}|\overline{\nabla} f(x)|.$$

Здесь ∇, как и выше, обозначает градиент дифференцируемой функции в метрике поверхности F.

Отметим, что аналогичные методы были применены в [8] для определения условий C^1-сходимости кусочно-линейных аппроксимаций поверхностей уровня гладких функций.

2. Триангуляция Делоне графика гладкой функции

Рассмотрим некоторую n-мерную поверхность F в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, заданную графиком функции $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Определим отображение проекции

$$\pi : F \to D, \quad \pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n).$$

Пусть P_i, $i = 1, \dots, N$, — некоторый набор точек $P_i \in \mathbb{R}^{n+1}$, лежащих на поверхности F и таких, что любой n-мерный симплекс в вершинах из этого набора является невырожденным. Обозначим через $P_i' = \pi(P_i)$ проекцию точки P_i в область D. Будем рассматривать триангуляцию поверхности F n-мерными симплексами с вершинами из множества P_i. Триангуляцией поверхности называем такой набор T n-мерных симплексов, что

1) каждая точка P_i заданного набора является вершиной одного из симплексов $S \in T$;

2) каждая вершина любого симплекса $S \in T$ является одной из точек P_i, $i = 1, \dots, N$;

3) внутренность пересечения любых двух симплексов пуста;

4) проекция системы симплексов $S_j \in T$, $j = 1, \dots, m$, является обычной триангуляцией набора точек P_i' в $\mathbb{R}^n$.

Триангуляцию будем называть остроугольной, если для каждого симплекса его углы между двумя любыми гранями острые.

Определение 1. Пусть S — некоторый n-мерный симплекс в $\mathbb{R}^{n+1}$. Описанным шаром $B(S)$ для S назовем $(n+1)$-мерный шар, содержащий вершины симплекса и имеющий наименьшее возможное значение радиуса.

Определение 2. Будем говорить, что триангуляция поверхности F удовлетворяет условию Делоне, если для любого симплекса триангуляции описанный шар не содержит внутри себя ни одной вершины триангуляции.

Определение 3. Будем говорить, что для двух n-мерных симплексов, пересекающихся по общей $(n-1)$-мерной грани выполнено условие пустоты шара, если описанный шар одного симплекса не содержит внутри себя вершин другого симплекса.

С точки зрения построения оптимальных алгоритмов триангуляции поверхностей, а так же задачи аппроксимации градиента в метрике поверхности, важным свойством триангуляции Делоне является свойство, утверждающее, что выполнение условия Делоне локально непременно влечет выполнение его глобально ([9]–[11]). Следующая теорема обобщает это свойство на случай триангуляции гладких поверхностей, заданных графиком функции. Но в отличие от плоского случая необходимо выполнение дополнительного условия. Соответствующий пример приведен ниже.

Условие α. Рассмотрим произвольный $(n-1)$-мерный симплекс S триангуляции и построим пересечение U_S всех полупространств, содержащих S, которые определяются гиперплоскостями $(n-1)$-мерных сфер, являющихся пересечениями описанной сферы симплекса S и его соседнего. Таких полупространств будет не более n для каждого симплекса S. Предполагаем, что никакая вершина триангуляции не принадлежит внутренности U_S для всякого S.

Заметим, что в плоском случае, когда вершины триангуляции лежат в одной гиперплоскости, условие α очевидно выполняется.

Теорема 2. *Пусть поверхность F задана над выпуклой областью $D \subset \mathbb{R}^n$. Триангуляция этой поверхности, для которой выполнено условие α и любая пара симплексов, пересекающихся по общей $(n-1)$-мерной грани, удовлетворяет условию пустоты шара, является триангуляцией Делоне.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую триангуляцию множества точек P_i, обладающую свойствами, указанными в теореме. Для двух соседних симплексов S', S'' данной триангуляции построим гиперплоскость Π, проходящую через пересечение гиперсфер $\partial B(S') \cap \partial B(S'')$. Рассмотрим произвольный симплекс S_1 заданной триангуляции и некоторую вершину A произвольного симплекса триангуляции, отличного от S_1. Построим луч A_1A, где $A_1 \in S_1$ — какая-либо внутренняя точка симплекса S_1. Предположим, что утверждение теоремы не верно, т. е. $A \in B(S)$. В силу условия α $A \notin U_{S_1}$, поэтому луч A_1A в первую очередь пересечет одну из построенных выше плоскостей Π, проходящую через какую-то грань симплекса S_1. Обозначим эту плоскость через Π_1. Она также содержит одну из граней соседнего симплекса S_2. Обозначим через Π_1^-, Π_1^+ полупространства, определяемые гиперплоскостью Π_1, причем $A_1 \in \Pi_1^-$. Тогда, очевидно, $A \in \Pi_1^+$. Заметим, что в силу свойств шаров будет иметь место одно из следующих включений:

$$B(S_1) \cap \Pi_1^+ \subset B(S_2) \cap \Pi_1^+$$

или

$$B(S_2) \cap \Pi_1^+ \subset B(S_1) \cap \Pi_1^+.$$

Пусть C — вершина симплекса S_2, не принадлежащая плоскости Π_1. По предположению пустоты шара для пары симплексов S_1 и S_2 имеем $C \notin B(S_1)$, но, с другой стороны,

