ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 1 (500)

УДК 517.977

С.Я. СЕРОВАЙСКИЙ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С НЕГЛАДКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассматривается задача оптимального управления для системы, описываемой нелинейным уравнением эллиптического типа при отсутствии информации об однозначной разрешимости соответствующей краевой задачи. Дополнительная трудность связана с отсутствием дифференцируемости оператора состояния. Для исследования задачи предлагается модифицированный метод штрафа с гладкой аппроксимацией оператора. В результате минимизации соответствующего аппроксимационного функционала находится приближенное решение исходной оптимизационной задачи.

1. Постановка задачи

В открытой ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^n$ задано уравнение

$$\Delta y + g(y) = v + f \tag{1}$$

с однородным граничным условием (задача Дирихле), где v — управление, f — известная функция из пространства $H^{-1}(\Omega)$, g — заданная функция от состояния системы y. В соответствии с теоремой Соболева имеют место непрерывные вложения

$$H_0^1(\Omega) \subset L_q(\Omega), \quad H^{-1}(\Omega) \subset L_{q'}(\Omega),$$

где $1/2 - 1/n = 1/q$, $n > 2$, q произвольно, $n = 2$; $1/q + 1/q' = 1$. Тогда существует такая положительная константа c, что

$$\|y\|_q \le c\|y\| \quad \forall y \in H_0^1(\Omega), \quad \|y\|_* \le c\|y\|_{q'} \quad \forall y \in L_{q'}(\Omega),$$

где $\|y\|$, $\|y\|_q$ и $\|y\|_*$ — нормы функции y в пространствах $H_0^1(\Omega)$, $L_q(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$ соответственно. Предполагается, что функция g принадлежит классу

$$G = \{g \in C(\mathbb{R}) \mid |g(y)| \le a + b|y|^{q-1} \ \forall y\}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Пользуясь теоремой Красносельского ([1], с. 312), установим, что оператор $g : L_q(\Omega) \to L_{q'}(\Omega)$ является непрерывным. Управление v выбирается из выпуклого замкнутого подмножества U пространства $L_2(\Omega)$.

При данных ограничениях на нелинейный член уравнение (1) не имеет априорной оценки, вследствие чего нельзя гарантировать ни существование решения краевой задачи на произвольном управлении, ни его единственность при тех условиях, когда разрешимость реализуется. Более того, при определенных условиях однозначная разрешимость задачи наверняка не имеет места (напр., [2], с. 262). В соответствии с общей концепцией решения экстремальных задач для сингулярных систем [2] вводится понятие допустимой пары. Рассмотрим пространство $W = L_2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ и множество $W_0 = \{(v, y) \in W \mid v \in U\}$.

Определение 1. Допустимой парой для уравнения (1) назовем такую пару (v, y) из множества W_0, которая удовлетворяет уравнению (1).

Будем полагать, что множество допустимых пар уравнения (1) не пусто. Рассматривается функционал

$$I(v,y) = \frac{1}{2}\|y - z\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|v\|_2^2,$$

где z — известная функция из $H_0^1(\Omega)$, $\gamma > 0$. Ставится оптимизационная

Задача 1. *Найти такую допустимую пару* (v,y), *которая минимизирует функционал* I *на множестве допустимых пар уравнения* (1).

Теорема 1. *Задача* 1 *разрешима.*

Доказательство. В силу ограниченности снизу функционала I на множестве W для задачи 1 существует минимизирующая последовательность, т. е. такая последовательность допустимых пар $\{w_k\} = \{v_k, y_k\}$, что имеет место сходимость $I(w_k) \to I(w)$. Тогда из определения функционала I следует ограниченность последовательностей $\{v_k\}$ и $\{y_k\}$ в пространствах $L_2(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ соответственно. После выделения подпоследовательностей (с сохранением прежнего обозначения) установим сходимость $v_k \to v$ слабо в $L_2(\Omega)$ и $y_k \to y$ слабо в $H_0^1(\Omega)$.

