ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 2 (477)

УДК 517.977.55

Л.А. САЗАНОВА

УСТОЙЧИВОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

1. Постановка задач

В данной статье рассматривается задача о быстродействии для линейной дискретной системы. Актуальность задачи определяется ее техническими приложениями. При этом приходится учитывать ограничения на ресурсы органов управления (ограниченный запас энергии).

Пусть поведение процесса управления описывается системой первых разностей

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k = k_0, k_0+1, \dots, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}_n$ — вектор фазовых координат, $u \in \mathbb{R}_m$ — вектор управляющих сил, $A_{n\times n}$ и $B_{n\times m}$ — постоянные матрицы. Предполагается, что система (1.1) вполне управляема, т. е. для нее справедливо

Условие 1.1. Существует $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n$ такое, что ранг матрицы $[B, AB, \dots, A^{N-1}B]$ равен n ([1], с. 99).

Сформулируем две задачи.

Задача 1.1. Пусть заданы момент начала процесса управления $k = k_0$ и исходное состояние $x(k_0) = x_0$, а также желаемое конечное состояние $x(N) = x_1$. Требуется найти момент времени $N = N^0$ и соответствующее ему допустимое управление $u^0(k)$, $k_0 \leq k \leq N^0 - 1$, удовлетворяющее условиям:

1) $u^0(k)$ приводит систему (1.1) из состояния $x(k_0) = x_0$ в состояние $x(N^0) = x_1$;
2) выполняется ограничение на ресурсы управления

$$I[u; N] = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^\top(k)u(k) \leq \mu^2(k_0) \tag{1.2}$$

для $u(k) = u^0(k)$, $N = N^0$, где $\mu^2(k_0) > 0$ — заданное число;

3) каковы бы ни были другой момент времени $N = \widetilde{N}$ и допустимое управление $u(k)$, $k_0 \leq k \leq \widetilde{N} - 1$, приводящее систему (1.1) из $x(k_0) = x_0$ в $x(\widetilde{N}) = x_1$ при условии (1.2), должно выполняться неравенство $N^0 \leq \widetilde{N}$.

Управление $u^0(k)$, $k_0 \leq k \leq N^0 - 1$, будем называть *оптимальным по быстродействию программным управлением*, а число $N^0 - k_0$, равное кратчайшему времени перехода системы из начального состояния x_0 в конечное состояние x_1, назовем *оптимальным временем переходного процесса.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 0001-00753.

Задача 1.2. Будем предполагать, что в каждый текущий момент времени k, $k \geq k_0$, известна реализация $x = x[k]$ фазового вектора x, и что управляющее воздействие u строится по принципу обратной связи ([2], с. 251), т. е. в виде функции $u = u[k, x[k]]$. Момент начала процесса управления $k = k_0$ и исходное состояние $x(k_0) = x_0$ произвольны, но фиксированы, т. е. $0 < k_0 < +\infty, -\infty < x_{i0} < +\infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Задано желаемое конечное состояние x_1 и оговорено ограничение на ресурсы возможных управлений

$$I[u; k_0; N] = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^\top[k, x[k]]u[k, x[k]] \leq \mu^2(k_0), \tag{1.3}$$

причем под возможными управлениями будем понимать однозначные вектор-функции аргументов k, x. Требуется в классе возможных управлений $u[k, x]$ выбрать оптимальное управление $u^0[k, x[k]]$, которое из любого начального состояния k_0, x_0 обеспечивает приведение системы (1.1) в положение x_1, наискорейшее по сравнению с любым другим допустимым управлением, удовлетворяющим условию (1.3).

При этом наискорейшее время переходного процесса $N^0(k_0, x_0) - k_0$ будем называть *временем быстродействия* в задаче о синтезе, а соответствующее управление $u = u^0[k, x[k]]$ — *оптимальным управлением*, найденным по принципу обратной связи.

2. Решение задач 1.1 и 1.2

Известно [3], что при фиксированном времени N окончания процесса оптимальное программное управление u^0, переводящее систему (1.1) из x_0 в $x(N) = x_1$ и удовлетворяющее условию минимальности нормы

$$I[u^0] = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^{0\top}(k)u^0(k) = \min_u I[u] = \min_u \sum_{k=k_0}^{N-1} u^\top(k)u(k), \tag{2.1}$$

где $u = u(k)$ — любое допустимое управление, переводящее систему (1.1) из $x(k_0) = x_0$ в $x(N) = x_1$ за время $N - k_0$, имеет вид

$$u^0(k) = S^\top(k)D^+(k_0)c(k_0, x_0), \quad k = k_0, k_0 + 1, \ldots, N - 1. \tag{2.2}$$

Здесь

$$\begin{gathered} c(k_0, x_0) = x_1 - A^{N-k_0}x_0, \quad S(k) = A^{N-k-1}B, \quad k_0 \leq k \leq N - 1, \\ D(k_0) = \sum_{k=k_0}^{N-1} S(k)S^\top(k), \end{gathered} \tag{2.3}$$

