ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

УДК 512.573

А.Г. ПИНУС

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЯХ ГЕНЕРИЧЕСКИХ МУЛЬТИАЛГЕБР

Понятие генерической мультиалгебры было введено в [1], где оно рассматривается как некоторый подход к изучению решеток подалгебр универсальных алгебр. В данной работе рассмотрены вопросы, связанные с разрешимостью элементарных теорий генерических мультиалгебр и с аксиоматизируемостью тех или иных классов генерических мультиалгебр.

Напомним, что под мультифункцией f от n аргументов на множестве A понимается отображение $f : A^n \to P(A)$, где $P(A)$ — совокупность всех подмножеств множества A. Если σ — некоторая сигнатура, то под мультиалгеброй $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ с базисным множеством A сигнатуры σ понимается множество A с заданными на нем мультифункциями, соответствующими функциональным знакам сигнатуры σ, и с еще одной добавочной мультифункцией $p_0(x)$, не входящей в сигнатуру σ, служащей для интерпретации переменных и такой, что $p_0(a) = \{a\}$ для любого $a \in A$. Интерпретация термов сигнатуры σ мультифункциями на базисных множествах мультиалгебр сигнатуры σ основана на следующем:

1) переменные $x, y, z, \dots$ интерпретируются мультифункциями $p_0(x), p_0(y), p_0(z), \dots$;

2) если термы $t_1(\overline{x}_1), \dots, t_n(\overline{x}_n)$ проинтерпретированы на мультиалгебре $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ мультифункциями $g_1(\overline{x}_1), \dots, g_n(\overline{x}_n)$ соответственно и $f(x_1, \dots, x_n) \in \sigma$, то терм $f(t_1(\overline{x}_1), \dots, t_n(\overline{x}_n))$ интерпретируется на $\mathfrak{A}$ отображением $h : A^k \to P(A)$ (k — число различных переменных в термах $t_1(\overline{x}_1), \dots, t_n(\overline{x}_n)$) таким, что для любых $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n \in A$

$$h(\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n) = \bigcup \{f(c_1, \dots, c_n) \mid c_i \in g_i(\overline{a}_i)\}.$$

Пусть теперь $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ — произвольная универсальная алгебра сигнатуры σ и пусть для любого подмножества $X \subseteq A$ через $\langle X\rangle$ обозначено основное множество подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$, порожденной множеством X. Через $\Sigma = \langle p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\rangle$ обозначим сигнатуру, содержащую по одному n-местному функциональному символу p_n для любого натурального n. Под генерической мультиалгеброй $G(\mathfrak{A}) = \langle A; \Sigma\rangle$, соответствующей универсальной алгебре $\mathfrak{A}\langle A; \sigma\rangle$, будем понимать мультиалгебру сигнатуры Σ такую, что $p_n(a_1, \dots, a_n) = \langle\{a_1, \dots, a_n\}\rangle$ для любых $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n \in A$ и $p_0(a_1) = \{a_1\}$. Если $\mathfrak{K}$ — некоторый класс алгебр, то через $G(\mathfrak{K})$ будем обозначать соответствующий ему класс $\{G(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \mathfrak{K}\}$ генерических мультиалгебр.

В [1] в качестве основного логического языка для изучения генерических мультиалгебр предложен язык узкого исчисления предикатов сигнатуры Σ, в котором в качестве атомных формул рассматриваются включения $t_1(\overline{x}) \subseteq t_2(\overline{x})$, где $t_i(\overline{x})$ — термы сигнатуры Σ. При этом при интерпретации истинности этих атомных формул на мультиалгебрах знак $\subseteq$ интерпретируется как теоретико-множественное отношение "быть подмножеством", формулы этого языка будем далее называть элементарными, теории различных классов мультиалгебр в этом языке — элементарными теориями. В [1] показана аксиоматизируемость класса $\mathfrak{G} = \{G(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A}$ — произвольная универсальная алгебра$\}$ всех генерических мультиалгебр в этом языке и явно выписаны аксиомы P1–P3 для элементарной теории этого класса.

