ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 5 (420)

УДК 519.632

Ю.М. ДАНИЛОВ, Н.В. НИКОНОВА

НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В данной работе предложен неявный метод решения, обладающий свойством снижения размерности задачи на единицу. При этом усложнение вычислений по сравнению с методами, использующими явные схемы, несущественно. Все рассуждения производятся на примере краевой задачи для баротропного движения сжимаемого невязкого газа. Как показано в [1], можно рассматривать эту краевую задачу только для прямоугольной области $\overline{\Omega} = [0,a] \times [0,b]$.

Пусть в $\overline{\Omega}$ имеем в общепринятых обозначениях в декартовой системе координат x, y систему уравнений гидродинамики, записанную в консервативной форме,

$$\begin{gathered}(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \qquad (\rho uv)_x + (p + \rho v^2)_y = 0,\\ (p + \rho u^2)_x + (\rho uv)_y = 0, \quad p = p(\rho).\end{gathered} \tag{1}$$

На $\partial\Omega$ зададим краевые условия

$$\begin{gathered}\rho u = RU(y), \quad \rho v = RV(y) \text{ при } x = 0; \qquad \rho v/\rho u = \Theta_1(y) \text{ при } x = a;\\ \rho v/\rho u = \Theta_2(x) \text{ при } y = 0; \qquad \rho v/\rho u = \Theta_3(x) \text{ при } y = b.\end{gathered} \tag{2}$$

Задача (1), (2) корректна ([2], [3]).

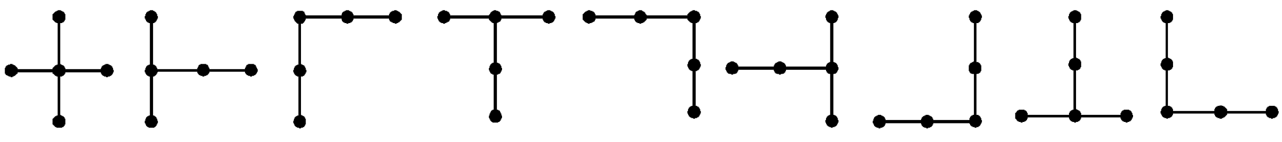
Введем обозначения с помощью системы

$$\begin{gathered}\rho u = F(1), \qquad \rho v = F(2), \qquad p + \rho u^2 = F(3),\\ \rho uv = F(4), \qquad \rho vu = F(5), \qquad p + \rho v^2 = F(6)\end{gathered} \tag{3}$$

и перепишем (1) в виде

$$F(n)_x + F(n+1)_y = 0, \quad n = 1,3,5. \tag{4}$$

На сеточной области $G = \{(i,j\}$, $i = \overline{1, N_i}$, $j = \overline{1, N_j}$, систему (4) и условия (2) со вторым порядком точности заменим системой разностных уравнений относительно сеточной функции F, соответствующей сеточным шаблонам для внутренних и граничных узлов с нумерацией узлов вокруг центральной точки (i,j),



а) б) в) г) д) е) ж) з) и)

$$\begin{gathered}F(n)_{i+1\,j} - F(n)_{i-1\,j} + F(n+1)_{i\,j+1} - F(n+1)_{i\,j-1} = 0,\\ n = 1,3,5, \quad j = \overline{2, N_j - 1}, \quad i = \overline{2, N_i - 1}.\end{gathered} \tag{5}$$

Эта система дополняется условиями в граничных узлах $M \in \partial G$

$$F(1)_{1,j} = RU(h(j-1)) = RU(1,j), \qquad (F(2)/F(1))_{Ni,j} = \Theta_1(N_i,j),$$
$$F(2)_{1,j} = RV(1,j), \tag{6}$$
$$(F(2)/F(1))_{i,1} = \Theta_2(i,1), \qquad (F(2)/F(1))_{i,Nj} = \Theta_3(i,N_j).$$

Для доопределения системы (5) относительно $F(n)$ или $F(n+1)$ введем в шаблон а) центральную точку (i,j). Для этого с помощью расщепления задачи по координатным направлениям используем по направлению x схему

$$F(n)_{i,j} - F(n)_{i-1,j} + (F(n+1)_{i,j+1} - F(n+1)_{i,j-1})/2 = 0, \qquad i = \overline{2,Ni}.$$

Однако эти уравнения имеют 1-й порядок аппроксимации по x и в общем случае не обеспечивают выполнения граничного условия на слое $i = Ni$. Составим линейные комбинации уравнений, которые в узлах (i,j) образуют уравнения вида

$$F(n)_{i-1,j} - 2F(n)_{i,j} + F(n)_{i+1,j} + 0.25^*(F(n+1)_{i+1,j+1} - F(n+1)_{i-1,j+1} -$$
$$- F(n+1)_{i+1,j-1} + F(n+1)_{i-1,j-1}) = 0, \quad j = \overline{2,Nj-1}, \quad i = \overline{2,Ni-1}, \quad n = 1,3,5. \tag{7а}$$

Полученную таким образом систему уравнений дополним недостающими уравнениями на слоях $i = 1$ и $i = Ni$ (шаблонах в) и ж)) для $j = \overline{2,Nj-1}$.

