ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 4 (539)

УДК 517.946

Н.А. КУЛЬСАРИНА, В.Ф. ГИЛИМШИНА

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ $t \to \infty$

Введение

Пусть Ω — произвольная неограниченная область полупространства $\mathbb{R}^n_+$, $n \geq 2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_1 > 0$. Рассмотрим в цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ линейное параболическое уравнение второго порядка

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(t,x) u_{x_i})_{x_j}. \tag{1}$$

Коэффициенты уравнения $a_{ij}(t,x)$ — измеримые функции, удовлетворяющие условию равномерной эллиптичности с постоянными γ, Γ.

В работе изучается скорость убывания при $t \to \infty$ решения первой смешанной задачи для уравнения (1) с начально-краевыми условиями

$$u(t,x)|_{x \in \partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \varphi(x) \in L_2(\Omega). \tag{3}$$

Исследования зависимости скорости убывания решений смешанных задач для параболического уравнения от геометрических характеристик неограниченной области начались в работах [1]–[3]. В них при определенных условиях изопериметрического характера на область получена точная оценка для решения второй смешанной задачи

$$\sup_{x \in \Omega} |\mathbf{u}(t,x)| \leq C \|\varphi\|_{L_1(\Omega)} / v(\sqrt{t}), \quad v(r) = \operatorname{mes}\{x \in \Omega \mid |x| < r\}.$$

Эти исследования были продолжены в работах [4], [5] для второй смешанной задачи и в [6], [7] — для первой смешанной задачи. Известны также результаты для параболических уравнений высокого порядка [8], [9].

В работах [6], [7] о скорости убывания решения первой смешанной задачи (1)–(2) накладывается ряд технических требований как при получении оценки сверху, так и при доказательстве точности этой оценки. В частности, в работе [7] для трубчатых областей вида

$$\Omega(f) = \{x \in R^n, \ x = (x_1, x') \mid |x'| < f(x_1)\}$$

эти условия таковы

$$\lim_{r \to \infty} f(r) = \infty, \quad \lim_{r \to \infty} r/f(r) = \infty, \quad \lim_{r \to \infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r \frac{ds}{f(s)} = \infty. \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, конкурс “Агидель”, грант № 05-01-97912.

Предполагается также существование постоянной $A > 0$ такой, что для всех достаточно удаленных точек $(z, 0)$ оси O_{x_1} выполнены неравенства

$$A \int_{z-r/2}^{z+r/2} \frac{ds}{f(s)} \geq 1, \quad r(z) = \operatorname{dist}(\partial\Omega, (z, 0)), \quad z \geq R_0. \tag{5}$$

При этих условиях установлены оценки решения с неотрицательной начальной функцией $\varphi \not\equiv 0$

$$m_1 \exp\Big(- K_1 \int_1^{\rho(t)} ds/f(s)\Big) \leq \sup_x u(t, x) \leq M_1 \exp\Big(- k_1 \int_1^{\rho(t)} ds/f(s)\Big). \tag{6}$$

Здесь функция $\rho(t)$ определена равенством $\rho_m^2(\rho) \int\limits_1^{\rho} \frac{ds}{f(s)} = t$, где $\rho_m(z)$ — радиус наибольшего шара, помещающегося в $\Omega \cap \{x_1 < z\}$. Постоянные m_1, M_1, K_1, k положительны.

В данной работе накладывается лишь одно условие на область, обеспечивающее точные оценки сверху и снизу скорости убывания решения при возрастании времени. Класс областей, удовлетворяющих этому условию, шире, чем классы областей из работ [6], [7], для которых доказаны точные оценки.

Введем обозначения

$$\Omega_a^b = \{x \in \Omega \mid a < x_1 < b\}, \quad S_z = \{x \in \Omega \mid x_1 = z\},$$

причем параметры $a = 0$ и $b = \infty$ могут быть опущены.

Толщиной $d(S, l)$ множества $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$ вдоль прямой $l \subset \mathbb{R}^{n-1}$ назовем диаметр ортогональной проекции множества на эту прямую. В частности, $d(\mathbb{R}^{n-1}, l) = \infty$. Минимальной толщиной множества S назовем величину $d(S) = \inf\limits_l d(S, l)$, где нижняя грань берется по всем прямым.

Определим функцию $h(z) = d(S_z)$, принимающую значения из интервала $(0, \infty]$.