Покажем, что пара $w = (v,y)$ является допустимой. Учитывая выпуклость и замкнутость множества U, установим включение $v \in U$. Пользуясь теоремой вложения Соболева, установим ограниченность последовательности $\{y_k\}$ в пространстве $L_q(\Omega)$. Тогда из определения множества G следует ограниченность последовательности $\{g(y_k)\}$ в пространстве $L_{q'}(\Omega)$. Применяя теорему Реллиха–Кондрашова, после выделения подпоследовательности получаем сходимость $y_k \to y$ сильно в $L_2(\Omega)$ почти всюду (п. в.) на Ω. В результате имеем $g(y_k) \to g(y)$ п. в. на Ω. Пользуясь леммой 1.3 ([3], с. 25), установим $g(y_k) \to g(y)$ слабо в $L_{q'}(\Omega)$. Поскольку пара (v_k, y_k) является допустимой, то она удовлетворяет равенству

$$\Delta y_k + g(y_k) = v_k + f.$$

Умножая это соотношение на произвольную функцию класса $H_0^1(\Omega)$, после интегрирования по области Ω и перехода к пределу установим справедливость равенства (1). Таким образом, пара w действительно является допустимой.

Минимизируемый функционал представляет собой (с точностью до постоянных множителей) сумму квадратов норм в гильбертовых пространствах. Квадрат нормы является выпуклым и непрерывным функционалом, а значит, слабо полунепрерывен снизу. В результате получаем соотношение

$$\underline{\lim}\, I(w_k) \leq I(w).$$

Отсюда, т. к. последовательность $\{w_k\}$ является минимизирующей, следует, что ее слабый предел w является решением задачи 1. $\square$

Задачи оптимального управления для систем, описываемых нелинейными уравнениями эллиптического типа, достаточно хорошо исследованы (напр., [2], [4]–[7]). В большинстве работ этого направления (в частности, [4]–[7]) уравнения состояния предполагаются однозначно разрешимыми, что позволяет для их исследования воспользоваться стандартным вариационным подходом. Рассматриваемая задача 1 близка сингулярным оптимизационным задачам, описанным в [2]. В частности, доказанная теорема 1 практически не отличается от аналогичных утверждений из [2]. На первый взгляд отличие задачи 1 от тех, что рассматриваются в указанной монографии Ж.-Л. Лионса, состоит в том, что уравнение состояния включает в себя не степенную нелинейность, а функцию g общего вида. Однако решающую роль здесь играет то обстоятельство, что эта функция заведомо считается недифференцируемой. Для сингулярных оптимизационных задач, рассматриваемых Лионсом и другими авторами, обычно используется метод штрафа с последующим получением условий оптимальности для аппроксимационной задачи. Применение подобной методики в данном случае невозможно, поскольку стандартный "оштрафованный" функционал для задачи 1 оказывается недифференцируемым. Казалось бы, это обстоятельство не должно вызывать принципиальных трудностей, поскольку методы минимизации негладких функционалов хорошо известны (напр., [8], [9]). В работах указанного направления отсутствие гладкости наблюдалось в подинтегральном выражении критерия оптимальности, а желаемый результат достигался за счет перехода от стандартной производной функционала к ее более слабым аналогам (субдифференциал, производная Кларка и т. п.). В данном же случае исходный функционал является гладким, а недифференцируемый член присутствует в уравнении состояния. Поэтому использовать теорию негладких функционалов нельзя: негладкость имеет операторный, а не функциональный смысл. Оказывается непригодной и теория расширенной дифференцируемости операторов (напр., [10]), поскольку для рассматриваемого уравнения возможная недифференцируемость функции состояния по управлению обусловлена не топологическими причинами (ослабление функциональных свойств в процессе линеаризации оператора), а негладкостью нелинейного члена.

Для преодоления имеющихся трудностей используем модифицированный метод штрафа с гладкой аппроксимацией нелинейного члена уравнения. В силу достаточно высокой степени сложности задачи 1 не удается обосновать сходимость метода штрафа в полном объеме подобно тому, как это делается в [2]. Тем не менее решение аппроксимационной задачи оказывается в определенном смысле приближенным решением исходной задачи. Минимизация же аппроксимационного функционала в виду его гладкости может осуществляться стандартными методами.

