ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 12 (463)

УДК 519.6 : 519.853

И.В. КОННОВ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ПРЯМО-ДВОЙСТВЕННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ СМЕШАННОГО ТИПА

1. Введение

Пусть U — вещественное гильбертово, а V — вещественное конечномерное евклидово пространства, Q — выпуклое, замкнутое и непустое множество точек в пространстве U, $G : Q \to U$ и $h : Q \to V$ — некоторые однозначные операторы. Предположим также, что пространство V частично упорядочено с помощью выпуклого, замкнутого и заостренного конуса C, т. е. для любых элементов $v', v'' \in V$ справедливо

$$v' \geq v'' \iff v' - v'' \in C, \quad v' > v'' \iff v' - v'' \in \operatorname{int} C.$$

Пусть также h — выпуклый по конусу C оператор, т. е. для любых $u', u'' \in U$ и всех $\alpha \in [0, 1]$ выполняется

$$h(\alpha u' + (1 - \alpha)u'') \leq \alpha h(u') + (1 - \alpha)h(u'').$$

Тогда множество

$$\Omega = \{u \in Q \mid h(u) \leq 0\} \tag{1}$$

будет выпуклым и можно определить вариационное неравенство как задачу нахождения точки $u^* \in \Omega$ такой, что

$$\langle G(u^*), u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \Omega. \tag{2}$$

Множество решений этой задачи обозначим Ω^*.

Вариационные неравенства широко используются для моделирования и исследования различных задач равновесного типа, к ним сводятся многие общие задачи нелинейного анализа, такие как задачи о неподвижной точке, оптимизации и равновесия. При этом в большинстве работ рассматриваются вариационные неравенства с простыми ограничениями, тогда как во многих прикладных задачах ограничения задаются с помощью нелинейных функций, т. е. имеют вид (1) (напр., [1], [2]). Одним из основных подходов к решению задач оптимизации с функциональными ограничениями является преобразование к задаче поиска седловой точки функции Лагранжа на основе известной теоремы Куна–Таккера, что позволяет избавиться от сложных ограничений за счет введения дополнительных двойственных переменных. Разумеется, данный подход может быть применен и для более общих классов задач, в частности, для задач о седловой точке [3] и о равновесии [4]. Для случая вариационных неравенств он изучался многими авторами (напр., [5]–[7]).

В данной работе рассматривается полученное после преобразования прямо-двойственное вариационное неравенство смешанного типа, представляющее собой аналог условий оптимальности в теореме Куна–Таккера о седловой точке для случая вариационных неравенств. Далее, в случае задачи оптимизации полученная преобразованная задача обычно решается методами

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-01-00200) и Академии наук РТ.

проксимального типа (напр., [2], [4]). В данных условиях применение подобных методов ограничено из-за большой вычислительной сложности их реализации. Поэтому в настоящей работе предложены некоторые подходы к построению достаточно простых методов, сходящихся при условии (сильной) монотонности оператора G и основанных на комбинировании идей регуляризации и двойственности. Для обеспечения достаточной точности решения вспомогательных задач предлагается использовать приближенную оптимизацию оценочных функций для соответствующей смешанной задачи.

2. Вспомогательные результаты

Вначале получим условия эквивалентности задачи (1), (2) прямо-двойственному вариационному неравенству на основе соответствующей теоремы Куна–Таккера. Заметим, что известные варианты условий оптимальности для вариационных неравенств обычно формулируются в (суб)дифференциальной форме (напр., [5], предложение 2.2; [6], лемма 3.6). В данном случае будет использоваться аналог условия оптимальности в форме седловой точки. Для этого рассмотрим задачу нахождения такой точки $w^* = (u^*, v^*) \in Q \times C^*$, что

$$\langle G(u^*), u - u^* \rangle + \langle v^*, h(u) \rangle - \langle v, h(u^*) \rangle \geq 0 \quad \forall u \in Q, \forall v \in C^*, \tag{3}$$

где $C^* = \{q \in V \mid \langle q, p \rangle \geq 0 \ \forall p \in C\}$ — сопряженный конус к конусу C, который при сделанных предположениях содержит ненулевые элементы. Множество решений задачи (3) обозначим через W^*. Очевидно, $W^* = Q^* \times P^*$, где $Q^* \subseteq U$, $P^* \subseteq V$. Предварительно докажем эквивалентность смешанного вариационного неравенства (3) системе смешанных вариационных неравенств более стандартного вида.

Лемма 1. *Задача* (3) *эквивалентна задаче нахождения такого элемента* $w^* = (u^*, v^*) \in Q \times C^*$, *что*

$$\langle G(u^*), u - u^* \rangle + \langle v^*, h(u) - h(u^*) \rangle \geq 0 \quad \forall u \in Q, \tag{4}$$

$$\langle h(u^*), v^* - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C^*. \tag{5}$$

Доказательство. Если $w^* = (u^*, v^*)$ — решение (3), то при $v = v^*$ в (3) получаем (4), а при $u = u^*$ в (3) получаем (5). Обратно, если $w^* = (u^*, v^*)$ – решение (4), (5), то сложение этих неравенств дает (3), что и требовалось. □

Предложение 1. a) *Если* $w^* = (u^*, v^*)$ — *решение задачи* (3), *то* u^* — *решение задачи* (2).
b) *Если* u^* — *решение задачи* (2), *и существует такая точка* $u' \in Q$, *что* $h(u') < 0$, *то найдется такая точка* $v^* \in C^*$, *что* $w^* = (u^*, v^*)$ — *решение задачи* (3).