На область накладывается лишь одно

Условие В: существует $\theta > 0$ такое, что для любого $z > y_0$ выполняется неравенство

$$\inf_{[z-s, z+s]} h(t) \leq \theta r(z), \quad s = r(z)/2.$$

Легко видеть, что условие (5) достаточно для выполнения этого неравенства.

Пусть y_i, $i = \overline{0, \infty}$, — последовательность чисел, определяемая равенствами $y_{i+1} = y_i + r(\frac{y_i + y_{i+1}}{2})$. Положим $y(N) = \max\{y_0, y_1 - y_0, \ldots, y_N - y_{N-1}\}$ и пусть $N(t) = \max\{N \mid Ny^2(N) \leq t\}$.

Будем предполагать, что начальная функция $\varphi(x)$ имеет ограниченный носитель. Иначе, как показано в ([10], с. 67), нельзя получить оценку решения более сильную, чем оценка Нэша [11] для задачи Коши

$$|u(t, x)| \leq Ct^{-\frac{n}{4}} \|u\|_{L_2(\Omega)} \tag{7}$$

с постоянной C, зависящей только от n, Γ и γ.

Сдвигая, если нужно, нумерацию $y_N = y_{N+k}$, считаем, что $\operatorname{supp} \varphi(x) \subset \Omega^{y_0}$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть область Ω удовлетворяет условию* В. *Тогда найдутся положительные числа k и M, зависящие только от γ, Γ, θ, n и такие, что решение задачи* (1)–(3) *с начальной функцией $\varphi(x)$ ($\operatorname{supp} \varphi(x) \subset \Omega^{y_0}$) при всех $t \geq 2y^2(2)$, $x \in \Omega$, удовлетворяет оценке*

$$|u(t, x)| \leq Mt^{-\frac{n}{4}} \exp(-kN(t)) \|u\|_{L_2(\Omega)}. \tag{8}$$

Если начальная функция неотрицательна и $\varphi \not\equiv 0$, то найдутся положительные числа K, M_1 и возрастающая к бесконечности последовательность t_m такая, что

$$\sup_{x \in \Omega} u(t_m, x) \geq M_1 \exp(-KN(t_m)), \quad m = \overline{1, \infty}. \tag{9}$$

Выведем из теоремы 1 для области, удовлетворяющей условию (5), неравенства (6). Тем самым покажем, что излишними являются условия (4).

Пользуясь (5), установим неравенства

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{y_0}^{y_N}\frac{ds}{f(s)} \le N \le A\int_{y_0}^{y_N}\frac{ds}{f(s)}. \tag{10}$$

Очевидно, $1 \le A \int\limits_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{ds}{f(s)}$. Складывая по i, устанавливаем правое неравенство (10). Далее, поскольку $r(z) = y_{i+1} - y_i = \operatorname{dist}(\partial\Omega, (z,0))$, $z = (y_i + y_{i+1})/2$, то $\min\limits_{[y_i,y_{i+1}]} f(s) \ge \frac{\sqrt{3}}{2} r(z)$. Поэтому

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}}\frac{ds}{f(s)} \le \frac{y_{i+1}-y_i}{\min\limits_{[y_i,y_{i+1}]} f(s)} \le \frac{2}{\sqrt{3}},$$

откуда следует левая часть (10).

При $y(N) > y_0$ легко установить неравенства

$$\frac{y(N)}{2} \le \rho_m(y_N) \le 2y(N). \tag{11}$$

Следствием (10) и (11) является соотношение

$$\varepsilon\int_{y_0}^{\rho(t)}\frac{ds}{f(s)} \le N(t) \le \varepsilon^{-1}\int_{y_0}^{\rho(t)}\frac{ds}{f(s)}. \tag{12}$$

Как уже отмечалось, условие (5) влечет условие B, и для такой трубчатой области справедливы оценки теоремы 1, из которых при помощи (12) выводим (6).

Нетрудно привести примеры областей, для которых условие (5) не выполнено, а условие B выполнено. Можно, например, положить $f(i) = i^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, и $f(s) = \infty$ при $s \ne i$, $i = \overline{1,\infty}$. Тогда верхняя оценка (6) становится тривиальной, а нижняя оценка (6) не справедлива. Теорема 1 дает точную оценку для этой области.