2. Аппроксимация задачи

Экстремальные задачи практически всегда могут быть решены лишь приближенно. Существуют разные понятия приближенного решения задачи. Пусть, в частности, рассматривается задача минимизации функционала Λ на подмножестве Σ_0 топологического пространства Σ.

Определение 2. Точку $\psi \in \Sigma_0$ назовем *сильным приближенным решением* задачи минимизации функционала Λ на множестве Σ_0, если для достаточно малой окрестности V решения задачи и достаточно малого числа $\delta > 0$ справедливы включение $\psi \in V$ и неравенство $\Lambda(\psi) \leq \inf \Lambda(\Sigma_0) + \delta$.

На практике удовлетворить указанным выше требованиям, как правило, не удается. Так, для задач оптимального управления, не корректных в смысле Тихонова, минимизирующие последовательности, вообще говоря, не сходятся к оптимальному управлению [11]. В этих условиях гарантировать близость приближенного решения экстремальной задачи к оптимальному управлению обычно не удается. Можно лишь надеяться на определение такого допустимого управления, значение функционала на котором будет достаточно близко к его нижней грани. В результате приходим к более слабому понятию приближенного решения экстремальной задачи.

Определение 3. Точку $\psi \in \Sigma_0$ назовем *слабым приближенным решением* задачи минимизации функционала Λ на множестве Σ_0, если для достаточно малого числа $\delta > 0$ справедливо неравенство $\Lambda(\psi) \leq \inf \Lambda(\Sigma_0) + \delta$.

Обеспечить нахождение слабого приближенного решения удается для существенно более широкого класса задач. Учитывая, что корректность экстремальной задачи реализуется лишь в исключительных случаях [12], зачастую приходится находить лишь слабое приближенное решение многих оптимизационных задач, причем возникает необходимость в его дальнейшем ослаблении. Отметим, что исследуемая задача 1 характеризуется отсутствием информации о существовании и единственности решения уравнения состояния, а также принципиальным отсутствием дифференцируемости оператора состояния, что не может не отразиться на свойствах решаемой задачи. В этой связи устанавливается более слабая форма приближенного решения задачи.

Определение 4. Точку $\psi \in \Sigma$ назовем *ослабленным приближенным решением* задачи минимизации функционала Λ на множестве Σ_0, если найдутся такая точка из Σ_0, ее достаточно малая окрестность V и достаточно малое число $\delta > 0$, что справедливы включение $\psi \in V$ и неравенство $\Lambda(\psi) \leq \inf \Lambda(\Sigma_0) + \delta$.

Если в определениях 2 и 3 рассматриваемый объект непременно считается элементом множества Σ_0, на котором минимизируется функционал, то для ослабленного приближенного решения это уже не обязательно. Требуется лишь, чтобы точка ψ попала в достаточно малую окрестность какого-либо элемента указанного множества. Таким образом, принадлежность этой точки множеству Σ_0 реализуется не точно, а приближенно. Тем самым ослабленное приближенное решение оказывается достаточно близким к множеству Σ_0, а значение функционала на нем может превосходить нижнюю грань этого функционала на данном множестве на сколь угодно малую величину. Понятно, что слабое приближенное решение является ослабленным приближенным, но, вообще говоря, не наоборот. Ослабляя ограничения, предъявляемые к приближенному решению задачи, расширяем класс задач, для которых оно может быть найдено.

Для нахождения ослабленного приближенного решения поставленной задачи предлагается модифицированный метод штрафа, включающий в себя гладкую аппроксимацию уравнения состояния. Рассмотрим последовательность функций $\{g_n\}$ класса G, удовлетворяющих условиям

$$g_n \in C^1(\mathbb{R}), \quad n = 1, 2, \dots ; \quad g_n(y) \to g(y) \ \text{ в } L_{q'}(\Omega) \text{ равномерно по } y. \tag{2}$$

Определим в пространстве W функционал

$$I_n(v, y) = I(v, y) + \frac{1}{\varepsilon_n q'} \|\Delta y + g_n(y) - v - f\|_{q'}^{q'},$$