В связи с этим возникает естественный вопрос о разрешимости элементарной теории класса генерических мультиалгебр.

Теорема 1. *Элементарная теория класса всех генерических мультиалгебр неразрешима.*

Для доказательства утверждения теоремы достаточно построить элементарную интерпретацию класса всех антирефлексивных симметрических графов в элементарной теории класса всех генерических мультиалгебр. Пусть $G = \langle \Gamma; E\rangle$ — антирефлексивный симметрический граф ($E \subseteq \Gamma \times \Gamma$). Рассмотрим следующую универсальную алгебру $\mathfrak{A}_G = \langle A; f\rangle$ сигнатуры, состоящей из одной двухместной функции, где $A = \Gamma \bigcup E$. Обозначим далее элементы множества Γ латинскими, а элементы множества E — греческими буквами. При этом функцию f определим на A следующим образом:

$$f(a,b) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \langle a,b\rangle = \alpha \in E; \\ a, & \text{если } \langle a,b\rangle \notin E, \end{cases}$$

$$f(\alpha,\beta) = \begin{cases} a, & \text{если } \alpha = \langle a,b\rangle = \beta; \\ \alpha, & \text{если } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

$$f(a,\alpha) = \begin{cases} b, & \text{если } \langle a,b\rangle = \alpha; \\ \alpha & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$f(\alpha,a) = \begin{cases} b, & \text{если } \langle b,a\rangle = \alpha; \\ \alpha & \text{иначе}. \end{cases}$$

Заметим, что $x \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $\langle x\rangle_{\mathfrak{A}_G} = \{x\}$, т. е. множество Γ выделяется в мультиалгебре $G(\mathfrak{A}_G)$ элементарной формулой. Точно также непосредственно проверяется, что для любых $x, y \in \Gamma$ включение $\langle x, y\rangle \in E$ имеет место тогда и только тогда, когда $|\langle x, y\rangle_{\mathfrak{A}_G}| = 3$. Тем самым, действительно, существует элементарная интерпретация класса всех антирефлексивных симметрических графов в элементарной теории класса всех генерических мультиалгебр. В силу этого и хорошо известной наследственной неразрешимости элементарной теории класса антирефлексивных симметрических графов получаем утверждение теоремы. $\square$

В связи с утверждением теоремы 1 представляют интерес результаты о разрешимости элементарных теорий классов $G(\mathfrak{K}) = \{G(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \mathfrak{K}\}$ для различных конкретных классов $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр. Очевидно утверждение: если $\mathfrak{M}$ — локально-конечный аксиоматизируемый класс универсальных алгебр конечной сигнатуры с разрешимой элементарной теорией, то элементарная теория класса $G(\mathfrak{M})$ генерических мультиалгебр, порожденных $\mathfrak{M}$-алгебрами, разрешима.

Так, к примеру, будет разрешима элементарная теория класса $G(BA)$, где BA — многообразие всех булевых алгебр. В связи с этим полезно отметить, что в теории второго порядка многообразия BA, допускающей кванторы по подалгебрам, интерпретируется полная логика второго порядка [2].

Одним из естественных вопросов, связанных с понятием генерической мультиалгебры, является вопрос об аксиоматизируемости классов $G(\mathfrak{K})$ для основных классов универсальных алгебр: групп, колец, решеток, полурешеток, булевых алгебр и т. д. Следующее утверждение содержит жесткие ограничения для положительного решения этой проблемы.