1. Вспомогательные утверждения

Введем обозначения $D_a^b = (a,b)\times\Omega$, $D^T = D_0^T$. Через $\|u\|_{D^T}$ будем обозначать норму в $L_2(D^T)$. Гильбертово пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(D^T)$ определим как пополнение множества всех гладких в D^T функций с ограниченным носителем, равных нулю в окрестности боковой поверхности $(0,T)\times\partial\Omega$, по норме

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(D^T)} = \|u\|^2_{D^T} + \|\nabla u\|^2_{D^T} + \|u_t\|^2_{D^T},$$

гильбертово пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{0,1}(D^T)$ — как пополнение того же множества функций по норме

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{0,1}(D^T)} = \|u\|^2_{D^T} + \|\nabla u\|^2_{D^T}.$$

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1)–(3) в области D^T будем называть функцию $u(t,x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{0,1}(D^T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{D^T}\Big(-uv_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_i}v_{x_j}\Big)dx\,dt = \int_\Omega \varphi(x)v(0,x)dx \tag{13}$$

для любой функции $v(t,x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(D^T)$ такой, что $v(T,x) = 0$.

Функция $u(t,x)$ — решение задачи (1)–(3) в D, если при всех $T > 0$ она является решением задачи (1)–(3) в D^T.

Решение задачи (1)–(3) существует и единственно. Существование доказывается методом Галёркина.

Вариант неравенства Стеклова–Фридрихса устанавливает

Лемма 1. *Пусть* $u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ *и при некотором* $\theta > 0$ *выполнено условие*

$$\min_{[y,z]} h(t) \le \theta(z-y), \quad z > y.$$

Тогда справедлива оценка

$$\int_{\Omega_y^z} u^2 dx \le (3+4\theta^2)(z-y)^2 \int_{\Omega_y^z} |\nabla u|^2 dx. \tag{14}$$

Доказательство. Известно неравенство Стеклова–Фридрихса для функции $\mathbf{g} \in C^1[0,l]$, $\mathbf{g}(0) = 0$,

$$\int_0^l \mathbf{g}^2(x)dx \le l^2 \int_0^l (\mathbf{g}'(x))^2 dx. \tag{15}$$

Для $\mathbf{g} \in C^1[-l,l]$ справедливо неравенство

$$\int_0^l \mathbf{g}^2(x)dx \le 2\int_{-l}^0 \mathbf{g}^2(x)dx + 4l^2 \int_{-l}^l (\mathbf{g}'(x))^2 dx. \tag{16}$$

Действительно, из равенства

$$\mathbf{g}(x) = \mathbf{g}(y) + \int_y^x \mathbf{g}'(t)dt$$

вытекает

$$\mathbf{g}^2(x) \le 2\mathbf{g}^2(y) + 2\left(\int_y^x \mathbf{g}'(t)dt\right)^2 \le 2\mathbf{g}^2(y) + 2\int_y^x 1^2 dt \int_y^x (\mathbf{g}'(t))^2 dt \le 2\mathbf{g}^2(y) + 4l\int_{-l}^l (\mathbf{g}'(t))^2 dt.$$

Отсюда интегрированием по x и y выводим (16).

Обозначим через r^* точку, в которой $h(r^*) = \min\limits_{x_1 \in [y,z]} h(x_1)$. Пусть ось Ox_2 выбрана в направлении, в котором сечение $S_{r^*} = \Omega \cap \{x_1 = r^*\}$ имеет минимальную толщину. Рассмотрим области

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid r^* < x_1 < z,\ |x_2| > h(r^*)\},\\
Q_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid y < x_1 < r^*,\ |x_2| > h(r^*)\},\\
Q_3^+ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid y < x_1 < z,\ 0 < x_2 < h(r^*)\},\\
Q_3^- &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid y < x_1 < z,\ -h(r^*) < x_2 < 0\}.
\end{aligned}$$

Множество $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = r^*,\ |x_2| > h(r^*)\}$ расположено вне Ω, и на нем $u = 0$. Поэтому, используя неравенство (15), получим

$$\int_{Q_1} u^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \dots dx_3 \int_{|x_2|>h(r*)} dx_2 \int_{r^*}^z u^2 dx_1 \le$$
$$\le |z-r^*|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \dots dx_3 \int_{|x_2|>h(r*)} dx_2 \int_{r^*}^z |\nabla u|^2 dx_1 \le |z-y|^2 \int_{Q_1} |\nabla u|^2 dx.$$

Для области Q_2 и для $Q_1 \cup Q_2$ справедливы аналогичные оценки.