$C \in B(S_2) \cap \Pi_1^+$. Таким образом, имеет место включение $B(S_1) \cap \Pi_1^+ \subset B(S_2) \cap \Pi_1^+$, поскольку в противном случае получим противоречие: $C \in B(S_2) \cap \Pi_1^+ \subset B(S_1) \cap \Pi_1^+ \subset B(S_1)$. В силу указанного включения имеем $A \in B(S_2)$. Теперь построим последовательность симплексов $S_1, S_2, \ldots, S_k$ такую, что A является вершиной симплекса A_k. При этом симплексы S_i и S_{i+1} будут соседними и пусть Π_i — гиперплоскость, содержащая $(n-1)$-мерную сферу $\partial B(S_i) \cap \partial B(S_{i+1})$. Для этого построим двумерную вертикальную плоскость, проходящую через луч $A_1 A$. В результате получится ломаная, соединяющая точки A_1 и A, отрезки которой будут лежать в соответствующих симплексах $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Отрезок этой ломаной, лежащий в S_2, пересекает $(n-1)$-мерную грань, общую для симплексов S_1 и S_2, и некоторую другую грань S_2, общую с симплексом S_3. В силу условия α на этом отрезке найдется точка A_2, для которой луч $A_2 A$ пересекает плоскость Π_2. Повторяя рассуждения, построим последовательность симплексов S_i, гиперплоскостей Π_i и точек A_i таких, что

$$A_i \in S_i, \quad S_i \subset \Pi_i^-, \quad S_{i+1} \subset \Pi_i^+, \quad A \in B(S_i).$$

По построению $A \in B(S_{k-1})$, что противоречит условию пустоты шара для пары симплексов S_{k-1} и S_k. Таким образом, $A \notin B(S_1)$. В силу произвольности S_1 и A теорема доказана. $\square$

Пример. Следует отметить необходимость условия α. Следующий пример был предоставлен доцентом В.В. Поповым.

В $\mathbb{R}^3$ существуют точки $A(104,0,0)$, $B(134,40,120)$, $C(0,78,0)$, $D(0,0,0)$, $E(52,-20,48)$, со следующими свойствами:

a) шар, описанный около треугольника ABC, не содержит точки D, но содержит точку E;

b) шар, описанный около треугольника ACD, не содержит точек B и E;

c) шар, описанный около треугольника ADE, не содержит точек C и B.

Пусть F — поверхность, составленная из упомянутых треугольников. Эти треугольники образуют такую триангуляцию F, что любые два соседних симплекса (т. е. пересекающихся по стороне) удовлетворяют условию пустоты шара, а условие Делоне не выполнено. С другой стороны, заметим, что плоскость, проходящая через пересечение сфер шаров, описанных около треугольников ABC и ACD, задается уравнением $3x + 4y + 12z = 312$. Тогда множество U_S для $S = ABC$ представляет собой полупространство $3x + 4y + 12z > 312$. Непосредственно проверяется, что $E \in U_S$, а значит, условие α не выполнено.

3. Аппроксимационные свойства триангуляции Делоне

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$, — область, в которой задана последовательность $\{P_m\}$ конечных наборов точек. Для каждого такого набора рассмотрим его триангуляцию T_m.

Триангуляцию будем называть *остроугольной*, если для каждого симплекса его углы между двумя любыми гранями острые.

Триангуляция набора точек называется *триангуляцией Делоне*, если описанная сфера всякого симплекса триангуляции не содержит внутри себя каких-либо точек из этого набора.

Для всякого симплекса $S \in T_m$ определим величину максимальной его стороны d_S. Положим

$$d_m = \max_{S \in T_m} d_S.$$

Будем рассматривать такие наборы точек P_m и их триангуляции T_m, для которых выполнены условия

$$d_m \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty, \tag{3}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in D \quad \exists m_0 \in \mathbf{N} : \forall m > m_0 \quad \exists a \in P_m : |a - x| < \varepsilon. \tag{4}$$

Второе условие означает, что P_m является ε-сетью при всех достаточно больших m. Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, $x \in D$, класса $C^1(D)$. Для всякого натурального m

построим кусочно-аффинную функцию $f_m(x)$ такую, что

$$f_m(a) = f(a) \text{ для любой точки } a \in P_m.$$

Несложно показать, что при выполнении условий (3) и (4) последовательность $f_m(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на каждом компактном подмножестве $K \subset D$. Но эти условия не обеспечивают сходимости производных функций $f_m(x)$ к производным функции $f(x)$ даже почти всюду или в пространствах Соболева $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$. Это подтверждается хорошо известным примером Шварца ([7], с. 191).