Доказательство. Пусть $w^* = (u^*, v^*)$ — решение (3). Тогда согласно лемме 1 выполняются соотношения (4), (5). Выберем произвольно $v' \in C^*$, тогда $v = v^* + v' \in C^*$ и из (5) следует

$$\langle h(u^*), v' \rangle \leq 0 \quad \forall v' \in C^*,$$

поэтому $h(u^*) \leq 0$, т. е. $u^* \in \Omega$. Отсюда имеем $\langle h(u^*), v^* \rangle \leq 0$. Если предположить, что $\langle h(u^*), v^* \rangle < 0$, то $v^* \neq 0$ и $v = \lambda v^* \in C^*$ при $\lambda \in (0, 1)$. Применение (5) приводит теперь к противоречию

$$0 > (1 - \lambda) \langle h(u^*), v^* \rangle \geq 0.$$

Поэтому $\langle h(u^*), v^* \rangle = 0$. Используя это соотношение в (4), получаем (2), т. е. $u^* \in \Omega^*$.

Обратно, пусть $u^* \in \Omega^*$. Тогда u^* — решение задачи оптимизации

$$\min_{u \in \Omega} \to \langle G(u^*), u \rangle.$$

Применяя к этой задаче теорему Куна–Таккера о седловой точке ([8], гл. 4, теорема 5.3.1), убедимся, что найдется элемент $v^* \in C^*$, для которого выполняются соотношения

$$\langle G(u^*), u \rangle + \langle v^*, h(u^*) \rangle \leq \langle G(u^*), u^* \rangle + \langle v, h(u^*) \rangle \quad \forall u \in Q, \quad \forall v \in C^*,$$

т. е. $w^* = (u^*, v^*) \in W^*$, что и требовалось. $\square$

Замечание 1. Утверждение а) предложения 1 справедливо без предположения о выпуклости оператора h.

Замечание 2. Предложение 1 может быть распространено на более общий случай линейных топологических пространств U и V, а также модифицировано при линейном операторе h либо при линейных ограничениях-равенствах без дополнительных условий регулярности на основе соответствующих версий теоремы Куна–Таккера из [8]–[10].

Замечание 3. Утверждение предложения 1 справедливо в случае многозначного оператора G, тогда выражения (2), (3) и (4) следует понимать в смысле существования элемента из $G(u^*)$, удовлетворяющего этим неравенствам. Если дополнительно предположить, что оператор h имеет субдифференциал в каждой точке $u \in Q$, т. е. множество

$$\partial h(u) = \{g \in L(U, V) \mid h(u') - h(u) \geq g(u' - u) \quad \forall u' \in U\}$$

непусто, то неравенство (4) эквивалентно

$$\langle G(u^*), u - u^* \rangle + \langle v^*, \partial h(u^*)(u - u^*) \rangle \geq 0 \quad \forall u \in Q \tag{4'}$$

и система (4′), (5), таким образом, эквивалентна (3). Здесь $L(U, V)$ — пространство линейных непрерывных операторов из U в V. В этих условиях предложение 1 является некоторым обобщением леммы 3.6 из [6], поскольку не требует субдифференцируемости оператора h.

Для обоснования сходимости рассматриваемых далее методов потребуется уточнение результатов о сходимости итерационных процессов в условиях обратной сильной монотонности основного оператора. Пусть H — вещественное гильбертово пространство. По определению (напр., [2], сс. 221, 242) оператор $T : H \to H$ называется

а) *обратно сильно монотонным* на множестве $D \subseteq H$ с константой $\gamma > 0$, если

$$\langle T(x) - T(x'), x - x' \rangle \geq \gamma \|T(x) - T(x')\|^2 \quad \forall x, x' \in D;$$

b) *сильно монотонным* на множестве D с константой $\tau > 0$, если

$$\langle T(x) - T(x'), x - x' \rangle \geq \tau \|x - x'\|^2 \quad \forall x, x' \in D.$$

Очевидно, любой липшицевый и сильно монотонный оператор является обратно сильно монотонным, но обратное утверждение, вообще говоря, несправедливо.

Рассмотрим аналог итерационного процесса (1.5) из ([2], гл. 5) для решения уравнения $T(x)$=0:

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k t^k, \quad \|t^k - T_k(x_k)\| \leq \varepsilon_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty. \tag{6}$$

Предложение 2. *Пусть операторы T и T_k имеют непустое и совпадающее множество корней Z^*, операторы T_k удовлетворяют условию обратной сильной монотонности с константами $\gamma_k \geq \gamma > 0$, последовательность $\{x^k\}$ построена по правилам* (6) *и выполняются условия*

а) $0 < \lambda' \leq \lambda_k \leq \lambda'' < 2\gamma$;

b) *для любого $x \in H$ существует такая последовательность индексов $\{k_s\}$, что*

$$\lim_{s \to \infty} T_{k_s}(x) = d(x), \quad \|d(x)\| < \infty;$$

c) *для любого $x \notin Z^*$ выполняется $\inf\limits_{k \geq 0} \|T_k(x)\| > 0$.*

Тогда последовательность $\{x^k\}$ слабо сходится к некоторой точке $x^* \in Z^*$.

