ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 4 (479)

УДК 517.546

Л.А. АКСЕНТЬЕВ

ЛОКАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ВНУТРЕННЕГО КОНФОРМНОГО РАДИУСА ДЛЯ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Внутренний конформный радиус $R(\mathcal{D},b)$ односвязной области $\mathcal{D}$ на комплексной плоскости z в точке $b\in\mathcal{D}$ представляет собой радиус круга, который конформно эквивалентен области $\mathcal{D}$ с усилением нормировки в теореме Римана. Именно, обозначив отображающую функцию через $\zeta=\mathcal{F}_R(z)$, будем иметь

$$\mathcal{F}_R(b)=0,\quad \mathcal{F}'_R(b)=1;\quad R(\mathcal{D},b)=|\mathcal{F}_R(t)|,\quad t\in\partial\mathcal{D}.$$

При отображении $\zeta=\mathcal{F}(z)$ на единичный круг $E=\{\zeta:|\zeta|<1\}$ с обычной нормировкой $\mathcal{F}(b)=0$, $\arg\mathcal{F}'(b)=\beta$ можно записать $R(\mathcal{D},b)=1/|\mathcal{F}'(b)|$, т.к. $\mathcal{F}_R(z)=\mathcal{F}(z)/\mathcal{F}'(b)$, и поэтому $|\mathcal{F}_R(t)|=|\mathcal{F}(t)/\mathcal{F}'(b)|=1/|\mathcal{F}'(b)|$ при $t\in\partial\mathcal{D}$. Через обратную функцию

$$z=\mathcal{F}^{-1}(\zeta)=f\left(\frac{\zeta+a}{1+\overline{a}\zeta}\right),$$

отображающую круг E на область $\mathcal{D}$ так, что $0\mapsto a\mapsto f(a)=b$, получим

$$R(\mathcal{D},b)=|\mathcal{F}'(b)|^{-1}=|(\mathcal{F}^{-1})'(0)|=|f'(a)|(1-|a|^2)=R(f(E),f(a));\quad b=f(a),\quad \mathcal{D}=f(E).$$

В статье изучено локальное поведение поверхности внутреннего конформного радиуса над кругом и над областью $\mathcal{D}$ и сделаны выводы о структуре поверхности конформного радиуса $R(\mathcal{D},b)$ и поверхности для плотности гиперболической метрики $\lambda(\mathcal{D},b)=1/R(\mathcal{D},b)$ в некоторых подклассах областей $\mathcal{D}$. Теоремы 1–3 дополняют известные эффектные результаты из [1], [2], [3] о глобальной структуре поверхности конформного радиуса, существо которых состоит в следующих характеризациях:

1°. $\omega=R(\mathcal{D},z)$ — уравнение выпуклой вверх поверхности ($\infty\notin\mathcal{D}$) $\Leftrightarrow$ $\mathcal{D}$ — выпуклая область;

2°. $\omega=R(\mathcal{D},z)$ — уравнение выпуклой вниз поверхности ($\infty\in\mathcal{D}$) $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\mathcal{D}}$ — выпуклая область.

Из несколько измененного обоснования характеризации 1° из [2] выделена в теореме 4 эквивалентность трех соотношений:

$$\operatorname{Re}\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\geq-1,\quad \zeta\in E; \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{2}(1-|\zeta|^2)^2|\{f(\zeta),\zeta\}|\leq 1-\frac{1}{4}\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2)-2\overline{\zeta}\right|^2,\quad \zeta\in E; \tag{1.2}$$

поверхность с уравнением $\omega=R(f(E),z)$ *выпукла вверх.* (1.3)

Выпуклость вверх поверхности конформного радиуса $\omega=R(f(E),f(\zeta))$ над кругом E приводит к выпуклости области $\mathcal{D}=f(E)$ (теорема 5), хотя обратное утверждение неверно.

1. В [4] обосновано локальное поведение конформного радиуса односвязной области $f(E)$ над кругом E. Именно,

$$R(\mathcal{D},z)=R(f(E),f(\zeta))\stackrel{\text{def}}{=}R_1(\zeta)=R_1(a+\rho e^{i\theta})=R_1(a)(1+b_1\rho+b_2\rho^2+O(\rho^3)),\tag{2}$$

где

$$b_1=\operatorname{Re}B_1,\quad B_1=\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}-\frac{2\overline{a}}{1-|a|^2}\right)e^{i\theta},\tag{3}$$

$$b_2=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\left[\frac{f'''(a)}{f'(a)}-\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}\right)^2\right]e^{i2\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\right]^2-\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\frac{2\operatorname{Re}(\overline{a}e^{i\theta})}{1-|a|^2}-\frac{1}{1-|a|^2}.\tag{4}$$

К разложению (2) можно придти с помощью представления в круге E

$$R_1(\zeta)=R_1(a+\rho e^{i\theta})=R_1(a)+\left(\frac{\partial R_1}{\partial\zeta}e^{i\theta}+\frac{\partial R_1}{\partial\overline{\zeta}}e^{-i\theta}\right)\bigg|_{\zeta=a}\rho+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2R_1}{\partial\zeta^2}e^{i2\theta}+2\frac{\partial^2R_1}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}+\frac{\partial^2R_1}{\partial\overline{\zeta}^2}e^{-i2\theta}\right)\bigg|_{\zeta=a}\rho^2+$$

$$+O(\rho^3)=R_1(a)+2\operatorname{Re}\left(\frac{\partial R_1}{\partial\zeta}(a)e^{i\theta}\right)\rho+\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2R_1}{\partial\zeta^2}(a)e^{i2\theta}\right)+\frac{\partial^2R_1}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}(a)\right]\rho^2+O(\rho^3).\tag{2$'$}$$