Через Q^+, Q^- будем обозначать части области Q, расположенные в полупространствах $\{x_2>0\}$ и $\{x_2<0\}$ соответственно. Обозначая $h(r^*)=l$ и применяя неравенство (16), имеем

$$\int_{Q_3^-} u^2dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \dots dx_3 \int_y^z dx_1 \int_{-l}^0 u^2 dx_2 \le 2\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \dots dx_3 \int_y^z dx_1 \int_{-2l}^{-l} u^2dx_2 +$$
$$+ 4l^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \dots dx_3 \int_y^z dx_1 \int_{-2l}^0 |\nabla u|^2 dx_2 \le 2\int_{(Q_1\cup Q_2)^-} u^2dx + 4l^2 \int_{(\Omega_y^z)^-} |\nabla u|^2 dx \le$$
$$\le 2|z-y|^2 \int_{(Q_1\cup Q_2)^-} |\nabla u|^2 dx + 4l^2 \int_{(\Omega_y^z)^-} |\nabla u|^2 dx.$$

Для области Q_3^+ оценка аналогична полученной. Отсюда $\int\limits_{\Omega_y^z} u^2dx = \int\limits_{Q_1\cup Q_2\cup Q_3} u^2dx \le 3|z-y|^2 \times \int\limits_{Q_1\cup Q_2} |\nabla u|^2dx + 4i^2 \int\limits_{\Omega_y^z} |\nabla u|^2 dx$. Из последнего непосредственно вытекает (14). $\square$

Утверждение 1. *Для обобщенного решения $u(t,x)$ задачи (1)–(3) при всех $t\ge 0$ справедливо равенство*

$$\int_\Omega u^2(t,x)dx = \int_\Omega \varphi^2(x)dx - 2\int_0^t \int_\Omega \nabla u(\tau,x) A(\tau,x) \nabla u(\tau,x) dx\, d\tau. \tag{17}$$

Доказательство утверждения 1 для общего линейного уравнения приведено в ([12], с. 509) в случае ограниченной области. Для неограниченной области оно проводится без существенных изменений.

Утверждение 2 ([12]). *Пусть $\Omega' \subset \Omega''$ и неотрицательные начальные функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ удовлетворяют неравенству $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ для почти всех $x\in\Omega$. Тогда решения $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ соответствующих задач (1)–(3) удовлетворяют для всех $t>0$ и $x\in\Omega'$ неравенству $u_1(t,x)\le u_2(t,x)$.*

Из неравенства (15) сразу следует

$$\int_{\Omega^{y_0}} v^2 dx \le y_0^2 \int_{\Omega^{y_0}} |\nabla v|^2 dx, \quad v\in C_0^\infty(\Omega). \tag{18}$$

Лемма 2. *Пусть θ — постоянная из условия* B. *Для любой функции $v\in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\int_{\Omega^{y_N}} v^2(x)dx \le C(\theta) y^2(N) \int_{\Omega^{y_N}} |\nabla v|^2(x) dx, \quad N=\overline{0,\infty}.$$

Доказательство. Благодаря условию B, при каждом $i=\overline{0,\infty}$ для области $\Omega_{y_i}^{y_{i+1}}$ применима лемма 1. Имеем оценку

$$\int_{\Omega_{y_i}^{y_{i+1}}} v^2(x)dx \le C(\theta)(y_{i+1}-y_i)^2 \int_{\Omega_{y_i}^{y_{i+1}}} |\nabla v|^2(x)dx. \tag{19}$$

Суммируя неравенства (18), (19) и пользуясь тем, что $(y_{i+1}-y_i)\le y(N)$, получим утверждение леммы 2. $\square$

2. Оценка сверху

Сначала докажем утверждение о поведении решения при большом x.

Утверждение 3. *Для обобщенного решения $u(t,x)$ задачи (1)–(2) в области Ω, удовлетворяющей условию* B, *при всех $t \geq 0$, $N \geq 2$ справедлива оценка*

$$\int_{\Omega_{y_N}} u^2(t)dx \leq ke^{-\frac{N}{k}}\|\varphi\|^2,$$

где постоянная $k > 0$ зависит только от γ, Γ, θ.