Доказательство. Выберем произвольный элемент $\widetilde{x} \in Z^*$. Используя лемму 1.1 из ([2], гл. 5), получим соотношения

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - \widetilde{x}\| = \delta < \infty \tag{7}$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T_k(x^k)\|^2 < \infty. \tag{8}$$

Согласно (7) последовательность $\{x^k\}$ ограничена, поэтому она имеет слабо предельные точки. Пусть подпоследовательность $\{x^{k_l}\}$ слабо сходится к x', тогда имеем

$$\gamma_{k_l}\|T_{k_l}(x') - T_{k_l}(x^{k_l})\|^2 \le \langle T_{k_l}(x'), x' - x^{k_l}\rangle - \langle T_{k_l}(x^{k_l}), x' - x^{k_l}\rangle.$$

Из условий b), c) и свойств (7), (8) получаем, не ограничивая общности, что выполняется соотношение $\lim\limits_{l\to\infty} \|T_{k_l}(x') - T_{k_l}(x^{k_l})\| = 0$. Это с учетом (8) дает

$$\lim_{l\to\infty} \|T_{k_l}(x')\| = 0.$$

Теперь условие c) приводит к $x' \in Z^*$. Таким образом, все слабо предельные точки $\{x^k\}$ находятся в Z^*. Единственность слабой предельной точки для $\{x^k\}$ показывается с учетом (7) так же, как и в теореме 1 из [11]. □

Замечание 4. Предложение 2 представляет собой некоторую модификацию и обобщение теоремы 1.1 из ([2], гл. 5).

Пусть D — непустое, выпуклое и замкнутое множество в пространстве H. Тогда для любой точки $x \in H$ существует единственная проекция на D, которую обозначим через $\pi_D(x)$. Для заданного оператора $T : H \to H$ и числа $\alpha > 0$ определим оператор $S_{T,\alpha} : H \to H$ по формуле

$$S_{T,\alpha}(x) = x - \pi_D(x - \alpha T(x)). \tag{9}$$

Лемма 2 ([2], гл. 5, лемма 1.4). *Если оператор T удовлетворяет условию обратной сильной монотонности на H с константой $\widetilde{\gamma} > 0$, то оператор $S_{T,\alpha}$ из (9) удовлетворяет условию обратной сильной монотонности на D с константой $\gamma = 1 - \alpha/(4\widetilde{\gamma})$, где $0 \le \alpha < 4\widetilde{\gamma}$.*

Данное свойство позволяет использовать предложение 2 для обоснования сходимости методов в задачах с ограничениями.

3. Приближенный метод типа Удзавы для прямо-двойственных вариационных неравенств

В данном разделе рассматривается полученное после преобразования задачи (2), (1) прямо-двойственное смешанное вариационное неравенство (3) или, что эквивалентно, система (4), (5) при сделанных в разделе 1 общих предположениях и дополнительном условии $W^* \ne \emptyset$.

Вначале определим оператор $F : C^* \to \Pi(V)$ по формуле

$$F(v) = \{f \in V \mid f = -h(u), \quad u \in Q(v)\}, \tag{10}$$

где

$$Q(v) = \{\widetilde{u} \in Q \mid \langle G(\widetilde{u}), u - \widetilde{u}\rangle + \langle v, h(u) - h(\widetilde{u})\rangle \ge 0 \quad \forall u \in Q\} \tag{11}$$

— множество решений задачи (4) при фиксированном $v \in C^*$. Здесь $\Pi(V)$ обозначает совокупность всех подмножеств пространства V.

Предложение 3. *Пусть множество $Q(v)$ непусто для любого $v \in C^*$. Тогда для любых $v', v'' \in C^*$ и всех $f' \in F(v')$, $f'' \in F(v'')$ выполняется*

$$\langle f' - f'', v' - v'' \rangle \geq \langle G(u') - G(u''), u' - u'' \rangle, \tag{12}$$

где $u' \in Q(v')$ и $u'' \in Q(v'')$ таковы, что $f' = -h(u'), f'' = -h(u'')$.

Доказательство. Используя определения u', u'', f', f'', имеем

$$\langle G(u'), u'' - u' \rangle + \langle v', h(u'') - h(u') \rangle \geq 0$$

и

$$\langle G(u''), u' - u'' \rangle + \langle v'', h(u') - h(u'') \rangle \geq 0.$$

Сложение этих неравенств дает

$$\langle v' - v'', h(u'') - h(u') \rangle \geq \langle G(u') - G(u''), u' - u'' \rangle,$$

отсюда следует

$$\langle f' - f'', v' - v'' \rangle \geq \langle G(u') - G(u''), u' - u'' \rangle,$$

т. е. (12) выполняется. $\square$

Следствие 1. a) Если оператор G монотонный и множество $Q(v)$ непусто для любого $v \in C^*$, то оператор F из (10), (11) монотонный.

b) Если оператор h удовлетворяет условию Липшица с константой L_h, а оператор G сильно монотонный с константой $\tau > 0$, то оператор F удовлетворяет условию обратной сильной монотонности с константой $\gamma = \tau / L_h^2$.

c) Если оператор G строго либо сильно монотонный, то оператор F однозначный.