Из разложения (2) легко получим представление для конформного радиуса в степени (-1), т. е.

$$\frac{1}{R_1(a+\rho e^{i\theta})}=\frac{1}{R_1(a)}(1-b_1\rho+(b_1^2-b_2)\rho^2+O(\rho^3))\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{R_1(a)}(1+d_1\rho+d_2\rho^2+O(\rho^3)).\tag{5}$$

Преобразуем выражение для коэффициента d_2 при ρ^2 в разложении (5). Будем иметь, введя в это выражение шварциан $\{f,a\}=\frac{f'''(a)}{f'(a)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}\right)^2$,

$$d_2=-b_2+b_1^2\stackrel{(3),(4)}{=}-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\left(\frac{f'''(a)}{f'(a)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}\right)^2\right)e^{i2\theta}\right]-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\left[\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}\right)^2e^{i2\theta}\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\right]^2+\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\frac{2\operatorname{Re}(\overline{a}e^{i\theta})}{1-|a|^2}+\frac{1}{1-|a|^2}+\left[\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\right]^2-$$

$$-2\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\frac{2\operatorname{Re}(\overline{a}e^{i\theta})}{1-|a|^2}+4\left[\frac{\operatorname{Re}(\overline{a}e^{i\theta})}{1-|a|^2}\right]^2=-\frac{1}{2}\operatorname{Re}[\{f,a\}e^{i2\theta}]+$$

$$+\frac{1}{4}\left[\operatorname{Im}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\right]^2+\frac{1}{4}\left[\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\right]^2-\operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\frac{2\operatorname{Re}(\overline{a}e^{i\theta})}{1-|a|^2}+$$

$$+4\left[\frac{\operatorname{Re}(\overline{a}e^{i\theta})}{1-|a|^2}\right]^2+\frac{1}{1-|a|^2}=-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\{f,a\}e^{i2\theta}-\frac{2}{1-|a|^2}\right]+$$

$$+\frac{1}{4}\left[\operatorname{Im}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\right]^2+\left(\operatorname{Re}\left[\left(\frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}-\frac{2\overline{a}}{1-|a|^2}\right)e^{i\theta}\right]\right)^2.$$

Отсюда получим оценку для коэффициента d_2 в предположении, что $|\{f,a\}|\le 2(1-|a|^2)^{-1}$ $(\le 2(1-|a|^2)^{-2})$,

$$d_2\ge-\frac{1}{2}\left[\operatorname{Re}(\{f,a\}e^{i2\theta})-\frac{2}{1-|a|^2}\right]\ge 0.$$

Это значит, что поверхность с уравнением $\omega=1/R_1(\zeta)$ над кругом E будет выпуклой вниз. Тем самым доказана

Теорема 1. *Если регулярная функция $f(\zeta)$ удовлетворяет в круге E условию*

$$|\{f(\zeta),\zeta\}| \le 2/(1-|\zeta|^2), \quad \zeta \in E, \tag{6}$$

со шварцианом (производной Шварца) $\{f(\zeta),\zeta\}$, то поверхность $\omega = \lambda(f(E), f(\zeta))$, построенная над кругом E, является выпуклой вниз.

Заметим, что вывод о знакопостоянстве d_2 сделан с запасом, который определяется неотрицательностью величин

$$A_1(a) = \left[\operatorname{Im}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}e^{i\theta}\right)\right]^2/4 \quad \text{и} \quad A_2(a) = \left(\operatorname{Re}\left[\left(\frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)} - \frac{2\overline{a}}{1-|a|^2}\right)e^{i\theta}\right]\right)^2.$$

Утверждение теоремы 1 будет справедливо при более слабом (но громоздком) ограничении на шварциан в форме

$$|\{f(\zeta),\zeta\}| \le 2/(1-|\zeta|^2) + 2A_1(\zeta) + 2A_2(\zeta).$$

Функции с условием (6) входят в класс Нехари функций, удовлетворяющих неравенству

$$|\{f(\zeta),\zeta\}| \le 2/(1-|\zeta|^2)^2, \quad \zeta \in E. \tag{7}$$

Для этого класса в следующем пункте получим аналогичный теореме 1, но более слабый результат.

2. Теорема 2. *Поверхность для плотности гиперболической метрики $\lambda_1(\zeta) = 1/R_1(\zeta)$ с уравнением*

$$\omega = \lambda_1\left(\frac{\zeta+a}{1+\overline{a}\zeta}\right) = [|f'(T(\zeta))|(1-|T(\zeta)|^2)]^{-1}, \quad T(\zeta) = \frac{\zeta+a}{1+\overline{a}\zeta},$$

над окрестностью точки $a \in E$ выпукла вниз при условии (7).