Поступая аналогично в направлении y, получим уравнения вида

$$F(n+1)_{i,j-1} - 2F(n+1)_{i,j} + F(n+1)_{i,j+1} + 0.25^*(F(n)_{i+1,j+1} -$$
$$- F(n)_{i-1,j+1} - F(n)_{i+1,j-1} + F(n)_{i-1,j-1}) = 0 \quad \forall (i,j) \in G. \tag{7б}$$

Уравнения (7а) (7б), условия (6) и система разностных уравнений, аппроксимирующих уравнения (4) на сеточных шаблонах б)–и), составляют задачу П1.

Уравнения, записанные для внутренних узлов сеточной области со вторым порядком точности относительно h, аппроксимируют дифференциальные уравнения

$$F(n)_{xx} + F(n+1)_{xy} = 0, \qquad F(n+1)_{yy} + F(n)_{xy} = 0, \tag{8}$$

которые получаются дифференцированием исходных уравнений (4) по независимым переменным. Вследствии этого можно утверждать, что задача П1 есть разностная задача, соответствующая на области $\overline{\Omega}$ задаче П2, которая образована системой уравнений (8) для точек внутри области, граничными условиями (2) и условиями (4).

Введем $\overline{X} = \{F(n), F(n+1)\}_{i,j}$, $i = \overline{2,N_i-1}$, $j = \overline{2,N_j-1}$, $n = 1,3,5$ — вектор неизвестных комплексов во внутренних узлах, $\overline{X}_{\partial G}$ — вектор их граничных значений. Тогда задачу П2 можно записать в операторной форме $L\overline{X} = B\overline{X}_{\partial G}$.

Оператор L линейный, невырожденный и зависит лишь от выбранной разностной сетки. Обратную матрицу L^{-1} можно вычислить и записать в память ЭВМ. Поскольку эта матрица имеет блочно-симметричную структуру, то проблем ее хранения не возникает.

Итерационный процесс решения задачи П2 строится следующим образом.

Пусть на итерационном слое с номером r векторы $\overline{X}$ и $\overline{X}_{\partial G}$ известны и обозначены $\overline{X}^r$ и $\overline{X}^r_{\partial G}$. Тогда

$$\overline{X}^{r+1} = \sigma L^{-1} B \overline{X}^r_{\partial G}(\overline{X}^r) + (1-\sigma)\overline{X}^r, \quad 0 < \sigma < 1, \quad r = 0,1,\ldots, \tag{9}$$

где $\overline{X}^r_{\partial G}$ находится в зависимости от $\overline{X}^r$.

Таким образом, по существу итерации проводятся лишь на границе ∂G, а вычислять F нужно в двух приграничных слоях сетки. Заметим, что сходимость процесса (9) может регулироваться за счет подбора множителя σ.

Процесс (9) может быть осуществлен и с помощью метода продольно-поперечной прогонки. При этом прогоночные коэффициенты, как и обратные матрицы, находятся лишь однажды для большого класса задач.

Вычисление сеточной функции $\dot{W}(x,y)$ для $\overline{W} = (\rho, u, v)$ производится при необходимости после окончания вычислений путем решения системы уравнений (3) с использованием процедуры линеаризации метода Ньютона и метода наименьших квадратов. Сходимость $\dot{W}(x,y)$ к $\overline{W}(x,y)$ обеспечивается подбором множителя σ.

В заключение отметим, что идеи метода применимы для областей, размерность которых более двух, а также для течений газа с различными воздействиями.

Литература

1. Дегтярева О.М., Данилов Ю.М., Хасанов Р.Х. *Расчет газодинамики и теплообмена в осесимметричных каналах сложной геометрической формы* // Межвуз. сб. “Оптимальные задачи авиационной техники”. – Казань, 1990. – № 1. – С. 14–17.
2. Рычков А.Д. *Методика расчета двухфазных течений в соплах Лаваля* // Численное моделирование в динамике жидкостей. – Новосибирск, 1983. – С.86–93.
3. Рычков А.Д. *Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах.* – Новосибирск: Наука, 1988. – 224 с.
4. Бернштейн С.Н. *Аналитическая природа решений дифференциальных уравнений эллиптического типа.* – Харьков: Изд-во ХГУ, 1956. – 95 с.

Казанский государственный технологический университет

Поступила 16.12.1996