Доказательство. Утверждение c) непосредственно следует из единственности решения задачи (4) в этих условиях. Утверждение a) следует из (12). В случае b) множество $Q(v)$ всегда непусто и состоит из одной точки. Используя условие Липшица и (12), получаем

$$\begin{aligned}\langle F(v') - F(v''), v' - v'' \rangle \geq \langle G(u') - G(u''), u' - u'' \rangle \geq \tau \|u' - u''\|^2 \geq \\ \geq (\tau / L_h^2) \|h(u') - h(u'')\|^2 = (\tau / L_h^2) \|F(u') - F(u'')\|^2,\end{aligned}$$

т. е. F удовлетворяет условию обратной сильной монотонности с константой τ / L_h^2. $\square$

Полученные результаты дают возможность применить метод типа Удзавы ([8], гл. 10; [1], гл. 7, § 1) для решения системы (4), (5). А именно, рассмотрим в предположении сильной монотонности G итерационную схему

$$v^{k+1} = \pi_{C^*}[v^k + \alpha_k h(u^k)], \quad \|u^k - Q(v^k)\| \leq \delta_k, \quad u^k \in Q; \tag{13}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty, \quad \alpha_k > 0. \tag{14}$$

Сходимость этого метода можно установить на основе предложения 2 и леммы 2.

Теорема 1. *Пусть оператор G сильно монотонный с константой $\tau > 0$, а оператор h удовлетворяет условию Липшица с константой L_h. Если последовательность $\{v^k\}$ построена по правилам (13), (14), где*

$$0 < \alpha' \leq \alpha_k \leq \alpha'' < 2\tau / L_h^2, \tag{15}$$

то $\{v^k\}$ сходится к такой точке $v^* \in C^*$, что $w^* = (Q(v^*), v^*) \in W^*$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что соотношения (13) можно переписать в виде

$$v^{k+1} = v^k - s^k, \quad \|s^k - S_{F,\alpha_k}(v^k)\| \leq \varepsilon_k, \quad S_{F,\alpha}(v) = v - \pi_{C^*}[v - \alpha F(v)], \tag{16}$$

где оператор F определен в (10), (11), т. е. реализован процесс вида (6) с $\lambda_k = 1$. Оценим величину ε_k. Используя нерастягивающее свойство проекции и условия теоремы, имеем

$$\begin{aligned}\|s^k - S_{F,\alpha_k}(v^k)\| &= \|(v^k - \pi_{C^*}[v^k + \alpha_k h(u^k)]) - (v^k - \pi_{C^*}[v^k - \alpha_k F(v^k)])\| \leq \\ &\leq \|\pi_{C^*}[v^k + \alpha_k h(u^k)] - \pi_{C^*}[v^k + \alpha_k h(Q(v^k))]\| \leq \\ &\leq \alpha_k \|h(u^k) - h(Q(v^k))\| \leq \alpha'' L_h \|u^k - Q(v^k)\| \leq \alpha'' L_h \delta_k,\end{aligned}$$

т. е. можно положить $\varepsilon_k = \alpha'' L_h \delta_k$, и из (14) следует выполнение третьего соотношения в (6). Покажем, что выполняются остальные условия предложения 2. В самом деле, согласно следствию 1, п. b) оператор F из (10), (11) удовлетворяет условию обратной сильной монотонности с константой $\widetilde{\gamma} = \tau / L_h^2$, поэтому по лемме 2 оператор S_{F,α_k} удовлетворяет на C^* условию обратной сильной монотонности с константой $\gamma_k = 1 - \alpha_k/(4\widetilde{\gamma})$, поскольку в силу (15) $0 \leq \alpha_k < 2\widetilde{\gamma} < 4\widetilde{\gamma}$. Далее, из (15) имеем

$$2\gamma_k = 2(1 - \alpha_k/(4\widetilde{\gamma})) \geq 2(1 - \alpha''/(4\widetilde{\gamma})) = 1 + (1 - \alpha''/(2\widetilde{\gamma})) > 1 = \lambda'' = \lambda_k > 0,$$

т. е. условие a) предложения 2 выполняется при $\gamma = 1 - \alpha''/(4\widetilde{\gamma})$. Из определения оператора $S_{F,\alpha}$ в (16) и ограниченности последовательности $\{\alpha_k\}$ следует, что выполняется условие b) предложения 2. Далее, необходимое и достаточное условие оптимальности в задаче (5) с $u^* = Q(v^*)$ имеет вид $S_{F,\alpha}(v^*) = 0$ для некоторого $\alpha > 0$ (напр., [2], гл. 5, лемма 1.5). Отсюда следует, что выполняется условие c) предложения 2 и в силу конечномерности пространства V последовательность $\{v^k\}$ сходится к такой точке $v^* \in C^*$, что $S_{F,\alpha}(v^*) = 0$ для некоторого $\alpha > 0$, или $w^* = (Q(v^*), v^*) \in W^*$. $\square$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда последовательность* $\{v^k\}$ *сходится к точке* $v^* \in C^*$, *последовательность* $\{u^k\}$ *сильно сходится к такой точке* $u^* \in Q$, *что* $(u^*, v^*) \in W^*$, *при этом* $W^* = \{u^*\} \times P^*, P^* \subseteq C^*$.