Доказательство. Воспользуемся разложением

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\zeta+a}{1+\overline{a}\zeta}\right) &= f(a) + f'(a)(1-|a|^2)\zeta + \frac{1}{2}[f''(a)(1-|a|^2)^2 - f'(a)2\overline{a}(1-|a|^2)]\zeta^2 + \\ &+ \frac{1}{6}[f'''(a)(1-|a|^2)^3 - 6f''(a)\overline{a}(1-|a|^2)^2 + 6f'(a)\overline{a}^2(1-|a|^2)]\zeta^3 + \cdots = \\ &= f(a) + f'(a)(1-|a|^2)[\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \cdots], \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$a_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{f''(a)}{f'(a)}(1-|a|^2) - 2\overline{a}\right], \quad a_3 = \frac{1}{6}\frac{f'''(a)}{f'(a)}(1-|a|^2)^2 - \frac{f''(a)}{f'(a)}\overline{a}(1-|a|^2) + \overline{a}^2, \tag{9}$$

и учтем, что $|f'(a)|(1-|a|^2) = R_1(a)$. Тогда можно выразить $R_1[T(\zeta)]$ и $\lambda_1[T(\zeta)]$ через a_2 и a_3. Именно,

$$\begin{aligned} R_1(T(\zeta)) &= \left|f'_\zeta\left(\frac{\zeta+a}{1+\overline{a}\zeta}\right)\right|\left|\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\zeta+a}{1+\overline{a}\zeta}\right)\right|^{-1}\frac{|1+\overline{a}\zeta|^2 - |\zeta+a|^2}{|1+\overline{a}\zeta|^2} = \\ &= \left|f'_\zeta\left(\frac{\zeta+a}{1+\overline{a}\zeta}\right)\right|\frac{1+|a|^2|\zeta|^2 - |\zeta|^2 - |a|^2}{1-|a|^2} = R_1(a)|1+2a_2\zeta+3a_3\zeta^2+\cdots|(1-|\zeta|^2). \end{aligned}$$

Полагая $\zeta = \rho e^{i\theta}$, после несложных вычислений будем иметь

$$\begin{aligned} R_1(T(\rho e^{i\theta}))/R_1(a) &= [(1+2a_2\rho e^{i\theta} + 3a_3\rho^2 e^{i2\theta} + \cdots)(1+2\overline{a}_2\rho e^{-i\theta} + 3\overline{a}_3\rho^2 e^{-i2\theta} + \cdots)]^{1/2}(1-\rho^2) = \\ &= [1 + 4\operatorname{Re}(a_2 e^{i\theta})\rho + 6\operatorname{Re}(a_3 e^{i2\theta})\rho^2 + 4|a_2|^2\rho^2 + \cdots]^{1/2}(1-\rho^2) = 1 + c_1\rho + c_2\rho^2 + O(\rho^3), \end{aligned}$$

где $c_1 = 2\,\mathrm{Re}(a_2 e^{i\theta})$, $c_2 = 3\,\mathrm{Re}(a_3 e^{i2\theta}) + 2|a_2|^2 - 2[\mathrm{Re}(a_2 e^{i\theta})]^2 - 1$. Теперь нетрудно получить разложение для $\lambda_1[T(\zeta)]$. Действительно,

$$\lambda_1[T(\rho e^{i\theta})]R_1(a) = \frac{R_1(a)}{R_1(T(\rho e^{i\theta}))} = [1 + c_1\rho + c_2\rho^2 + O(\rho^3)]^{-1} = 1 - c_1\rho + (c_1^2 - c_2)\rho^2 + O(\rho^3), \quad (10)$$

причем

$$c_1^2 - c_2 = 4[\mathrm{Re}(a_2 e^{i\theta})]^2 - 3\,\mathrm{Re}(a_3 e^{i2\theta}) - 2|a_2|^2 + 2[\mathrm{Re}(a_2 e^{i\theta})]^2 + 1 =$$
$$= -3\,\mathrm{Re}[(a_3 - a_2^2)e^{i2\theta}] - 3\,\mathrm{Re}(a_2 e^{i\theta})^2 + 6[\mathrm{Re}(a_2 e^{i\theta})]^2 - 2|a_2|^2 + 1 =$$
$$= -3\,\mathrm{Re}[(a_3 - a_2^2)e^{i2\theta}] + |a_2|^2 + 1.$$

Для применения условия (7) учтем, что в силу (9)

$$a_3 - a_2^2 = \frac{1}{6}\frac{f'''(a)}{f'(a)}(1-|a|^2)^2 - \frac{f''(a)}{f'(a)}\overline{a}(1-|a|^2) + \overline{a}^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}\right)^2(1-|a|^2)^2 +$$
$$+ \overline{a}(1-|a|^2)\frac{f''(a)}{f'(a)} - \overline{a}^2 = \frac{1}{6}\left[\frac{f'''(a)}{f'(a)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}\right)^2\right](1-|a|^2)^2 = \frac{1}{6}\{f(a), a\}(1-|a|^2)^2 \quad (11)$$

со шварцианом $\{f(a), a\}$ в заключительном равенстве. Поэтому из представления (10) имеем при выполнении (7)

$$R_1(a)\frac{\partial^2\lambda_1[T(\rho e^{i\theta})]}{\partial\rho^2}\bigg|_{\rho=0} = 2\left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\{f(a), a\}e^{i2\theta})(1-|a|^2)^2 + |a_2|^2 + 1\right] \geq 2|a_2|^2 \geq 0.$$

Итоговое равенство нулю возможно только при

$$a_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{f''(a)}{f'(a)} = \frac{2\overline{a}}{1-|a|^2},$$