Доказательство. Выберем число $k > 1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\Gamma\sqrt{C(\theta)}e^{\frac{1}{k}}}{k} \leq \gamma. \tag{20}$$

Рассмотрим неотрицательную непрерывную неубывающую функцию, равную нулю при $x_1 \leq y_0$ и единице при $x_1 > y_N$, а в остальном определенную формулой

$$\xi(x_1) = \begin{cases} ax_1 + b, & \text{если } y_0 < x_1 \leq y_1; \\ \exp\left(\frac{i-N+x_1-y_i}{k(y_{i+1}-y_i)}\right), & \text{если } y_i < x_1 \leq y_{i+1}, \quad i = \overline{1, N-1}. \end{cases}$$

Нетрудно установить следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \xi_{x_1} = \frac{\xi}{k(y_{i+1}-y_i)}, \quad x_1 \in [y_i, y_{i+1}], \quad i = \overline{1, N-1}; \\ \xi_{x_1} = \frac{e^{\frac{1-N}{k}}}{y_1 - y_0}, \quad x_1 \in [y_0, y_1]; \\ \frac{\xi(y_{i+1})}{\xi(y_i)} = e^{\frac{1}{k}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad \xi(y_1) = e^{\frac{1-N}{k}}. \end{gathered} \tag{21}$$

Осреднением Стеклова функции $v(t,x)$ является

$$v_h(t,x) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} v(\tau, x)d\tau.$$

В интегральном тождестве (13) положим $v = \omega_{-h}$, $h \leq \delta$, где $\omega(\tau, x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{0,1}(D^t)$ и продолжена нулем вне интервала $(0,t) \subset (0, T - \delta)$. В результате несложных преобразований получим равенство

$$\int_{D^t}\left((u_h)_\tau\omega + \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\right)_h \omega_{x_j}\right)dx\,d\tau = 0.$$

Подставим в него $\omega = u_h(\tau, x)\xi(x_1)$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_h^2\xi\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} dx + \int_{D^t}\left(\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\right)_h (u_h\xi)_{x_j}\right)dx\,d\tau = 0.$$

Из принадлежности функции u пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^{0,1}(D^T)$ по лемме из ([12], с. 101) следует, что ее осреднение Стеклова сходится к самой функции в $D^{T-\delta}$ по норме пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{0,1}(D^{T-\delta})$. Перейдя в последнем равенстве к пределу при $h \to 0$, получим

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2\xi\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} dx + \int_{D^t}\left(\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\right)(u\xi)_{x_j}\right)dx\,d\tau = 0.$$

Используя условие равномерной эллиптичности, устанавливаем

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} u^2\xi\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}dx + \gamma\int_{D^t}\xi|\nabla u|^2 dx\,d\tau \le \Gamma\int_{D^t}|u|\,|\nabla u||\nabla\xi|dx\,d\tau. \tag{22}$$

Рассмотрим правую часть последнего неравенства

$$\Gamma\int_{D^t}|u|\,|\nabla u|\xi_{x_1}dx\,d\tau = \int_0^t\int_{\Omega_{y_0}^{y_1}}\Gamma|u|\,|\nabla u|\xi_{x_1}dx\,d\tau + \sum_{i=1}^{N-1}\int_0^t\int_{\Omega_{y_i}^{y_{i+1}}}\Gamma|u|\,|\nabla u|\frac{\xi(x_1)}{k(y_{i+1}-y_i)}dx\,d\tau.$$

Обозначая первое слагаемое правой части через I_1 и преобразуя второе слагаемое, получим

$$\int_{D^t}\Gamma|u|\,|\nabla u|\xi_{x_1}dxd\tau \le I_1 + \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\Gamma}{k}\int_0^t\int_{\Omega_{y_i}^{y_{i+1}}}\xi\left(\frac{|\nabla u|^2\sqrt{C(\theta)}}{2} + \frac{u^2}{2\sqrt{C(\theta)}(y_{i+1}-y_i)^2}\right)dx\,d\tau. \tag{23}$$

Пользуясь (19), оценим интеграл

$$\int_{\Omega_{y_i}^{y_{i+1}}}\xi u^2 dx \le \xi(y_{i+1})\int_{\Omega_{y_i}^{y_{i+1}}}u^2dx \le C(\theta)(y_{i+1}-y_i)^2\xi(y_{i+1})\int_{\Omega_{y_i}^{y_{i+1}}}|\nabla u|^2dx \le$$

$$\le C(\theta)(y_{i+1}-y_i)^2\frac{\xi(y_{i+1})}{\xi(y_i)}\int_{\Omega_{y_i}^{y_{i+1}}}\xi|\nabla u|^2dx \le C(\theta)(y_{i+1}-y_i)^2e^{\frac{1}{k}}\int_{\Omega_{y_i}^{y_{i+1}}}\xi|\nabla u|^2dx.$$