Теорема 2. а) *Если $\mathfrak{K}$ — не локально-конечный аксиоматизируемый класс универсальных алгебр не более чем счетной сигнатуры, то класс $G(\mathfrak{K})$ не аксиоматизируем.*

б) *Если $\mathfrak{K}$ — локально-конечный универсальный класс универсальных алгебр конечной сигнатуры σ, то класс $G(\mathfrak{K})$ аксиоматизируем.*

Доказательство. а) В [1] для каждой генерической мультиалгебры $G(\mathfrak{A}) = \langle A; \Sigma\rangle$ сопоставлена естественным образом двуосновная алгебраическая система $G(\mathfrak{A})' = \langle A \bigcup \mathrm{Sub}_\omega(\mathfrak{A}); \Sigma, P, \in\rangle$, где $\mathrm{Sub}_\omega(\mathfrak{A})$ — совокупность конечнопорожденных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ (включая пустую подалгебру), одноместный предикат P выделяет подмножество A из $A \bigcup \mathrm{Sub}_\omega(\mathfrak{A})$ и $\in$ — теоретикомножественный предикат принадлежности между элементами A и $\mathrm{Sub}_\omega(\mathfrak{A})$. При этом для любых $a_1,\dots,a_n\in A$, $b\in\mathrm{Sub}_\omega(\mathfrak{A})$ и $p_n(x_1,\dots,x_n)\in\Sigma$ имеем

$$G(\mathfrak{A})'\vDash p_n(a_1,\dots,a_n)=b \iff G(\mathfrak{A})\vDash p_n(a_1,\dots,a_n)=b.$$

Если же среди $a_1,\dots,a_n\in A\bigcup\mathrm{Sub}_\omega(\mathfrak{A})$ есть элемент из $\mathrm{Sub}_\omega(\mathfrak{A})$, то

$$G(\mathfrak{A})'\vDash p_n(a_1,\dots,a_n)=\varnothing.$$

Пусть F — естественная трансляция элементарных формул языка мультиалгебр сигнатуры Σ в элементарные формулы сигнатуры $\langle\Sigma,P,\in\rangle$ (соответствующая стандартным трансляциям языка логики второго порядка и его фрагментов в элементарный язык двуосновных алгебраических систем при интерпретации подмножеств основного множества новыми элементами). При этом для любой элементарной формулы φ языка мультиалгебр и любой универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ имеет место эквивалентность

$$G(\mathfrak{A})\vDash\varphi \iff G(\mathfrak{A})'\vDash F(\varphi).$$

Класс $\mathfrak{G}'=\{G(\mathfrak{A})'\mid G(\mathfrak{A})\in\mathfrak{G}\}$ алгебраических систем сигнатуры $\langle\Sigma,P,\in\rangle$ является аксиоматизируемым. Обозначим элементарную теорию этого класса через T.

Так как аксиоматизируемый класс $\mathfrak{K}$ предполагается не локально-конечным, то пусть $\mathfrak{A}$ будет бесконечной n-порожденной универсальной $\mathfrak{K}$-алгеброй для некоторого $n\in\omega$. Допустим противное утверждению а) теоремы и пусть T_1 — это элементарная теория класса $G(\mathfrak{K})$ в языке мультиалгебр ($F(T_1)\supseteq T$). Тогда

$$G(\mathfrak{A})\vDash\ \forall x\,(x\in p_n(a_1,\dots,a_n))\,\&\,T_1$$

для некоторых $a_1,\dots,a_n\in\mathfrak{A}$. В силу отмеченного выше

$$G(\mathfrak{A})'\vDash F(\forall x\,(x\in p_n(a_1,\dots,a_n)))\,\&\,F(T_1).$$

Пусть $\mathfrak{D}$ — неглавный ультрафильтр на ω, тогда

$$(G(\mathfrak{A})')^\omega/\mathfrak{D}\vDash F(\forall x\,(x\in p_n(a_1,\dots,a_n)))\,\&\,F(T_1).$$

Так как мощность алгебраической системы $(G(\mathfrak{A})')^\omega/\mathfrak{D}$ континуальна и $(G(\mathfrak{A})')^\omega/\mathfrak{D}\vDash F(T_1)$, то найдется $\mathfrak{K}$-алгебра $\mathfrak{L}$ такая, что $G(\mathfrak{L})\cong(G(\mathfrak{A})')^\omega/\mathfrak{D}$. Поэтому найдется n-порожденная континуальная универсальная алгебра $\mathfrak{L}$ не более чем счетной сигнатуры. Полученное противоречие и доказывает неаксиоматизируемость класса $G(\mathfrak{K})$.