Ниже предполагаем, что функция $f : D \to \mathbb{R}$ является C^2-гладкой в области $D \subset \mathbb{R}^n$, причем будем считать, что все вторые производные ограничены в D. Тогда найдется постоянная $M > 0$ такая, что модуль непрерывности градиента $\omega(t) \le M \cdot t$.

Наша цель показать, что триангуляция Делоне и близкие к ней обладают тем не менее указанным выше аппроксимационным свойством в определенном смысле. Начнем с двумерного случая.

Для произвольного треугольника S с вершинами p_0, p_1, p_2 введем величину $\mu_S = \frac{d_S}{\sin\varphi_S}$, где φ_S — величина максимального острого угла треугольника.

Лемма 5. *Если R_S обозначает радиус описанной окружности треугольника S, то справедливо неравенство $\mu_S \le 4R_S$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1) Треугольник остроугольный. Тогда φ_S — угол, расположенный напротив самой длинной стороны d_S. Согласно теореме синусов $\frac{d_S}{\sin\varphi_S} = 2R_S$.

2) Треугольник тупоугольный. Обозначим через φ_d угол, находящийся напротив самой длинной стороны. Очевидно, что $\varphi_d \ge \pi/2$ и $\varphi_d + 2\varphi_S \ge \pi$, откуда $|\sin\varphi_d| \le |\sin 2\varphi_S|$.

Значит,

$$\frac{d_S}{\sin\varphi_S} = \frac{2d_S\cos\varphi_S}{\sin 2\varphi_S} \le \frac{2d_S}{\sin\varphi_d} = 4R_S. \qquad \square$$

Теорема 3. *Пусть задана триангуляция Делоне T конечного набора точек, являющегося ε-сетью в плоской области $D \subset \mathbb{R}^2$. Пусть точка p является вершиной триангуляции T такой, что для некоторого треугольника из T, имеющего вершиной эту точку, центр описанного круга лежит в области D. Тогда*

$$|\overline{\nabla} f(p) - \overline{\nabla} L_f(p)| \le 14M\varepsilon.$$

Доказательство. Заметим, что если выполнены условия теоремы, то радиус описанной окружности рассматриваемого треугольника не превосходит ε. Действительно, если это не так, т. е. радиус описанной окружности будет больше ε, то в силу (4) найдется вершина p' триангуляции, отличная от вершин этого треугольника, с расстоянием от центра его описанной окружности не большим ε. Но это противоречит определению триангуляции Делоне. Таким образом, учитывая неравенство из следствия 1, в котором $\omega(t) \le M \cdot t$, получаем требуемое. $\square$

Замечание 2. Отметим, что в [6] было показано, что оценка погрешности в терминах радиуса описанной окружности имеет место хотя бы для одной C^2-гладкой функции, т. е. является нижней оценкой. Таким образом, из теоремы 3 следует, что эта оценка является и верхней оценкой погрешности, а значит, асимптотически точной. Наличие такой оценки позволяет применять триангуляцию Делоне с целью аппроксимации производных. Следует также отметить работу [12], в которой предложен метод аппроксимации дискретной кривизны поверхностей, основанный на локально полярных многогранных поверхностях.

Для исследования случая триангуляции областей $D \subset \mathbb{R}^3$ понадобится

Лемма 6. *Пусть заданы числа* $0 < \lambda_i \le \pi/2 + \delta$, $i = 1,2,3$, *где* $0 \le \delta \le \pi/2$. *Если* $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ge \pi$, *то хотя бы два из этих чисел не меньше, чем* $\lambda_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. некоторые из двух данных чисел меньше, чем λ_0. Тогда для их суммы имеем

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i < 2\lambda_0 + \frac{\pi}{2} + \delta = \pi,$$

что противоречит условию леммы. □

Полагая $\delta = 0$ и учитывая, что сумма углов плоского и сферического треугольников не меньше π, получаем

Следствие 5. Для остроугольного тетраэдра справедливы утверждения
1) в любой вершине найдутся два двугранных угла, не меньших $\pi/4$;
2) на любой грани найдутся два плоских угла, не меньших $\pi/4$.