где $\varepsilon_n > 0$ и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Предполагается, что скорость сходимости последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ниже, чем у $\{g_n\}$, т. е. справедливо соотношение

$$\sup_y \|g_n(y) - g(y)\|_{q'} = o(\varepsilon_n). \tag{3}$$

Ставится вариационная

Задача (n). *Найти такое управление v, которое минимизирует функционал I_n на W_0.*

Теорема 2. *Для любого n задача (n) разрешима.*

Доказательство. Пусть $\{w_k\} = \{v_k, y_k\}$ — минимизирующая последовательность для задачи (n). Она ограничена в пространстве W, причем справедливо равенство

$$\Delta y_k + g_n(y_k) = v_k + f + \varphi_k,$$

где последовательность $\{\varphi_k\}$ ограничена в пространстве $L_{q'}(\Omega)$. После выделения подпоследовательностей получаем сходимость $v_k \to v$ слабо в $L_2(\Omega)$, $y_k \to y$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ и $\varphi_k \to \varphi$ слабо в $L_{q'}(\Omega)$. Очевидно, пара (v, y) принадлежит множеству W_0. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, после перехода к пределу в последнем равенстве установим соотношение $\Delta y + g_n(y) = v + f + \varphi$. Учитывая, что функционал I_n является суммой степеней (больше единицы) трех норм, каждая из которых слабо полунепрерывна снизу, завершаем доказательство так же, как и в предшествующем утверждении. □

Обоснование метода аппроксимации дает

Теорема 3. *Для достаточно большого номера n решение (v_n, y_n) задачи (n) является ослабленным приближенным решением задачи 1 в смысле слабой топологии пространства W.*

Доказательство. Справедливо соотношение

$$I_n(v_n, y_n) = \min I_n(W_0) \leq I_n(v, y) = I(v, y) + \frac{1}{\varepsilon_n q'} \|g_n(y) - g(y)\|_{q'}^{q'},$$

где (v, y) есть решение задачи 1. Учитывая оценку (3), приходим к неравенству

$$\lim_{n\to\infty} I_n(v_n, y_n) \le I(v, y). \tag{4}$$

Отсюда следует ограниченность числовой последовательности $\{I_n(v_n, y_n)\}$. Тогда последовательность пар $\{v_n, y_n\}$ ограничена в пространстве W и справедливо равенство

$$\Delta y_n + g_n(y_n) = v_n + f + \varphi_n, \tag{5}$$

причем выполняется оценка $\|\varphi_n\|_{q'} \le c(\varepsilon_n)^{1/q'}$, где $c > 0$. Учитывая определение множества G, установим ограниченность последовательности $\{g_n(y_n)\}$ в пространстве $L_{q'}(\Omega)$.

Выделяя подпоследовательности, получаем сходимость $v_n \to v'$ слабо в $L_2(\Omega)$, $y_n \to y'$ слабо в $H_0^1(\Omega)$, $g_n(y_n) \to g'$ слабо в $L_{q'}(\Omega)$ и $\varphi_n \to 0$ слабо в $L_{q'}(\Omega)$. При этом пара (v', y') является элементом множества W_0. Пользуясь теоремой Реллиха–Кондрашова, установим, что $y_n \to y'$ сильно в $L_2(\Omega)$ и п. в. на Ω. Для почти всех точек x из Ω выполняются неравенства

$$\begin{aligned}|g_n(y_n(x)) - g(y'(x))| \le |g_n(y_n(x)) - g(y_n(x))| + |g(y_n(x)) - g(y'(x))| \le \\ \le \sup_y |g_n(y) - g(y)| + |g(y_n(x)) - g(y'(x))|.\end{aligned}$$

Учитывая условие (2), заключаем, что $g_n(y_n) \to g(y')$ п. в. на Ω. Применяя лемму 1.3 ([3], с. 25), установим, что $g_n(y_n) \to g(y')$ слабо в $L_{q'}(\Omega)$. Умножая равенство (5) на произвольную функцию класса $H_0^1(\Omega)$, интегрируя результат по области Ω и переходя к пределу, получим

$$\Delta y' + g(y') = v' + f.$$

Таким образом, (v', y') оказывается допустимой парой для уравнения (1).