б) Пусть теперь $\mathfrak{K}$ — локально-конечный универсальный класс конечной сигнатуры. В силу локальной конечности и аксиоматизируемости $\mathfrak{K}$ существует функция $\varphi:\omega\to\omega$ такая, что для любого $n\in\omega$ любой n-порожденной $\mathfrak{K}$-алгебры $\mathfrak{A}$ мощность алгебры $\mathfrak{A}$ не превосходит $\varphi(n)$, т. е.

$$G(\mathfrak{K})\vDash\ \forall x_1,\dots,x_n\ \exists\,x_{n+1},\dots,x_{\varphi(n)}\,(p_n(x_1,\dots,x_n)=\{x_1,\dots,x_{\varphi(n)}\}).$$

Пусть $\mathfrak{A}^n_1,\dots,\mathfrak{A}^n_{l(n)}$ — совокупность всех не более чем $\varphi(n)$-элементных $\mathfrak{K}$-алгебр с точностью до изоморфизма и $D^n_k(x_1,\dots,x_{\varphi(n)})$ — диаграмма алгебры $\mathfrak{A}^n_k$ в сигнатуре σ. Через $S^n_k(x_1,\dots,x_{\varphi(n)})$ обозначим диаграмму мультиалгебры $G(\mathfrak{A}^n_k)$ в сигнатуре Σ. Пусть $T_{\mathfrak{K}}$ является следующей совокупностью формул языка генерических мультиалгебр:

$$\Big\{\forall x_1,\dots,x_n\ \exists\,x_{n+1},\dots,x_{\varphi(n)}\bigvee_{\pi\in S_n}\bigvee_{k=1}^{l(n)}S^n_k(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(\varphi(n))})\mid n\in\omega\Big\},$$

где S_n — симметрическая группа на множестве $\{1,\dots,\varphi(n)\}$. Очевидно, $G(\mathfrak{K})\vDash T_{\mathfrak{K}}$. Покажем, что верно и обратное, т. е. что любая мультиалгебра $\mathfrak{L}$ сигнатуры Σ, на которой истинны формулы из $T_{\mathfrak{K}}$, имеет вид $G(\mathfrak{A})$ для некоторой алгебры $\mathfrak{A}\in\mathfrak{K}$. Пусть C — основное множество алгебры $\mathfrak{L}$ и Ax — совокупность универсальных аксиом для класса $\mathfrak{K}$. Пусть $D(\mathfrak{L})$ — диаграмма алгебры в сигнатуре Σ. Так как Ax — множество универсальных аксиом, то достаточно доказать совместность теории $D(\mathfrak{L})\bigcup \mathrm{Ax}$ сигнатуры $\Sigma\bigcup\sigma$. По теореме компактности достаточно доказать совместность теории $D(\mathfrak{L})\bigcup\{\forall\,\overline{x}\phi(\overline{x})\}$ для любой формулы $\forall\,\overline{x}\phi(\overline{x})$ из Ax или, что то же самое, показать, что для любых $\overline{c}\in\mathfrak{L}$ совокупность формул $D(\mathfrak{L})\bigcup\phi(\overline{c})$ совместна. Пусть $\overline{c}=\langle c_1,\ldots,c_n\rangle$. Поскольку $\mathfrak{K}\vDash T_{\mathfrak{K}}$, то найдутся $c_{n+1},\ldots,c_{\varphi(n)}\in\mathfrak{L}$ и $\pi\in S_n$ такие, что