Доказательство. Первое утверждение установлено в теореме 1. Обозначим для краткости $\widetilde{u}^k = Q(v^k)$, $\widetilde{v}^{k+1} = \pi_{C^*}[v^k + \alpha_k h(\widetilde{u}^k)]$, выберем произвольно точку $w' = (u', v') \in W^*$, тогда $v' = \pi_{C^*}[v' + \alpha_k h(u')]$. Используя нерастягивающее свойство проекции, предложение 3 и определения $\widetilde{u}^k$, $\widetilde{v}^k$, имеем

$$\begin{aligned}\|\widetilde{v}^{k+1} - v'\|^2 &= \|\pi_{C^*}[v^k + \alpha_k h(\widetilde{u}^k)] - \pi_{C^*}[v' + \alpha_k h(u')]\|^2 \leq \\ &\leq \|(v^k - v') + \alpha_k (h(\widetilde{u}^k) - h(u'))\|^2 = \|v^k - v'\|^2 + \\ &+ 2\alpha_k \langle h(\widetilde{u}^k) - h(u'), v^k - v' \rangle + \alpha_k^2 \|h(\widetilde{u}^k) - h(u')\|^2 \leq \\ &\leq \|v^k - v'\|^2 - 2\alpha_k \tau \|\widetilde{u}^k - u'\|^2 + \alpha_k^2 L_h^2 \|\widetilde{u}^k - u'\|^2 \leq \\ &\leq \|v^k - v'\|^2 - \alpha_k (2\tau - \alpha_k L_h^2) \|\widetilde{u}^k - u'\|^2 \leq \\ &\leq \|v^k - v'\|^2 - \alpha' (2\tau - \alpha'' L_h^2) \|\widetilde{u}^k - u'\|^2.\end{aligned}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned}\|\widetilde{v}^{k+1} - v^{k+1}\| &= \|\pi_{C^*}[v^k + \alpha_k h(\widetilde{u}^k)] - \pi_{C^*}[v^k + \alpha_k h(u^k)]\| \leq \\ &\leq \alpha_k \|h(\widetilde{u}^k) - h(u^k)\| \leq \alpha_k L_h \|\widetilde{u}^k - u^k\| \leq \alpha' L_h \delta_k = \varepsilon_k.\end{aligned}$$

Поскольку последовательность $\{v^k\}$ сходится к v^*, то она ограничена, следовательно, $\|\widetilde{v}^{k+1} - v'\| \leq \beta' < \infty$. С учетом этих соотношений получаем

$$\|v^{k+1} - v'\|^2 \leq \|\widetilde{v}^{k+1} - v'\|^2 + 2\|\widetilde{v}^{k+1} - v'\|\,\|\widetilde{v}^{k+1} - v^{k+1}\| + \|\widetilde{v}^{k+1} - v^{k+1}\|^2 \leq$$
$$\leq \|v^k - v'\|^2 + 2\beta'\varepsilon_k + \varepsilon_k^2 - \alpha'(2\tau - \alpha'' L_h^2)\|\widetilde{u}^k - u'\|^2.$$

В силу (14) теперь должно выполняться соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\widetilde{u}^k - u'\|^2 < \infty,$$

отсюда получаем $\lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{u}^k = u'$. В силу произвольности выбора $(u', v') \in W^*$ множество W^* имеет вид $\{u^*\} \times P^*$, где $P^* \subseteq C^*$, т. е. можно определить $u' = u^*$. Теперь из (13) следует $\lim\limits_{k\to\infty} u^k = u^*$, что и требовалось. $\square$

Отметим, что единственность проекции множества W^* на пространство U следует также из единственности решения задачи (1), (2) при сильной монотонности G и предложения 1, п. b).

Замечание 5. Результаты теорем 1 и 2 останутся справедливыми, если V — вещественное гильбертово пространство, а конус C^* содержит ненулевые элементы. При этом, однако, последовательность $\{v^k\}$ в обеих теоремах, как следует из предложения 2, слабо сходится к точке $v^* \in C^*$.

Поскольку метод (13)–(15) включает решение смешанного вариационного неравенства (4) с заданной точностью δ_k по расстоянию, то для реализации метода требуется указать способ нахождения очередной точки u^k. Для этой цели предлагается использовать аппарат оценочных (иначе интервальных) функций ([12], [13], [7]).

А именно, пусть v — фиксированный элемент из C^*, оператор G сильно монотонный с константой $\tau > 0$ и непрерывно дифференцируемый. Для фиксированного числа $\mu > 0$ рассмотрим функцию

$$\widetilde{\varphi}_\mu(u) = \max_{z\in Q} \widetilde{\Phi}_\mu(u, z), \tag{17}$$

где

$$\widetilde{\Phi}_\mu(u, z) = \langle G(u), u - z\rangle - 0.5\mu\|u - z\|^2 - \langle v, h(u) - h(z)\rangle. \tag{18}$$

Отметим, что функция $\widetilde{\Phi}_\mu(u, \cdot)$ при сделанных предположениях сильно вогнута, поэтому максимум в (17) достигается, т. е. существует такой элемент $z_\mu(u) \in Q$, что $\widetilde{\Phi}_\mu(u, z_\mu(u)) = \widetilde{\varphi}_\mu(u)$. Известно ([7], гл. 4), что стационарная точка задачи

$$\min_{u\in Q} \to \widetilde{\varphi}_\mu(u), \tag{19}$$

определяемая условием

$$\widetilde{\varphi}'_\mu(\widetilde{u}, u - \widetilde{u}) \geq 0 \quad \forall u \in Q,$$

совпадает с $Q(v)$, при этом $\widetilde{\varphi}_\mu(u) \geq 0$ для всех $u \in Q$ и $\widetilde{\varphi}_\mu(u') = 0 \Longleftrightarrow u' \in Q(v)$. Более того, с помощью функции $\widetilde{\varphi}_\mu$ можно получить оценку погрешности по расстоянию.

Лемма 3 ([7], предложение 4.12). *Если $\mu < \tau$, то для любого $u \in Q$ справедливо*

$$\widetilde{\varphi}_\mu(u) \geq (\tau - \mu/2)\|u - u^*\|^2, \tag{20}$$

где $u^* = Q(v)$.