Тогда из (23), учитывая последнее неравенство и (20), получим

$$\int_{D^t}\Gamma|u|\,|\nabla u|\xi_{x_1}dx\,d\tau \le I_1 + \int_0^t\int_{\Omega_{y_1}^{y_N}}\xi\gamma|\nabla u|^2dx\,d\tau.$$

Отсюда, принимая во внимание (22), имеем

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}u^2\xi\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}dx + \gamma\int_0^t\int_{\Omega_{y_N}^{\infty}}\xi|\nabla u|^2dx\,d\tau \le I_1. \tag{24}$$

Оценим I_1. Ввиду (21) имеем

$$I_1 = \int_0^t\int_{\Omega_{y_0}^{y_1}}\Gamma|u|\,|\nabla u|\frac{e^{\frac{1-N}{k}}}{y_1-y_0}dx\,d\tau.$$

Положим $\varepsilon = \sqrt{C(\theta)}(y_1-y_0)$. Учитывая, что согласно (19)

$$\int_{\Omega_{y_0}^{y_1}}|u|\,|\nabla u|dx \le \int_{\Omega_{y_0}^{y_1}}\left(\frac{|\nabla u|^2\varepsilon}{2} + \frac{|u|^2}{2\varepsilon}\right)dx \le \int_{\Omega_{y_0}^{y_1}}\varepsilon|\nabla u|^2dx,$$

будем иметь

$$I_1 \le \int_0^t\int_{\Omega_{y_0}^{y_1}}\Gamma e^{\frac{1-N}{k}}\sqrt{C(\theta)}|\nabla u|^2dx.$$

Теперь, пользуясь утверждением 1, получим

$$I_1 \le \frac{\Gamma}{2\gamma}e^{\frac{1-N}{k}}\sqrt{C(\theta)}\|\varphi\|^2.$$

Наконец, из (24) и равенства $u^2\xi|_{t=0} = 0$ имеем

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{y_N}^{\infty}}u^2dx \le \frac{\Gamma}{2\gamma}e^{\frac{1-N}{k}}\sqrt{C(\theta)}\|\varphi\|^2.$$

Утверждение 3 следует из (20). $\square$

Доказательство оценки (8). Для любого $t \geq 2y_2(2)$ выполнено неравенство $N(t) \geq 2$. Зафиксируем произвольное $t \geq 2y_0$ и $N \geq 2$. Согласно утверждению 3 получим

$$\int_{\Omega^N} u^2(t)dx \leq ke^{-\frac{N}{k}}\|\varphi\|^2.$$

Введем обозначение $\varepsilon(N) = k(e^{-\frac{N}{k}})\|\varphi\|^2$. Тогда при всех $\tau > 0$ имеем

$$\int_\Omega u^2(\tau,x)dx \leq \varepsilon(N) + \int_{\Omega^{y_N}} u^2(\tau,x)dx. \tag{25}$$

Положим $\nu = (C(\theta)y^2(N))^{-1}$. Умножая обе части неравенства (25) на ν, по лемме 2 получим

$$\nu\left(\int_\Omega u^2(\tau,x)dx - \varepsilon(N)\right) \leq \int_{\Omega^N} |\nabla u|^2 dx, \quad \tau > 0.$$

Далее

$$\nu\left(\int_\Omega u^2(\tau,x)dx - \varepsilon(N)\right) \leq \gamma^{-1}\int_\Omega \nabla u A(t,x)\nabla u dx, \quad \tau > 0. \tag{26}$$

Вводя обозначение $E(t) = \int\limits_\Omega u^2(t,x)dx$ и дифференцируя (17) по t, имеем

$$\frac{dE(t)}{dt} = -2\int_\Omega \nabla u(t,x)A(t,x)\nabla u(t,x)dx.$$

Учитывая последнее, из (26) получим

$$\frac{dE(\tau)}{d\tau} \leq -2\gamma\nu(E(\tau) - \varepsilon(N)), \quad \tau > 0.$$

Отсюда

$$E(\tau) \leq \varepsilon(N) + E(0)e^{-2\gamma\nu\tau}, \quad \tau > 0.$$

Взяв $\tau = \frac{t}{2}$ и заметив, что $E(0) = \|\varphi\|^2$, получим

$$E\left(\frac{t}{2}\right) \leq ke^{-\frac{N}{k}}\|\varphi\|^2 + e^{-\gamma\nu t}\|\varphi\|^2.$$

Выбрав $N = N(t)$, устанавливаем неравенство $E(\frac{t}{2}) \leq (k+1)\exp(-2\chi N(t))\|\varphi\|^2$, где $\chi = \min\left(\frac{1}{2k}, \frac{\gamma}{2C(\theta)}\right)$. Из неравенства Нэша (7) и утверждения 2 следует оценка, завершающая доказательство оценки (8),

$$|u(t,x)| \leq c_1\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{n}{4}}\sqrt{k+1}\exp(-\chi N(t))\|\varphi\|. \quad \square$$

3. Оценка снизу

В этом разделе точки пространства $\mathbb{R}^n$ будем выделять жирным шрифтом.