$$\mathfrak{L}\vDash S^n_k(c_{\pi(1)},\ldots,c_{\pi(\varphi(n))})$$

для некоторого $k\leq l(n)$. По построению $\mathfrak{L}\restriction\{c_{\pi(1)},\ldots,c_{\pi(\varphi(n))}\}\cong G(\mathfrak{A}^n_k)$, $\mathfrak{A}^n_k\vDash D(c_1,\ldots,c_{\varphi(n)})$ и, значит, $\mathfrak{A}^n_k\vDash\phi(c_1,\ldots,c_n)$. Тем самым на множестве $\{c_1,\ldots,c_{\varphi(n)}\}$ определимы функции сигнатуры σ так, что на соответствующем обогащении мультиалгебры $\mathfrak{L}$ имеет место

$$\mathfrak{L}\vDash D(\mathfrak{L})\bigcup\{\phi(\overline{c})\}.$$

Таким образом, доказана совместность теории $D(\mathfrak{L})\bigcup\mathrm{Ax}$, т. е. то, что на множестве C можно так определить функции сигнатуры σ, что для любого n, для любых $c_1,\ldots,c_n\in\mathfrak{L}$ имеет место равенство $p_n(c_1,\ldots,c_n)=\langle c_1,\ldots,c_n\rangle$, где $\langle c_1,\ldots,c_n\rangle$ — подалгебра, порожденная множеством $\{c_1,\ldots,c_n\}$ в сигнатуре σ и при этом на соответствующей алгебре сигнатуры σ будут истинны формулы из Ax. Иначе говоря, найдется алгебра $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{K}$ такая, что $\mathfrak{K}=G(\mathfrak{A})$. $\square$

Из утверждения теоремы, в частности, следует неаксиоматизируемость в элементарном языке мультиалгебр классов генерических мультиалгебр, соответствующих классам всех групп, колец, решеток, и аксиоматизируемость классов генерических мультиалгебр, соответствующих классам всех полурешеток и булевых алгебр.

В связи с этим возникает естественный вопрос о нахождении достаточно простой системы аксиом для классов $G(SL)$ и $G(BA)$, где SL — класс всех полурешеток, BA — класс всех булевых алгебр. Оставляя открытым вопрос о таковой системе аксиом для $G(SL)$, укажем достаточно простую систему аксиом для класса $G(BA)$.

Пусть $\mathfrak{L}(2^n)$ — булева алгебра, содержащая 2^n элементов, и $\mathfrak{L}^*$ — булева алгебра, двойственная булевой алгебре $\mathfrak{L}$. Хорошо известно, что решетка подалгебр $\mathrm{Sub}(\mathfrak{L})$ булевой алгебры $\mathfrak{L}$ (как конкретная решетка подмножеств основного множества алгебры $\mathfrak{L}$) определяет на этом основном множестве булеву алгебру $\mathfrak{L}$ с точностью до двойственной. Отсюда, в частности, следует, что для любых двух конечных булевых алгебр $\mathfrak{L}_1=\langle B;\wedge_1,\vee_1,\neg_1,0_1,1_1\rangle$ и $\mathfrak{L}_2=\langle B;\wedge_2,\vee_2,\neg_2,0_2,1_2\rangle$, заданных на одном и том же конечном множестве B, из равенства $G(\mathfrak{L}_1)=G(\mathfrak{L}_2)$ следует либо $\mathfrak{L}_1=\mathfrak{L}_2$, либо $\mathfrak{L}_1=\mathfrak{L}^*_2$. Пусть теперь $D(x_1,\ldots,x_{2^n})$ — диаграмма мультиалгебры $G(\mathfrak{L}(2^n))$. Рассмотрим следующую систему аксиом.

Ax_1) Аксиомы P 1)–3) из работы [1].

Ax_2) $\forall\,x_1,x_2,x_3\,\Big(\bigvee\limits_{m=1}^{8}\,\exists\,y_1,\ldots,y_{2^m}(p_3(x_1,x_2,x_3)=\{y_1,\ldots,y_{2^m}\}\,\&\,D_{2^m}(y_1,\ldots,y_{2^m}))\Big)$.