т. е. когда точка a является критической. Если в проколотой окрестности критической точки выполняется соотношение $f''(\zeta)/f'(\zeta) \neq 2\overline{\zeta}(1-|\zeta|^2)^{-1}$, то точка a будет точкой минимума. В противном случае точка a будет относиться к континууму минимумов. Во всех перечисленных случаях обоснована локальная выпуклость вниз поверхности $\omega = \lambda_1\left(\frac{\zeta+a}{1+\overline{a}\zeta}\right)$. $\square$

Замечание. Можно показать, что не могут существовать две точки минимума на поверхности с уравнением $\omega = \lambda_1[T(\zeta)]$. Для этого с помощью дробно-линейной функции нужно перевести точку минимума в начало координат и показать, что на радиусах при $\theta = c$ и $0 < \rho < 1$ будем иметь $\mathrm{Re}(a_2 e^{i\theta}) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\lambda_1(\rho e^{i\theta})}{\partial\rho} \geq 0$. Исключительным случаем окажется наличие континуума минимумов для конформного радиуса, связанного с прямолинейной полосой.

3. Теорема 3. *При условии* (7) *в пересечениях поверхности, уравнением которой является*

$$\omega = \lambda(\mathcal{D}, b + re^{i\theta}) = [R(f(E), f(a) + re^{i\theta})]^{-1}$$

и которая построена над областью $\mathcal{D}$, и плоскостей, проходящих через точку b ортогонально области $\mathcal{D}$, найдутся кривые, выпуклые вниз в окрестности точки $(b, \lambda(\mathcal{D}, b))$.

Доказательство. Построим разложение конформного радиуса над окрестностью точки $b = f(a)$ в области $\mathcal{D} = f(E)$. Воспользуемся представлением (8), (9), т. е.

$$\mathcal{F}^{-1}(\zeta) = f\left(\frac{\zeta+a}{1+\overline{a}\zeta}\right) = f(a) + f'(a)(1-|a|^2)[\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \cdots],$$

и найдем разложение $R_2(b + re^{i\theta}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} R(\mathcal{D}, b + re^{i\theta})$ по степеням r.

Запишем представление, связывающее окрестность точки b из области $\mathcal{D}$ и окрестность нуля из круга E,

$$b + re^{i\theta} = \mathcal{F}^{-1}(\zeta_r) = b + f'(a)(1-|a|^2)(\zeta_r + a_2\zeta_r^2 + a_3\zeta_r^3 + \cdots);$$

$$\frac{re^{i\theta}}{f'(a)(1-|a|^2)} = \zeta_r + a_2\zeta_r^2 + a_3\zeta_r^3 + \cdots \Rightarrow \zeta_r = \frac{re^{i\theta}}{f'(a)(1-|a|^2)} - a_2\left(\frac{re^{i\theta}}{f'(a)(1-|a|^2)}\right)^2 + \cdots$$

Далее представим выражение для конформного радиуса в точке ζ_r, которая соответствует точке $b + re^{i\theta} \in \mathcal{D}$, и учтем, что $(\mathcal{F}^{-1})'(0) = f'(a)(1-|a|^2) = R(\mathcal{D}, b)e^{-i\beta}$. Будем иметь

$$\begin{aligned}
R_2(b+re^{i\theta}) &= |(\mathcal{F}^{-1})'(\zeta_r)|(1-|\zeta_r|^2) = R(\mathcal{D},b)[(1+2a_2\zeta_r+3a_3\zeta_r^2+\cdots)(1+2\overline{a}_2\overline{\zeta}_r + \\
&+ 3\overline{a}_3\overline{\zeta}_r^2+\cdots)]^{1/2}(1-|\zeta_r|^2) = R(\mathcal{D},b)\left[1+4\operatorname{Re}\left(a_2\frac{re^{i(\theta+\beta)}}{R(\mathcal{D},b)}\right) - 4\operatorname{Re}\left(a_2^2\frac{r^2e^{i2(\theta+\beta)}}{R^2(\mathcal{D},b)}\right) + \right.\\
&\left. + 4|a_2|^2\frac{r^2}{R^2(\mathcal{D},b)} + 6\operatorname{Re}\left(a_3\frac{r^2e^{i2(\theta+\beta)}}{R^2(\mathcal{D},b)}\right)\right]^{1/2}\left(1-\frac{r^2}{R^2(\mathcal{D},b)}\right) + O(r^3) = \\
&= R(\mathcal{D},b)\left[1+2\operatorname{Re}\left(a_2\frac{re^{i(\theta+\beta)}}{R(\mathcal{D},b)}\right) - 2\operatorname{Re}\left(a_2^2\frac{r^2e^{i2(\theta+\beta)}}{R^2(\mathcal{D},b)}\right) + 2|a_2|^2\frac{r^2}{R^2(\mathcal{D},b)} + \right.\\
&\left. + 3\operatorname{Re}\left(a_3\frac{r^2e^{i2(\theta+\beta)}}{R^2(\mathcal{D},b)}\right) - 2\left[\operatorname{Re}\left(a_2\frac{re^{i(\theta+\beta)}}{R(\mathcal{D},b)}\right)\right]^2 - \frac{r^2}{R^2(\mathcal{D},b)} + O(r^3)\right].
\end{aligned}$$