Рассмотрим некоторый остроугольный тетраэдр с вершинами в точках $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^3$. В силу этого следствия найдется вершина, например p_0, у которой имеется плоский угол не меньше $\pi/4$. Очевидно, что сумма двух других плоских углов при этой вершине не меньше, чем этот угол. Поэтому один из них не меньше чем $\pi/8$. Найденные углы обозначим через $\psi_1, \psi_2 \ge \pi/8$. Кроме того, заметим, что так же найдутся два двугранных угла при этой же вершине, значения которых не меньше $\pi/4$. Обозначим их через $\delta_1, \delta_2 \ge \pi/4$. Из этих рассуждений ясно, что найдется вершина, например p_1, такая, что одна из граней $p_0p_1p_2$ или $p_0p_1p_3$ имеет угол с гранью $p_0p_2p_3$, равный одному из δ_1 или δ_2, а также имеет плоский угол, равный одному из ψ_1 или ψ_2. Тогда, если θ — угол между вектором $p_1 - p_0$ и плоскостью грани $p_0p_2p_3$, то из соображений элементарной геометрии имеет место равенство $\sin\theta = \sin\delta_i \sin\psi_j \ge \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{8}$ с некоторыми $i, j = 0, 1$. На грани $p_0p_2p_3$ найдется один из плоских углов φ, который не меньше $\pi/4$. Поэтому в следствии 3 множитель можем оценить величиной

$$\frac{8}{\sin\varphi_S \sin\theta_S} \le \frac{16}{\sin\frac{\pi}{8}}.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Пусть задана остроугольная триангуляция* T *конечного набора точек, являющегося* ε*-сетью в области* $D \subset \mathbb{R}^3$. *Пусть точка* p *является вершиной триангуляции* T. *Тогда*

$$|\overline{\nabla} f(p) - \overline{\nabla} L_f(p)| \le \frac{24M}{\sin\frac{\pi}{8}}\varepsilon.$$

Авторы выражают искреннюю благодарность В.В. Попову за критическое внимание к работе и ценные замечания.

Литература

[1] Боровиков С.Н., Иванов И.Э., Крюков И.А. *Моделирование пространственных течений идеального газа с использованием тетраэдральных сеток*, Матем. моделир. **18** (8), 37–48 (2006).
[2] Korotov S. *Some geometric results for tetrahedral finite elements*. Proc. Numgrid2010. 2010. M.: Folium (2010), 41–46.
[3] Пушкина И.Г., Тишкин В.Ф. *Адаптивные расчетные сетки из ячеек Дирихле для решения задач математической физики: Методика построения, примеры*, Матем. моделир. **12** (3), 97–109 (2000).
[4] Rajan V.T. *Optimality of the Delaunay triangulation in* $\mathbb{R}^d$, Discrete Comput. Geom. **12** (2), 189–202 (1994).
[5] Waldron S. *The error in linear interpolation at the vertices of a simplex*, SIAM J. Numer. Anal. **35** (3), 1191–1200 (1998).

[6] Shewchuck J. *What is a good linear element*? Interpolation, conditioning, and quality measures, Proc. Intern. Meshing Roundtable (Ithaca, New York, 2002), p. 115–126.

[7] Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе* (Изд-во ПЛАТОН, Волгоград, 1997).

[8] Клячин В.А., Пабат Е.А. *C^1-аппроксимация поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках*, Сиб. журн. инд. матем. **XIII** (2), 69–78 (2010).

[9] Делоне Б.П. *О пустой сфере. К мемуару Георгия Вороного*, Перевод с фр. А.Ю. Игумнов. Сб. Зап. семин. “Сверхмедленные процессы”. Волгоград, Изд-во ВолГУ, Вып. 1, 147–153 (2006).

[10] Клячин В.А. *Об одном обобщении условия Делоне*, Вестн. Томск. ун-та, Матем. и мех., № 1, 48–50 (2008).

[11] Edelsbrunner H. *An acyclicity theorem for cell complexes in d dimensions*, Combinatorica **10** (3), 251–260 (1990).

[12] Garanzha V.A. *Discrete extrinsic curvatures and approximation of surfaces by polar polyhedra*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **50** (1), 71–98 (2010).

В.А. Клячин

доцент, заведующий кафедрой компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет,
Университетский пр-т, д. 100, г. Волгоград, 400062,

`e-mail:` klchnv@mail.ru

А.А. Широкий

аспирант, кафедра компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет,
Университетский пр-т, д. 100, г. Волгоград, 400062,

`e-mail:` mhwide@hotmail.com

V.A. Klyachin

Associate Professor, Head of the Chair of Computer Science and Experimental Mathematics,
Volgograd State University,
100 Universitetskii Ave., Volgograd, 400062 Russia,

`e-mail:` klchnv@mail.ru

A.A. Shirokii

Postgraduate, Chair of Computer Science and Experimental Mathematics,
Volgograd State University,
100 Universitetskii Ave., Volgograd, 400062 Russia,

`e-mail:` mhwide@hotmail.com