Ax_3) Для любого $n\in\omega$ $\forall\,x_1,\ldots,x_n,\ y\Big(y\in p_n(x_1,\ldots,x_n)\implies\exists\,z_1,\ldots,z_{2^{2^n}-1},t_1,\ldots,t_{2^{2^n}-1}$, $\exists\,u_1,\ldots,u_{2^{2^n}-1},v_1,\ldots,v_{2^{2^n}-1},\ \exists\,r_1,\ldots,r_{2^{2^n}-1},q_1,\ldots,q_{2^{2^n}-1}(u_1,v_1,r_1,q_1\in\{x_1,\ldots,x_n\}\&\mathop{\&}\limits_{i=2}^{2^{2^n}-1}$ $u_i,v_i,r_i,q_i\in\{x_1,\ldots,x_n,z_1,\ldots,z_i,t_1,\ldots,t_i\}\&\mathop{\&}\limits_{i=1}^{2^{2^n}-1}(z_i\in p_2(u_i,v_i)\,\&\,t_i\in p_2(r_i,q_i))\,\&\,y\in p_2(z_{2^{2^n}-1},t_{2^{2^n}-1}))\Big)$.

Теорема 3. *Совокупность* Ax_1)–Ax_3) *является системой аксиом для класса генерических мультиалгебр* $G(BA)$.

Доказательство. Для любой булевой алгебры $\mathfrak{L}$, очевидно, имеет место $G(\mathfrak{L})\vDash\mathrm{Ax}_1)\,\&\,\mathrm{Ax}_2)\,\&\,\mathrm{Ax}_3)$. Покажем, что верно и обратное. В силу теоремы 1 из [1] и Ax_1) достаточно показать, что если для некоторой универсальной алгебры $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma\rangle$ имеет место $G(\mathfrak{A})\vDash\mathrm{Ax}_2)\,\&\,\mathrm{Ax}_3)$, то найдется булева алгебра $\mathfrak{L}=\langle A;\wedge,\vee,\neg,0,1\rangle$ такая, что $G(\mathfrak{A})=G(\mathfrak{L})$.

Действительно, в силу аксиомы Ax_2) для любых $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{A}$ и для некоторого $m \leq 8$ найдутся элементы $y_1, \ldots, y_{2^m} \in A$ такие, что $p_3(x_1, x_2, x_3) = \{y_1, \ldots, y_{2^m}\}$ и $G(\mathfrak{A}) \vDash D_{2^m}(y_1, \ldots, y_{2^m})$. Тем самым на множестве $Y_{\{x_1,x_2,x_3\}} = \{y_1, \ldots, y_{2^m}\}$ можно определить операции $\wedge_{\{x_1,x_2,x_3\}}$, $\vee_{\{x_1,x_2,x_3\}}$, $\neg_{\{x_1,x_2,x_3\}}$ и константы $0_{\{x_1,x_2,x_3\}}$, $1_{\{x_1,x_2,x_3\}}$ так, что

$$\mathfrak{L}_{\{x_1,x_2,x_3\}} = \langle Y_{\{x_1,x_2,x_3\}}; \wedge_{\{x_1,x_2,x_3\}}, \vee_{\{x_1,x_2,x_3\}}, \neg_{\{x_1,x_2,x_3\}}, 0_{\{x_1,x_2,x_3\}}, 1_{\{x_1,x_2,x_3\}}\rangle$$