Окончательно получим разложение

$$R_2(b+re^{i\theta}) = R(\mathcal{D},b)\left(1 + c_1\frac{r}{R(\mathcal{D},b)} + c_2\frac{r^2}{R^2(\mathcal{D},b)} + O(r^3)\right), \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered}
c_1 = 2\operatorname{Re}(a_2e^{i(\theta+\beta)}),\\
c_2 = 3\operatorname{Re}[(a_3-a_2^2)e^{i2(\theta+\beta)}] - |a_2|^2 + 2|a_2|^2 - 1 = 3\operatorname{Re}[(a_3-a_2^2)e^{i2(\theta+\beta)}] + |a_2|^2 - 1.
\end{gathered} \tag{13}$$

К разложению (12) можно придти с помощью представления в области $\mathcal{D} = f(E)$, $b = f(a)$,

$$\begin{aligned}
R_2(z) = R_2(b+re^{i\theta}) = R_2(b) + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\partial R_2}{\partial z}(b)e^{i\theta}\right)r + \\
+ \left[\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 R_2}{\partial z^2}(b)e^{i2\theta}\right) + \frac{\partial^2 R_2}{\partial z\partial\overline{z}}(b)\right]r^2 + O(r^3),
\end{aligned} \tag{12$'$}$$

которое аналогично ($2'$).

Теперь легко получить представление для $1/R_2(b+re^{i\theta})$. Действительно,

$$R(\mathcal{D},b)\lambda_2(b+re^{i\theta}) \stackrel{\text{def}}{=} R(\mathcal{D},b)/R_2(b+re^{i\theta}) = 1 - c_1\frac{r}{R(\mathcal{D},b)} + (c_1^2 - c_2)\frac{r^2}{R^2(\mathcal{D},b)} + O(r^3),$$

причем $C_2 \stackrel{\text{def}}{=} c_1^2 - c_2 = -3\operatorname{Re}[(a_3-a_2^2)e^{i2(\theta+\beta)}] - |a_2|^2 + 1 + 4[\operatorname{Re}(a_2e^{i(\theta+\beta)})]^2$.

При условии (7) оценка для C_2 получится в виде

$$C_2 \ge 4[\operatorname{Re}(a_2e^{i(\theta+\beta)})]^2 - |a_2|^2,$$

т. к. $-3\operatorname{Re}[(a_3-a_2^2)e^{i2(\theta+\beta)}] = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}[\{f(a),a\}e^{i2(\theta+\beta)}](1-|a|^2)^2 \ge -1$. Отсюда $C_2 \ge 0$ при $\theta = \theta_0 \equiv -\beta - \arg a_2$ или при $\theta = \theta_0 + \pi$. Вдоль этих направлений имеем

$$(\lambda_2)''_{r^2}(b \pm re^{i\theta_0}) = \left.\frac{d^2\lambda(\mathcal{D}, b \pm re^{i\theta_0})}{dr^2}\right|_{r=0} \ge 0.$$

Тем самым найдены направления, по которым линия среза поверхности является выпуклой кривой в окрестности каждой точки $(b, \lambda(\mathcal{D}, b))$. $\square$

4. Форма (13) для коэффициента c_2 из разложения (12) дает возможность обосновать следующее утверждение.

Теорема 4 ([2]). *Справедливы эквивалентности* (1.1) $\Leftrightarrow$ (1.2) $\Leftrightarrow$ (1.3).

Доказательство по сравнению с [2] будет изменено.

(1.1) $\Rightarrow$ (1.2). Так как $f(\zeta)$ — выпуклая функция, то выпуклой является и функция

$$\phi(\omega) = \left[f\left(\frac{\omega+\zeta}{1+\bar{\zeta}\omega}\right) - f(\zeta)\right]\Big/[f'(\zeta)(1-|\zeta|^2)] = \omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + \cdots, \tag{14}$$

коэффициенты которой определяются формулами (9) при $a = \zeta$. Учтем, что из (14) следует разложение

$$\frac{\omega\phi''(\omega)}{\phi'(\omega)} + 1 = 1 + 2a_2\omega + (6a_3 - 4a_2^2)\omega^2 + \cdots \tag{15}$$

Функция $\Omega(w)$, переводящая правую полуплоскость в себя с соответствием точек $\pm 1 \mapsto \pm 1$, $\infty \mapsto \frac{1+e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}} = i\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ (т. е. $\frac{\Omega(\infty)-1}{\Omega(\infty)+1} = e^{i\alpha}$), имеет вид

$$\frac{\Omega-1}{\Omega+1} = e^{i\alpha}\frac{w-1}{w+1} \Rightarrow \Omega(w) = \frac{(1+e^{i\alpha})w + 1 - e^{i\alpha}}{(1-e^{i\alpha})w + 1 + e^{i\alpha}} = \left[1 + \frac{1+e^{i\alpha}}{2}(w-1)\right]\left[1 + \frac{1-e^{i\alpha}}{2}(w-1)\right]^{-1}.$$

Легко запишется разложение функции $\Omega(w)$ по степеням $w-1$

$$\Omega(w) = 1 + e^{i\alpha}(w-1) - \frac{e^{i\alpha}(1-e^{i\alpha})}{2}(w-1)^2 + \cdots \tag{16}$$

Следуя [5], построим разложение для суперпозиции функций (16) и (15)

$$\Omega\left[\omega\frac{\phi''(\omega)}{\phi'(\omega)} + 1\right] = 1 + e^{i\alpha}\omega\frac{\phi''(\omega)}{\phi'(\omega)} - \frac{e^{i\alpha}(1-e^{i\alpha})}{2}\left(\omega\frac{\phi''(\omega)}{\phi'(\omega)}\right)^2 + \cdots = 1 + e^{i\alpha}2a_2\omega +$$
$$+ e^{i\alpha}(6a_3 + 4a_2^2)\omega^2 - \frac{e^{i\alpha}(1-e^{i\alpha})}{2}4a_2^2\omega^2 + \cdots = 1 + 2a_2e^{i\alpha}e^{i\varphi}\tau + A_2\tau^2 + \cdots,$$

где $\tau = e^{-i\varphi}\omega$, $A_2 = 2[3(a_3 - a_2^2) + a_2^2e^{i\alpha}]e^{i\alpha}e^{i2\varphi}$.