Итак, предел последовательности $\{v_n, y_n\}$ решений задачи (n) в слабой топологии пространства W является допустимой парой для уравнения (1). Следовательно, при достаточно больших номерах n пара (v_n, y_n) попадает в сколь угодно малую окрестность некоторой допустимой пары для уравнения (1). Из определения функционала I_n следует неравенство $I(w) \le I_n(w)$ для любой точки w из W. Тогда в силу условия (4)

$$\lim_{n\to\infty} I(v_n, y_n) \le \lim_{n\to\infty} I_n(v_n, y_n) \le I(v, y).$$

Таким образом, для любого сколь угодно малого положительного числа δ номер n можно выбрать столь большим, что значение функционала $I(v_n, y_n)$ будет превосходить $I(v, y)$ не более чем на δ. Тем самым при достаточно больших n пара (v_n, y_n) действительно оказывается ослабленным приближенным решением задачи 1. $\square$

3. Решение аппроксимационной задачи

Для практического применения полученных результатов опишем принципиальный алгоритм решения задачи (n) для произвольного номера n. Учтем, что для минимизации гладкого функционала на выпуклом подмножестве гильбертова пространства пригодны стандартные методы оптимизации (напр., [11], с. 18). При этом для вычисления производной минимизируемого функционала в задаче (n) потребуются дополнительные ограничения на функции g_n:

$$|g_{ny}(y)| \le a_1 + b_1|y|^{q-2} \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

где $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $g_{ny}(y)$ — производная от g_n в точке y. Тогда оператор $g_n(\cdot) : L_q(\Omega) \to L_{q'}(\Omega)$ оказывается дифференцируемым по Фреше, причем справедливо равенство ([1], с. 312) $g_n'(y)h(x) = g_{ny}(y(x))h(x) \;\; \forall y \in L_q(\Omega)$. Пользуясь теоремой вложения Соболева, установим дифференцируемость по Фреше отображения $g_n(\cdot) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$.

Теорема 4. *Решение* (v_n, y_n) *задачи* (n) *характеризуется соотношениями*

$$v_n = \Pi(p_n/\gamma), \tag{6}$$

$$\Delta y_n + g_n(y_n) = v_n + f + \varepsilon_n^{q-1}|p_n|^{q-2}p_n, \tag{7}$$

где Π *— проектор на множество* U*, а функция* p_n *удовлетворяет уравнению*

$$\Delta p_n + g_n'(y_n)p_n = \Delta z - \Delta y_n. \tag{8}$$

Доказательство. Пользуясь стандартной схемой минимизации функционалов [13], установим, что оптимальная пара (v_n, y_n) задачи (n) удовлетворяет соотношениям

$$I_{nv}(v_n, y_n)(v - v_n) \geq 0 \quad \forall v \in U, \quad I_{ny}(v_n, y_n) = 0,$$

где $I_{nv}(v, y)$, $I_{ny}(v, y)$ — частные производные функционала I_n в точке (v, y). Эти производные находятся обычным образом из соотношений

$$I_{nv}(v, y)h = \int_\Omega (\gamma v - p_n)h\,dx \quad \forall h \in L_2(\Omega),$$

$$I_{ny}(v, y)h = \int_\Omega \{(\Delta z - \Delta y)h - p_n[\Delta h + g_n'(y)h]\}dx \quad \forall h \in H_0^1(\Omega),$$

где $p_n = -(\varepsilon_n)^{-1}|\Delta y + g_n(y) - v - f|^{q'-2}[\Delta y + g_n(y) - v - f]$. Из последнего равенства при $v = v_n$, $y = y_n$ следует соотношение (7). В результате необходимые условия экстремума принимают вид

$$\int_\Omega (\gamma v_n - p_n)(v - v_n)dx \geq 0 \quad \forall v \in U,$$

$$\int_\Omega [\Delta p_n + g_n'(y)p_n - \Delta z + \Delta y_n]h\,dx = 0 \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Второе из этих условий непосредственно дает равенство (8). Для приведения предшествующего вариационного неравенства к виду (6) достаточно воспользоваться свойством проектора на выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства. $\square$

На основании доказанного утверждения для нахождения решения задачи (n) требуется сначала решить однородную задачу Дирихле для системы нелинейных уравнений эллиптического типа

$$\Delta y_n + g_n(y_n) = \Pi(p_n/\gamma) + f + \varepsilon_n^{q-1}|p_n|^{q-2}p_n,$$
$$\Delta p_n + g_n'(y_n)p_n = \Delta z - \Delta y_n,$$

после чего функция v_n определяется по формуле (6). В соответствии с теоремой 3 пара (v_n, y_n) оказывается приближенным решением задачи 1.