Докажем соотношение (9) теоремы 1.

Напомним неравенство Гарнака, установленное Ю. Мозером. Сформулируем его в удобном для нас виде. Обозначим через $B(\rho,\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq \rho\}$ шар радиуса ρ с центром в точке $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. *Для неотрицательного в цилиндре $Q = B(2\rho,\mathbf{z}) \times [0, 9\rho^2]$ решения уравнения* (1) *справедливо соотношение*

$$\max_{Q^-} u(t,\mathbf{x}) \leq H \min_{Q^+} u(t,\mathbf{x}),$$

в котором постоянная $H \geq 1$ зависит лишь от γ, Γ, n и

$$Q^+ = B(\rho,\mathbf{z}) \times [8\rho^2, 9\rho^2], \quad Q^- = B(\rho,\mathbf{z}) \times [\rho^2, 2\rho^2].$$

Из неравенства Гарнака вытекает

Лемма 3. *Пусть точки* $(t_0, \mathbf{x}^0), (t_1, \mathbf{x}^1) \in D$, $\mathbf{z} = (z, 0) \in \Omega$ *и число* ρ *таковы, что*

$$|\mathbf{x}^i - (\mathbf{z}, 0)| \le \rho \le r(z)/2, \quad i = \overline{0,1}, \quad t_0 = t_1 - 8\rho^2 \ge \rho^2.$$

Тогда неотрицательное в D *решение уравнения* (1) *удовлетворяет неравенству*

$$u(t_0, \mathbf{x}^0) \le H u(t_1, \mathbf{x}^1).$$

Действительно, в силу условия леммы для точек $(t_0, \mathbf{x}^0)$, $(t_1, \mathbf{x}^1)$ существует цилиндр $Q = B(2\rho, \mathbf{z}) \times [0, 9\rho^2]$, содержащийся в D и такой, что $(t_0, \mathbf{x}^0) \in Q^-$ и $(t_1, \mathbf{x}^1) \in Q^+$. Тогда согласно неравенству Гарнака имеем

$$u(t_0, \mathbf{x}^0) \le \max_{Q^-} u(t, \mathbf{x}) \le H \min_{Q^+} u(t, \mathbf{x}) \le H u(t_1, \mathbf{x}^1).$$

Положим $\mathbf{x}^0 = (y_0, \mathbf{0})$, $\mathbf{x}^1 = (y_1, \mathbf{0})$, $\rho_0 = (y_1 - y_0)/2$, $t_0 = \rho_0^2$, $t_1 = t_0 + 8\rho_0^2$. Тогда для пар $(t_0, \mathbf{x}^0)$, $(t_1, \mathbf{x}^1)$ при $\mathbf{z} = ((y_0 + y_1)/2, \mathbf{0})$ выполнены условия леммы 3, поскольку

$$B(2\rho_0, (\mathbf{z}, \mathbf{0})) = B(r(\mathbf{z}), \mathbf{z}) \subset \Omega.$$

Зафиксируем некоторое положительное число $t > t_0$. Далее положим

$$\rho_j = (y_{j+1} - y_j)/2, \quad t_{j+1} = t_j + 8\rho_j^2, \quad \mathbf{w}_i = ((y_j + y_{j+1})/2, \mathbf{0}), \quad j = \overline{0, \infty}.$$

Из определения последовательности $\{y_j\}$ следуют неравенства

$$\rho_{j+1} \le 3\rho_j, \quad j = \overline{0, \infty}, \tag{27}$$

иначе неравенство $\rho_{i+1} > 3\rho_i$ влечет $B(2\rho_i, \mathbf{w}_i) \subset B(2\rho_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1})$, что невозможно.