Поскольку согласно (13), (14) для сходимости требуется лишь определенный порядок убывания величин δ_k, а не их значения, то согласно (20) условия (13), (14) на выбор u^k будут выполнены, если выбрать такую последовательность $\{\widetilde{\delta}_k\}$, что

$$\widetilde{\delta}_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{\delta}_k < \infty, \tag{21}$$

и находить $u^k \in Q$ из условия

$$\sqrt{\widetilde{\varphi}_\mu(u^k)} < \widetilde{\delta}_k. \tag{22}$$

Для приближенного решения задачи (19) можно использовать различные алгоритмы градиентного и ньютоновского типа ([12]; [7], гл. 4, 5). Аналогичным образом для нахождения точки u^k можно использовать приближенную минимизацию D-интервальных функций без ограничений [13], которые к тому же являются непрерывно дифференцируемыми при непрерывной дифференцируемости G.

4. Приближенный метод типа Удзавы с частичной регуляризацией

Как показано в предыдущем разделе, с помощью метода типа Удзавы можно найти решение смешанного вариационного неравенства (3) (или системы (4), (5)) в условиях, когда оператор G исходного вариационного неравенства сильно монотонный. В данном разделе рассмотрим возможность применения метода типа Удзавы при сделанных в разделе 1 общих предположениях и при следующих дополнительных условиях:

a) *оператор $h : Q \to V$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_h, существует такая точка $u' \in Q$, что $h(u') < 0$;*

b) *оператор $G : Q \to U$ монотонный, а также непрерывный вдоль любого линейного сегмента в U;*

c) *множество решений задачи* (2) *непусто.*

Для того чтобы применить метод типа Удзавы, используем регуляризацию исходной задачи (2) по Браудеру–Тихонову, а именно, рассмотрим для параметра $\eta > 0$ задачу нахождения такого элемента $u_\eta \in \Omega$, что

$$\langle G(u_\eta) + \eta u_\eta, u - u_\eta \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \Omega, \tag{23}$$

где множество Ω определено в (1). Отметим, что при сделанных предположениях задача (23) имеет единственное решение, поскольку ее основной оператор $G_\eta = G + \eta I$ сильно монотонный с константой η. Рассмотрим теперь задачу нахождения такого элемента $w'_\eta = (u'_\eta, v'_\eta) \in Q \times C^*$, что

$$\langle G_\eta(u'_\eta), u - u'_\eta \rangle + \langle v'_\eta, h(u) - h(u'_\eta) \rangle \geq 0 \quad \forall u \in Q, \tag{24}$$

$$\langle h(u'_\eta), v'_\eta - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C^*, \tag{25}$$

множество решений которой W^*_η непусто для любого $\eta > 0$ в силу предложения 1 и имеет вид $W^*_\eta = \{u_\eta\} \times P^*$, где $P^* \subseteq C^*$. Поскольку оператор G_η сильно монотонный, то для нахождения решения задачи (24), (25) можно применить метод (13)–(15) . А именно, для заданного числа $\eta > 0$ рассмотрим итерационную схему

$$v^{k+1} = \pi_{C^*}[v^k + \alpha_k h(u^k)], \quad \|u^k - \widetilde{u}^k_\eta\| \leq \delta_k, \quad u^k \in Q; \tag{26}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty, \quad 0 < \alpha' \leq \alpha_k \leq \alpha'' < 2\eta / L_h^2, \tag{27}$$

где $\widetilde{u}^k_\eta \in Q$ — единственное решение задачи

$$\langle G_\eta(\widetilde{u}^k_\eta), u - \widetilde{u}^k_\eta \rangle + \langle v^k, h(u) - h(\widetilde{u}^k_\eta) \rangle \geq 0 \quad \forall u \in Q. \tag{28}$$

Тогда из теоремы 2 получим

Предложение 4. *Пусть $\beta \in (0, \infty)$ — фиксированное число. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер k', что*

$$\|u^k - u_\eta\| \le \beta\varepsilon \quad \forall k \ge k'. \tag{29}$$

С другой стороны, согласно определению точка u_η является единственным решением задачи (23), поэтому последовательность $\{u_\eta\}$ сильно сходится к одному из решений задачи (2). Более точно, справедливо

Предложение 5 ([6], лемма 3.7). *Последовательность $\{u_\eta\}$ сильно сходится при $\eta \to 0$ к точке $\widetilde{u}$, имеющей наименьшую норму среди всех точек множества Ω^*.*

На основе полученных свойств можно предложить следующий подход к построению сходящейся итерационной последовательности при сделанных предположениях. Выберем произвольно последовательности чисел $\{\varepsilon_l\} \searrow 0$, $\{\eta_l\} \searrow 0$ и для каждого номера $l = 0, 1, \dots$ применим метод (26), (27) с $\varepsilon = \varepsilon_l$, $\eta = \eta_l$, при выполнении условия (29) обозначим $y^l = u^k$ и перейдем к следующему $l = l + 1$ и т. д.

Теорема 3. *Последовательность $\{y^l\}$ сильно сходится к точке $\widetilde{u}$, имеющей наименьшую норму среди всех точек множества Ω^*.*

Доказательство. Поскольку $\|y^l - u_{\eta_l}\| \le \beta\varepsilon_l$, то

$$\|y^l - \widetilde{u}\| \le \|u_{\eta_l} - \widetilde{u}\| + \beta\varepsilon_l \to 0 \quad \text{при} \quad l \to \infty$$

согласно предложению 5, что и требовалось. □

Для обеспечения реализуемости описанного выше метода необходимо указать способ нахождения точки u^k, удовлетворяющей условию (26), а также способ проверки критерия (29). Для этой цели, как и в предыдущем разделе, предлагается использовать оценочные (интервальные) функции, модифицированные с учетом условий задачи.