Так как для коэффициентов функции с положительной действительной частью в круге E имеем оценку $|A_2| \le 2$ ([6], с. 199), то из выражения для коэффициента A_2 получим

$$|A_2|/2 = |3(a_3 - a_2^2)e^{i\gamma} + a_2^2e^{i(\alpha+\gamma)}| \le 1, \quad \text{где} \quad \gamma = 2\varphi + \alpha.$$

Свободными вещественными параметрами распорядимся так, чтобы

$$\gamma = -\arg(a_3 - a_2^2), \quad \alpha = -\arg a_2^2 - \gamma.$$

Тогда предыдущее неравенство запишется в виде $3|a_3 - a_2^2| + |a_2|^2 \le 1$ и с учетом выражений (9), (11) перейдет в (1.2).

Построим две экстремальные функции, для которых выполняется знак равенства в (1.2).

Первая функция будет удовлетворять уравнению

$$\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} + 1 = \frac{1+\zeta e^{i\alpha}}{1-\zeta e^{i\alpha}}, \ \ \alpha = \text{const} \in \mathbb{R}, \ \Rightarrow \ f'(\zeta) = \frac{c_1}{(1-\zeta e^{i\alpha})^2},$$
$$f(\zeta) = \frac{c_1e^{-i\alpha}}{1-\zeta e^{i\alpha}} + c_2 \ \Rightarrow \ f_0(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a\zeta + b}{1-\zeta e^{i\alpha}}.$$

При этом $a_2(\zeta)$ для функции $f_0\big(\frac{\omega+\zeta}{1+\overline{\zeta}\omega}\big)$ имеет вид $\frac{1}{2}\big(\frac{2e^{i\alpha}}{1-\zeta e^{i\alpha}}(1-|\zeta|^2)-2\overline{\zeta}\big)$ и поэтому

$$|a_2(\zeta)|^2 = \left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\zeta e^{i\alpha}} - \overline{\zeta}e^{-i\alpha}\right|^2 = \left|\frac{1-\overline{\zeta}e^{-i\alpha}}{1-\zeta e^{i\alpha}}\right| = 1,$$

т. е. неравенство (1.2) превращается в равенство. Слева в (1.2) для дробно-линейной функции $f_0\big(\frac{\omega+\zeta}{1+\overline{\zeta}\omega}\big)$ будет стоять нуль.

Вторая функция удовлетворяет уравнению

$$\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}+1 = \frac{1+\zeta^2e^{i2\alpha}}{1-\zeta^2e^{i2\alpha}} \;\Rightarrow\; f'(\zeta) = \frac{2c_1e^{i\alpha}}{1-\zeta^2e^{i2\alpha}} \;\Rightarrow\; f_1(\zeta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_1\ln\frac{1+\zeta e^{i\alpha}}{1-\zeta e^{i\alpha}}+c_2.$$

Для функции $f_1\big(\frac{\omega+\zeta}{1+\overline{\zeta}\omega}\big)$ преобразуем выражение

$$a_2(\zeta) = \frac{1}{2}\left[\frac{2\zeta e^{i2\alpha}}{1-\zeta^2e^{i2\alpha}}(1-|\zeta|^2)-2\overline{\zeta}\right] = e^{i\alpha}\frac{\zeta e^{i\alpha}-\overline{\zeta}e^{-i\alpha}}{1-\zeta^2e^{i2\alpha}}.$$

С другой стороны,

$$\left\{f_1\left(\frac{\omega+\zeta}{1+\overline{\zeta}\omega}\right),\frac{\omega+\zeta}{1+\overline{\zeta}\omega}\right\}\bigg|_{\omega=0} = \{f_1(\zeta),\zeta\} = \left(\frac{2\zeta e^{i2\alpha}}{1-\zeta^2e^{i2\alpha}}\right)' - \frac{1}{2}\frac{4\zeta^2e^{i4\alpha}}{(1-\zeta^2e^{i2\alpha})^2} = \frac{2e^{i2\alpha}}{(1-\zeta^2e^{i2\alpha})^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}(1-|\zeta|^2)^2|\{f_1(\zeta),\zeta\}| = \frac{(1-|\zeta|^2)^2}{|1-\zeta^2e^{i2\alpha}|^2} = 1-\frac{|\zeta e^{i\alpha}-\overline{\zeta}e^{-i\alpha}|^2}{|1-\zeta^2e^{i2\alpha}|^2} = 1-|a_2(\zeta)|^2,$$

и в (1.2) достигается знак равенства при всех $\zeta\in E$.