будет булевой алгеброй и $G = (\mathfrak{L}_{\{x_1,x_2,x_3\}}) = G(\mathfrak{A}) \restriction Y_{\{x_1,x_2,x_3\}}$. При этом операции $\wedge$, $\vee$, $\neg$, 0, 1 на $\mathfrak{L}_{\{x_1,x_2,x_3\}}$ (в силу замеченного выше) определяются с точностью до двойственности. Тем самым базисное множество A генерической мультиалгебры $G(\mathfrak{A})$ оказывается покрытым 3-порожденными подмножествами $p_3(x_1, x_2, x_3)$, на каждом из которых определены операции $\wedge_{\{x_1,x_2,x_3\}}$, $\vee_{\{x_1,x_2,x_3\}}, \ldots$ булевой алгебры и эти самые операции определены однозначно с точностью до двойственности. В силу последнего можно глобально определить операции $\wedge$, $\vee$, $\neg$, 0, 1 на множестве A так, что для любых $x_1, x_2, x_3 \in A$ операции $\wedge$, $\vee$, $\neg$, 0, 1, ограниченные на множество $p_3(x_1, x_2, x_3)$, совпадают с операциями $\wedge_{\{x_1,x_2,x_3\}}$, $\vee_{\{x_1,x_2,x_3\}}$. Так как аксиомы булевых алгебр универсальны и зависят не более чем от трех переменных, то $\langle A; \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ является булевой алгеброй. Обозначим эту булеву алгебру через $\mathfrak{L}$. Пусть $p_n^{\mathfrak{L}}(x_1, \ldots, x_n)$ совпадает с основным множеством подалгебры булевой алгебры $\mathfrak{L}$, порожденной элементами $x_1, \ldots, x_n$ для любых $x_1, \ldots, x_n \in A$. В силу построения $\mathfrak{L}$ для любых $x_1, x_2, x_3 \in A$ $p_3(x_1, x_2, x_3) = p_3^{\mathfrak{L}}(x_1, x_2, x_3)$. В силу же истинности на мультиалгебрах $G(\mathfrak{A})$ и $G(\mathfrak{L})$ аксиомы Ax_3) равенство $p_n(x_1, \ldots, x_n) = p_n^{\mathfrak{L}}(x_1, \ldots, x_n)$ будет иметь место для любого $n \in \omega$ и любых $x_1, \ldots, x_n \in A$, т. е. $G(\mathfrak{A}) = G(\mathfrak{L})$. $\square$

В заключение отметим, что для любого аксиоматизируемого класса $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр числа Ханфа и Левенгейма для класса мультиалгебр $G(\mathfrak{K})$ не превосходят аналогичных чисел для логик вида $L_{\omega_\alpha,\omega}$, где $\aleph_\alpha = \max\{|\sigma|, \aleph_0\}$ и σ — сигнатура класса $\mathfrak{K}$. Действительно, числа Левенгейма и Ханфа для класса $G(\mathfrak{K})$ совпадают очевидным образом с числами Левенгейма и Ханфа класса $G(\mathfrak{K})'=\{G(\mathfrak{A})' \mid \mathfrak{A}\in\mathfrak{K}\}$ двуосновных алгебраических систем сигнатуры $\langle \Sigma, P, \in\rangle$, указанного в доказательстве теоремы 2. При этом для бесконечных алгебр $\mathfrak{A}$ имеет место равенство $|\mathfrak{A}| = |G(\mathfrak{A})| = |G(\mathfrak{A})'|$. В то же время класс $G(\mathfrak{K})'$ является проективным в логике $L_{\omega_\alpha,\omega}$. Это и влечет указанные выше неравенства для чисел Левенгейма и Ханфа класса $G(\mathfrak{K})'$ и логики $L_{\omega_\alpha,\omega}$.

Литература

1. Pinus A.G., Madarasz R. *On generic multialgebras* // Novi Sad J. Math. – 1997. – V. 27. – № 2. – P. 77–82.
2. Пинус А.Г. *Теории второго порядка конгруэнц-дистрибутивных многообразий* // Алгебра, логика и приложения. – Изд-во Иркутск. ун-та, Иркутск, 1994. – С. 102–110.

Новосибирский электротехнический институт

Поступила
01.10.1996