Рассмотрим вначале условие (26) определения точки u^k. Для этого по определению требуется приближенно решить смешанное вариационное неравенство (28). Используя определение G_η, запишем задачу (28) в эквивалентном виде: найти такой элемент $\widetilde{u}^k_\eta \in Q$, что

$$\langle G(\widetilde{u}^k_\eta), u - \widetilde{u}^k_\eta\rangle + 0.5\eta[\|u\|^2 - \|\widetilde{u}^k_\eta\|^2] + \langle v^k, h(u) - h(\widetilde{u}^k_\eta)\rangle \ge 0 \quad \forall u \in Q. \tag{30}$$

Эквивалентность (28) и (30) следует, например, из предложения 1.3 в [7] (см. также [1], гл. 2, предложение 2.2). Теперь вместо обычной интервальной функции (17), (18) для задачи (28) используем прямую интервальную функцию для задачи (30) вида

$$\varphi^{(k)}_\eta(u) = \max_{z \in Q} \Phi^{(k)}_\eta(u, z), \tag{31}$$

где

$$\Phi^{(k)}_\eta(u, z) = \langle G(u), u - z\rangle + 0.5\eta[\|u\|^2 - \|z\|^2] + \langle v^k, h(u) - h(z)\rangle. \tag{32}$$

По определению функция $\Phi^{(k)}_\eta(u, \cdot)$ сильно вогнута, поэтому максимум в (31) достигается, т. е. существует такой элемент $z_\mu(u) \in Q$, что $\varphi^{(k)}_\eta(u) = \Phi^{(k)}_\eta(u, z_\mu(u))$. С другой стороны, функция $\varphi^{(k)}_\eta$ может быть интерпретирована и как интервальная функция для задачи (28), но с иной вспомогательной функцией аддитивного типа

$$\Phi^{(k)}_\eta(u, z) = \langle G_\eta(u), u - z\rangle + \langle v^k, h(u) - h(z)\rangle + \theta(u) - \theta(z) - \langle \theta'(u), u - z\rangle \tag{33}$$

([7], раздел 4.2), где $\theta(u) = 0.5\eta\|u\|^2$. Теперь, используя свойства аддитивных вспомогательных функций из ([12]; [7], гл. 4), получаем

Предложение 6. a) *Функция* $\varphi_\eta^{(k)}$, *определенная в* (31), (32), *является интервальной для задачи* (30) (*или* (28)), *т. е.* $\varphi_\eta^{(k)}(u) \geq 0$ *для всех* $u \in Q$,

$$u' = z_\mu(u') \Longleftrightarrow \varphi_\eta^{(k)}(u') = 0 \Longleftrightarrow u' = \widetilde{u}_\eta^k;$$

b) *стационарные точки задачи*

$$\min_{u \in Q} \to \varphi_\eta^{(k)}(u) \tag{34}$$

совпадают с решением задачи (30) (*или* (28));

c) *выполняется соотношение*

$$\varphi_\eta^{(k)}(u) \geq 0.5\eta\|u - \widetilde{u}_\eta^k\|^2 \quad \forall u \in Q. \tag{35}$$

Поэтому для нахождения требуемой в (26) точки u^k можно использовать минимизацию функции $\varphi_\eta^{(k)}$ на множестве Q, т. е. по аналогии с (21), (22) выбрать последовательность $\{\widetilde{\delta}_k\}$ согласно (21) и находить $u^k \in Q$ из условия

$$\sqrt{\varphi_\eta^{(k)}(u^k)} \leq \widetilde{\delta}_k, \tag{36}$$

обеспечивая тем самым выполнение условий (26) согласно (35), (36). Для приближенного решения задачи (34) можно использовать методы градиентного и ньютоновского типов ([7], разделы 3.1, 4.5, 6.1). Таким образом, поскольку оптимальное значение функции $\varphi_\eta^{(k)}$ в задаче (34) известно, то требуемая по условию (36) точка u^k будет найдена за конечное число итераций при любом $\eta > 0$, обеспечивая реализуемость метода при фиксированном k.

Замечание 6. Обычная прямая интервальная функция для задачи (28) имеет вид

$$\varphi^{(k)}(u) = \max_{z \in Q}\{\langle G_\eta(u), u - z\rangle + \langle v^k, h(u) - h(z)\rangle\}$$

и, следовательно, не является дифференцируемой даже при дифференцируемости операторов G и h. Поэтому наиболее распространены регуляризованные интервальные функции типа (17), (18) или (31), (33), которые являются дифференцируемыми. В случае (31), (32) регуляризируется не функция, а исходная задача за счет слагаемого вида $\varepsilon\langle\widetilde{u}, u - \widetilde{u}\rangle$, а затем уже к регуляризированной задаче применяется обычная прямая интервальная функция. В случае обычного вариационного неравенства (23) такой подход приводит к замене его на нелинейное (смешанное) вариационное неравенство и поэтому может быть назван *нелинейным сглаживанием*. Очевидно, данный подход может быть использован для обеспечения заданной точности решения вспомогательных задач и в других методах регуляризации [6], а также расщепления [14], [15] и проксимальной точки [11], [2].