(1.2) $\Rightarrow$ (1.1). При выполнении (1.2) получим такие импликации в круге E

$$\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2)-2\overline{\zeta}\right|^2 \le 4 \;\Rightarrow\; \left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right|^2(1-|\zeta|^2)^2 - 4\,\mathrm{Re}\left(\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)(1-|\zeta|^2)+4|\zeta|^2 \le 4 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \mathrm{Re}\left(\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}+1\right) \ge \frac{1}{4}\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right|^2(1-|\zeta|^2) \ge 0 \;\Rightarrow\; (1.1).$$

(1.2) $\Rightarrow$ (1.3). Учтем форму (13) для коэффициента c_2 из разложения (12). В силу (11) и (9) имеем

$$a_3-a_2^2 = \frac{1}{6}\{f(a),a\}(1-|a|^2)^2, \quad a_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{f''(a)}{f'(a)}(1-|a|^2)-2\overline{a}\right].$$

Поэтому из (12), (13) и (1.2) получим неравенство

$$\frac{\partial^2R_2(b+re^{i\theta})}{\partial r^2}\bigg|_{r=0} = \frac{2c_2}{R(\mathcal{D},b)} \le (1-|a_2|^2+|a_2|^2-1)\frac{2}{R(\mathcal{D},b)} = 0,$$

гарантирующее выпуклость вверх поверхности $\omega = R(\mathcal{D},b)$ над каждой точкой $b\in\mathcal{D}$.

(1.3) $\Rightarrow$ (1.2). Условие выпуклости вверх поверхности конформного радиуса запишем с учетом разложения (12$'$) в форме

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2R}{\partial z^2}e^{i2\theta}\right) \le -\frac{\partial^2R}{\partial z\partial\overline{z}}, \;\; 0\le\theta\le 2\pi, \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{\partial^2R}{\partial z^2}\right| \le -\frac{\partial^2R}{\partial z\partial\overline{z}}.$$

Приведем результаты нетрудных выкладок для $R(f(E),z) = |f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2)$ и $z = f(\zeta)$, $\zeta = f^{-1}(z)$. Будем иметь

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial \zeta}\frac{1}{f'(\zeta)} = \sqrt{\frac{\overline{f'(\zeta)}}{f'(\zeta)}}\Big[\frac{f''(\zeta)}{2f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2) - \overline{\zeta}\Big], \quad R\Big|\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\Big| = \frac{1}{2}|\{f(\zeta),\zeta\}|(1-|\zeta|^2)^2,$$

$$R\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\Big|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\Big|^2(1-|\zeta|^2)^2 - (1-|\zeta|^2)\Big[\mathrm{Re}\left(\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right) + 1\Big] = \Big|\frac{f''(\zeta)}{2f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2) - \overline{\zeta}\Big|^2 - 1.$$

Тогда

$$R\Big|\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\Big| \le -R\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial\overline{z}} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}|\{f(\zeta),\zeta\}|(1-|\zeta|^2)^2 \le 1 - \Big|\frac{f''(\zeta)}{2f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2) - \overline{\zeta}\Big|^2,$$

т. е. получено неравенство (1.2). □

Теорема 5. *Если поверхность конформного радиуса $R(f(E), f(\zeta))$, построенная над кругом E, выпукла вверх, то область $\mathcal{D} = f(E)$ является выпуклой. Обратное утверждение в общем случае неверно.*

Доказательство. Подсчитаем производные, входящие в условие выпуклости вверх поверхности с уравнением $\omega = |f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2)$. Это условие получается из представления $(2')$ и имеет вид (аналогичный $b_2 \le 0$ из (4))

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2}e^{i2\theta}\right) + \frac{\partial^2 R}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}} \le 0, \;\; 0 \le \theta \le 2\pi, \;\Leftrightarrow\; \Big|\frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2}\Big| \le -\frac{\partial^2 R}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}.$$

Получим последовательно

$$\frac{\partial R}{\partial \zeta} = |f'(\zeta)|\Big(\frac{1}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2) - \overline{\zeta}\Big),$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2} = |f'(\zeta)|\Big[\frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\Big)' + \frac{1}{2}\Big(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\Big)^2\Big)(1-|\zeta|^2) - \overline{\zeta}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\Big],$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}} = |f'(\zeta)|\Big[\frac{1}{4}\Big|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\Big|^2(1-|\zeta|^2) - \frac{1}{2}\Big(\overline{\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}}\Big)\overline{\zeta} - \frac{1}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\zeta - 1\Big] =$$

$$= \frac{|f'(\zeta)|}{1-|\zeta|^2}\Big(\Big|\frac{1}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2) - \overline{\zeta}\Big|^2 - 1\Big).$$

Поэтому неравенство

$$\frac{1-|\zeta|^2}{|f'(\zeta)|}\Big|\frac{\partial^2 R}{\partial\zeta^2}\Big| \le -\frac{1-|\zeta|^2}{|f'(\zeta)|}\frac{\partial^2 R}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}$$

перепишется в эквивалентном виде

$$(1-|\zeta|^2)\Big|\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\Big)' + \frac{1}{2}\Big(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\Big)^2\Big](1-|\zeta|^2) - \overline{\zeta}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\Big| \le 1 - \Big|\frac{1}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2) - \overline{\zeta}\Big|^2.$$

При его выполнении будем иметь (см. переход (1.2) ⇒ (1.1))

$$\Big|\frac{1}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2) - \overline{\zeta}\Big|^2 \le 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}\left(\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right) \ge -1,$$

т. е. выпуклость функции $f(\zeta)$ и выпуклость области $f(E) = \mathcal{D}$ обеспечены.