Индукцией по j установим

$$t_j \ge \rho_j^2, \quad j = \overline{0, \infty}. \tag{28}$$

Действительно, по выбору $t_0 = \rho_0^2$ и предположению индукции, в силу (27)

$$t_{j+1} = t_j + 8\rho_j^2 \ge 9\rho_j^2 \ge \rho_{j+1}^2.$$

Применяя (28) и определение последовательности $\{y_j\}$, заключаем, что пары $(t_j, \mathbf{x}^j)$, $(t_{j+1}, \mathbf{x}^{j+1})$, $j = \overline{0, \infty}$, удовлетворяют условиям леммы 3, и тогда справедливы неравенства

$$u(t_j, \mathbf{x}^j) \le H u(t_{j+1}, \mathbf{x}^{j+1}), \quad j = \overline{0, \infty}. \tag{29}$$

Зафиксируем $m \ge 2$. Предположим сначала, что $N(t_m) \ge m - 1$. Тогда из (29) получаем неравенства

$$u(t_m, \mathbf{x}^m) \ge H^{-m} u(t_0, \mathbf{x}^0) \ge M_0 H^{-N(t_m)}.$$

Пусть теперь $N(t_m) < m$ и $q \le N(t_m) + 1$ — первый номер, для которого $y(N+1) = y_{q+1} - y_q$. Если $y(N+1) = y_0$, то полагаем $q = 0$. С этого номера внесем изменения в последовательности ρ_j, x^j, t_j, полагая $\rho_j = \rho_q$, $\mathbf{x}^j = \mathbf{x}^q$, $t'_j = t_q + 8\rho_q^2(j - q)$, $j = \overline{q+1, \infty}$. Очевидно, по лемме 3 измененная последовательность также удовлетворяет неравенствам (29). Пусть k — первый номер, для которого $t'_k \ge t_m$. Можно считать, что $t'_k = t_m$, уменьшив, в случае необходимости, ρ_k так, чтобы $t'_k = t'_{k-1} + 8\rho_k^2 = t_m$. Согласно (29)

$$u(t_m, \mathbf{x}^q) = u(t'_k, \mathbf{x}^k) \ge H^{-k} u(t_0, \mathbf{x}^0).$$

Из определения функции $N(t)$, следует неравенство $\frac{t_m}{y^2(N+1)} \le N + 1$. Заметим, что в случае $q \ge 1$ имеем $2\rho_q = y_{q+1} - y_q = y(N+1)$ и

$$k = q + (k - q) \le N + 1 + \frac{t}{8\rho_q^2} = N + 1 + \frac{t_m}{2y^2(N+1)} \le 2(N+1).$$

Если же $y(N+1)=y_0$, то $2\rho_q=y_1-y_0=\frac{y_1-y_0}{y_0}y(N+1)$, и

$$k\le N+1+\frac{t_m}{8\rho_q^2}=N+1+\frac{1}{2}\left(\frac{y_0}{y_1-y_0}\right)^2\frac{t_m}{y^2(N+1)}\le (N+1)\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{y_0}{y_1-y_0}\right)^2\right).$$

Таким образом, всегда

$$\max_{\mathbf{x}} u(t_m,\mathbf{x}^m)\ge H^{-K(N(t_m)+1)}M_0.$$

Неравенство (9) теоремы доказано.

Литература

1. Гущин А.К. *Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка* //Тр. матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. – 1973. – Т. 126. – С. 5–45.
2. Гущин А.К. *Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка* // Матем. сб. – 1976. – Т. 101. – № 4. – С. 459–499.
3. Гущин А.К. *О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. – 1982. – Т. 119. – № 4. – С. 451–508.
4. Лежнев А.В. *О поведении при больших значениях времени неотрицательных решений второй смешанной задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. – 1986. – Т. 129. – № 2. – С. 186–200.
5. Ушаков В.И. *Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области* // Матем. сб. – 1980. – Т. 111. – № 1. – С. 95–115.
6. Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка* // Матем. сб. – 1980. – Т. 111. – № 4. – С. 503–521.
7. Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. *Оценки скорости стабилизации при $t\to\infty$ решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка* // Матем. сб. – 2000. – Т. 191. – № 2. – С. 91–131.
8. Мукминов Ф.Х. *Об убывании нормы решения смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 10. – С. 1172–1180.
9. Тедеев А.Ф. *Стабилизация первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 3. – С. 491–498.
10. Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – М.: МГУ, 1981. – 75 с.
11. Nash J. *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations* // Amer. J. Math. – 1958. – V. 80. – P. 931–953.
12. Ладыженская О.А, Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* – М.: Наука, 1967. – 736 с.

Башкирский государственный
педагогический университет

Поступила
26.04.2005