Теперь для обеспечения полной реализуемости метода требуется указать способ выполнения критерия (29). Определим интервальную функцию вида (17), (18) для задачи (23)

$$\widetilde{\varphi}_{\mu,\eta}(u) = \max_{z \in \Omega} \widetilde{\Phi}_{\mu,\eta}(u, z), \tag{37}$$

где

$$\widetilde{\Phi}_{\mu,\eta}(u, z) = \langle G(u), u - z\rangle + \eta\langle u, u - z\rangle - 0.5\mu\|u - z\|^2.$$

Теперь можно определить D-интервальную функцию

$$\psi_\eta(u) = \widetilde{\varphi}_{\eta,\eta}(u) - \widetilde{\varphi}_{2\eta,\eta}(u), \tag{38}$$

для которой будут справедливы следующие свойства (см. [13]).

Предложение 7. a) *Функция ψ_η из* (38) *является интервальной для задачи* (23) *на Q, т. е. $\psi_\eta(u) \geq 0$ для всех $u \in Q$,*

$$\psi_\eta(u) = 0 \Longleftrightarrow u = u_\eta;$$

b) *выполняется соотношение*

$$\sqrt{2\psi_\eta(u)/\eta} \geq \eta\|u - u_\eta\|/(2\eta + L_G) \quad \forall u \in Q, \tag{39}$$

где L_G — константа Липшица для оператора $G + \eta I$.

Замечание 7. Если оператор G определен на всем пространстве U, то в предложении 7 множество Q можно заменить на U.

Поэтому при фиксированных ε и η процесс (26), (27) следует остановить, как только выполнится условие

$$\psi_\eta(u^k) \leq \eta^3\varepsilon^2. \tag{40}$$

Тогда из (39) имеем

$$\|u^k - u_\eta\| \leq \sqrt{2}(2\eta + L_G)\varepsilon \leq \beta\varepsilon,$$

т. е. соотношение (29) выполняется. Отметим, что для вычисления значения функции ψ_η необходимо решить две задачи (37) максимизации сильно вогнутой квадратичной функции $\widetilde{\Phi}_{\mu,\eta}(u,\cdot)$ на Ω. Эти задачи также могут решаться приближенно в рамках заданной в (40) точности.

Рассмотренные в данной работе методы включают приближенное решение смешанного вариационного неравенства (4) (либо (24)). Для того чтобы обеспечить сходимость к решению с помощью более простых методов типа Эрроу–Гурвица, можно также использовать предварительную регуляризацию задачи (3), чтобы была сильная монотонность основного оператора задачи (3). Отметим, что в случае сильно монотонного оператора G достаточно провести регуляризацию задачи только по v. Тогда последовательность решений регуляризованных задач будет сильно сходиться к решению исходной задачи (3) (см. предложение 5), а решение каждой регуляризованной задачи можно находить приближенно с помощью обычного проективного метода (напр., [5], [7], [16]). Кроме этого, слабую сходимость к решению можно обеспечить, используя экстраградиентный метод [4], а также один из комбинированных релаксационных методов [16], [17]. Эти методы обеспечивают сходимость без дополнительных предположений типа сильной монотонности.

Автор благодарен рецензенту за ряд замечаний, позволивших сделать изложение более четким.

Литература

1. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* – М.: Мир, 1979. – 399 с.
2. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. *Модифицированные функции Лагранжа.* – М.: Наука, 1989. – 400 с.
3. Гермейер Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций.* – М.: Наука, 1971. – 383 с.
4. Антипин А.С. *Равновесное программирование: проксимальные методы* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37. – № 11. – С. 1327–1339.
5. Harker P.T., Pang J.-S. *Finite-dimensional variational inequalities and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications* // Math. Program. – 1990. – V. 48. – № 2. – P. 164–220.
6. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Итеративные методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1989. – 128 с.
7. Patriksson M. *Nonlinear programming and variational inequality problems: a unified approach.* – Dordrecht: Kluwer, 1999. – 334 p.

8. Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. *Исследования по линейному и нелинейному программированию.* – М.: Ин. лит., 1962. – 335 с.
9. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* – М.: Наука, 1974. – 479 с.
10. Тер-Крикоров А.М. *Оптимальное управление и математическая экономика.* – М.: Наука, 1977. – 216 с.
11. Rockafellar R.T. *Monotone operators and the proximal point algorithm* // SIAM J. Control and Optimiz. – 1976. – V. 14. – № 5. – P. 877–893.
12. Patriksson M. *Merit functions and descent algorithms for a class of variational inequality problems* // J. Optim. Theory and Appl. – 1997. – V. 41. – № 1. – P. 37–55.
13. Коннов И.В. *Об одном классе D-интервальных функций для смешанных вариационных неравенств* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 60–64.
14. Lions P.L., Mercier B. *Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators* // SIAM J. Numer. Anal. – 1979. – V. 16. – № 6. – P. 964–979.
15. Gabay D. *Applications of the method of multipliers to variational inequalities* // Augmented Lagrangian methods: application to the solution of boundary-value problems. – Amsterdam: North-Holland, 1983. – P. 299–331.
16. Коннов И.В. *Методы решения конечномерных вариационных неравенств.* – Казань: ДАС, 1998. – 101 с.
17. Коннов И.В. *Комбинированный метод для решения вариационных неравенств с монотонными операторами* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39. – № 7. – С. 1091–1097.

Казанский государственный университет

Поступила
28.12.1999