Обратный переход от выпуклости области $\mathcal{D} = f(E)$ к выпуклости вверх поверхности с уравнением $\omega = R(f(E), f(\zeta))$ над кругом E в общем случае не осуществится. Достаточно убедиться в этом на примере области $f_r(E)$ с $f_r(\zeta) = \frac{1+r\zeta}{1-r\zeta}$, $0 < r \le 1$. Область $f_r(E)$ будет кругом из правой полуплоскости, которая является предельным положением этого круга при $r \to 1$. На предельной поверхности конформного радиуса будет лежать ∞ над точкой $\zeta = 1$. Линия среза этой поверхности вдоль вещественного диаметра является графиком функции, выпуклой вниз, т. к.

$$|f_1'(\xi)|(1-\xi^2) = \frac{2(1-\xi^2)}{(1-\xi)^2} = \frac{2(1+\xi)}{1-\xi} = \omega, \quad \omega' = \frac{4}{(1-\xi)^2},$$

и поэтому $\omega'' = 8/(1-\xi)^2 > 0$, $\xi \in [-1,1)$. При r, близких к единице, имеем

$$\omega = |f_r'(\xi)|(1-\xi^2) = \frac{2r(1-\xi^2)}{(1-r\xi)^2}, \quad \omega' = \frac{4r(r-\xi)}{(1-r\xi)^3}, \quad \omega'' = \frac{4r(3r^2-1-2r\xi)}{(1-r\xi)^4},$$

и вторая производная будет менять знак с $(+)$ при $\xi \in [-1,(3r^2-1)(2r)^{-1})$ на $(-)$ при $\xi \in ((3r^2-1)(2r)^{-1},1]$, т. е. выпуклости нет. Конечный максимум конформного радиуса, равный $2r(1-r^2)^{-1}$, расположен над точкой $\xi = r$. $\square$

5. В заключительной части статьи дадим геометрическое истолкование неравенству

$$\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| < \frac{2|\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \quad \zeta \in E, \tag{17}$$

которое влечет единственность корня $\zeta = 0$ уравнения

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2\overline{\zeta}}{1-|\zeta|^2}$$

в предположении, что $f''(0) = 0$. Неравенство (17) часто используется при обосновании теорем единственности решения внешней обратной краевой задачи [7]–[9].

Для истолкования (17) вспомним выражение (3) для коэффициента b_1 в разложении (2) и учтем, что

$$\frac{1}{R_1(a)} \frac{\partial R(f(E), f(a+\rho e^{i\theta}))}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=0} = b_1 = \operatorname{Re}\left[\left(\frac{f''(a)}{f'(a)} - \frac{2\overline{a}}{1-|a|^2}\right)e^{i\theta}\right].$$

Положим $\theta = \arg a$. Тогда можно записать

$$b_1 = \operatorname{Re}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)} e^{i\arg a}\right) - \frac{2|a|}{1-|a|^2},$$

откуда в силу (17) получим $b_1 < 0$. Это будет означать, что линия, которая является пересечением поверхности конформного радиуса с плоскостью, проходящей перпендикулярно кругу вдоль любого луча, будет графиком строго убывающей функции. Все эти линии снижаются из точки максимума над $\zeta = 0$ в точку граничной окружности. Другими словами, лучевыми срезами поверхности конформного радиуса образуются монотонные линии. Знак кривизны на этих линиях может меняться. На такой поверхности могут быть и выемки.

Более сложное семейство линий связано с теоремой 3. Там получаются уравнения линий с положительным коэффициентом при r, но на поверхности для плотности гиперболической метрики (т. е. для перевернутого конформного радиуса) над областью $f(E)$. Существование таких линий приводит к единственности критической точки функции $\lambda(f(E), z) = 1/R(f(E), z)$ при условии (7). Тогда будет единственной критическая точка конформного радиуса $R(f(E), z)$: уравнения для критических точек поверхностей $\omega = R(\mathcal{D}, f(\zeta))$ и $\omega = 1/R(\mathcal{D}, f(\zeta))$ отличаются знаком в левой части ($b_1 = 0$ из (2), (3) $\Leftrightarrow -b_1 = 0$ из (5)).

Литература

1. Minda D., Wright D.J. *Univalence criteria and the hyperbolic metric in convex regions* // Rocky Mtn. J. Math. – 1982. – V. 12. – P. 471–479.
2. Kim S.-A., Minda D. *The hyperbolic and quasihyperbolic metrics in convex regions* // J. Anal. – 1993. – V. 1. – P. 109–118.
3. Ковалев Л.В. *Дифференциальные свойства конформного радиуса* // Тез. докл. 3-й Дальневосточной конф. по матем. моделир. – Владивосток. – 1999. – С. 31.
4. Аксентьев Л.А., Микка В.П. *О поведении конформного радиуса в подклассах однолистных областей* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 8. – С. 20–28.
5. Ковалев Л.В. *Приведенные модули и теоремы искажения в теории однолистных функций.* – Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Владивосток, 2000. – 106 с.
6. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
7. Аксентьев Л.А. *Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 2. – С. 3–11.
8. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
9. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – 2-е изд. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – 333 с.

Казанский государственный университет

Поступила 09.02.2001