Замечания

1. Если нелинейный член уравнения является дифференцируемым, то для решения задачи можно воспользоваться стандартной формой метода штрафа (без аппроксимации оператора состояния). При этом имеется возможность обоснования сходимости метода в более сильном смысле [2], в результате чего устанавливается слабое или даже сильное приближенное решение задачи.

2. Теорема 4 дает лишь необходимое условие экстремума для задачи (n). Вследствие этого нет уверенности в том, что конкретное решение системы (6)–(8) действительно минимизирует функционал I_n на множестве W_0. Тот же эффект наблюдается и для регулярных (однозначно разрешимых) уравнений с гладкой нелинейностью (в частности, [4]–[7]).

3. Практическое решение полученной системы условий оптимальности для задачи (n) наталкивается на значительные трудности. То же самое можно сказать и о методах оптимизации для

гладких сингулярных экстремальных задач (в частности, [2]), а для регулярных нелинейных уравнений с частными производными непосредственное нахождение оптимального управления оказывается чрезвычайно сложной задачей.

4. Критерий оптимальности для задачи 1 может представлять собой интегральный функционал общего вида со стандартными ограничениями на подынтегральное выражение (степень роста нелинейностей, выпуклость и дифференцируемость). Если сам функционал оказывается негладким, то описанную выше методику можно применять совместно с известными методами негладкой оптимизации (напр., [8], [9]). Тогда условие оптимальности для аппроксимационной задачи записывается не в терминах обычных функциональных производных, а с использованием их обобщений типа субградиента, производной Кларка и т. д.

5. Описанная методика (применение метода штрафа с гладкой аппроксимацией оператора состояния для нахождения ослабленного приближенного решения в условиях сингулярного уравнения с негладким оператором) в принципе остается в силе и для неразрешимых экстремальных задач, когда критерий оптимальности определяется нормами в более широких пространствах.

6. Уравнение состояния не обязательно имеет эллиптический тип. Полученные результаты остаются в силе для достаточно широкого класса задач оптимального управления, связанных с нелинейными нестационарными уравнениями с негладкими операторами.

Литература

1. *Функциональный анализ* / Под ред. С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
2. Лионс Ж.-Л. *Управление сингулярными распределенными системами.* – М.: Наука, 1987. – 368 с.
3. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
4. Иваненко В.И., Мельник В.С. *Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами.* – Киев: Наук. думка, 1988. – 284 с.
5. Райтум У.Е. *Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений.* – Рига: Зинатне, 1989. – 280 с.
6. Серовайский С.Я. *Оптимизация в нелинейных эллиптических системах с управлением в коэффициентах* // Матем. заметки. – 1993. – Т. 54. – № 2. – С. 85–95.
7. Серовайский С.Я. *Градиентные методы в задаче оптимального управления нелинейной эллиптической системой* // Сиб. матем. журн. – 1996. – Т. 37. – № 5. – С. 1154–1166.
8. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* – М.: Мир, 1979. – 399 с.
9. Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ.* – М.: Наука, 1988. – 280 с.
10. Серовайский С.Я. *Необходимые условия оптимальности в случае недифференцируемости функции состояния по управлению* // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 6. – С. 1055–1059.
11. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация.* – М.: Наука, 1981. – 400 с.
12. Zolezzi T. *A characterizations of well-posed optimal control systems* // SIAM J. Control and Optim. – 1972. – V. 10. – № 2. – P. 594–607.
13. Лионс Ж.-Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.* – М.: Мир, 1972. – 416 с.

Казахский национальный университет

Поступила
07.03.2002