$D^+(k_0)$ — матрица, псевдообратная к симметрической матрице $D(k_0)$. Для нее согласно ([4], с. 276)

$$D^+(k_0) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} v_i v_i^\top,$$

где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ — собственные числа матрицы $D(k_0)$, $v_1, v_2, \ldots, v_r$ — отвечающие им ортонормированные собственные векторы, причем $D^+(k_0) = D^{-1}(k_0)$, если $D^{-1}(k_0)$ существует (в частности, при $k_0 \leq N - n$). Очевидно, если при некотором фиксированном значении N неравенство (1.2) не выполняется для $u(k) = u^0(k)$ (2.2), то оно не выполняется и для любого другого допустимого управления $u(k)$, переводящего систему (1.1) из x_0 в x_1 за время $N - k_0$. Отсюда получаем следующий

Метод решения задачи 1.1 ([2], с. 234). Пусть

$$I[u^0; N] = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^{0\top}(k)u^0(k),$$

где $u^0(k)$ определяется формулой (2.2) и, очевидно, зависит от N. Находим минимальное значение N ($N \geq k_0$), при котором выполняется неравенство (1.2) для управления с минимальной энергией, т. е.

$$I[u^0; N] - \mu^2(k_0) \leq 0. \tag{2.4}$$

Найденное $N = N^0$ и является временем окончания процесса управления в задаче о быстродействии для системы (1.1). При этом $(N^0 - k^0)$ — искомое оптимальное время переходного процесса, а соответствующее $u^0(k)$ (2.2) при $N = N^0$ в (2.3) — оптимальное программное управление.

Замечание 2.1. Если $c = c(k_0, x_0) \in R(D(k_0))$, где $R(D(k_0))$ — область значений $D(k_0)$, то согласно ([5], с. 273) $D(k_0)D^+(k_0)c = c$. В этом случае

$$I[u^0; N] = \sum_{k=k_0}^{N-1} \left[S^\top(k)D^+(k_0)c(k_0, x_0)\right]^\top S^\top(k)D^+(k_0)c(k_0, x_0) = c^\top(k_0, x_0)D^+(k_0)c(k_0, x_0).$$

При этом левая часть неравенства (2.4), являющаяся функцией от N, может быть записана в более удобном виде

$$f(k_0, x_0, N, \mu^2(k_0)) = I[u^0; N] - \mu^2(k_0) = c^\top(k_0, x_0)D^+(k_0)c(k_0, x_0) - \mu^2(k_0),$$

что облегчает нахождение N^0.

Решение задачи 1.2. Воспользуемся решением задачи о приведении системы (1.1) из x_0 в x_1 в течение заданного времени $N - k_0$ управлением с минимальной энергией, построенным по принципу обратной связи [3]. Введем обозначения, аналогичные (2.3),

$$c(k) = c(k, x(k)) = x_1 - A^{N-k}x(k), \quad D(k) = \sum_{i=k}^{N-1} S(i)S^\top(i). \tag{2.5}$$

Тогда управление по принципу обратной связи

$$u^0[k, x[k]] = S(k)D^+(k)c(k, x[k]), \quad k_0 \leq k \leq N-1, \tag{2.6}$$

переводит систему (1.1) из x_0 в x_1 за время $N - k_0$ и удовлетворяет условию

$$I[u^0; k_0; N] = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^{0\top}[k, x[k]]u^0[k, x[k]] \leq I[u; k_0; N] = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^\top[k, x[k]]u[k, x[k]],$$

где $u[k, x[k]]$, $k_0 \leq k \leq N-1$, — любое допустимое управление, переводящее систему (1.1) из $x(k_0) = x_0$ в $x(N) = x_1$. Из (2.6) видно, что $u^0[k, x[k]]$ зависит от величины N.

Процедура решения задачи 1.2 выглядит следующим образом. По начальным данным k_0, x_0, $\mu^2(k_0)$ из неравенства (2.4) находим величину $N^0 = N^0(k_0, x_0)$ и сдвигаемся в точку $x(k_0+1)$, используя оптимальное управление $u^0[k_0, x_0]$ (2.6) (на первом шаге, очевидно, совпадающее с $u^0(k_0)$ (2.2) при $k = k_0$). Затем величина $N^0(k, x[k])$, $k \geq k_0 + 1$, корректируется в соответствии с реализующимися значениями k, $x[k]$, $\mu^2(k)$. В частности, $N^0(k, x[k])$ находится как наименьшее $N \geq k_0$, при котором система (1.1) переводится из $x[k]$ в x_1 к моменту N, удовлетворяющее неравенству

$$I[u^0[k, x]; k; N] - \mu^2(k) \leq 0, \tag{2.7}$$

где $I[u^0[k, x]; k; N] = \sum\limits_{i=k}^{N-1} u^{0\top}[i, x[i]]u^0[i, x[i]]$ и $u^0[i, x[i]]$, $i = k, k+1, \ldots, N-1$, имеют вид (2.6). При этом величина $\mu^2(k)$ определяется на каждом шаге равенством

$$\mu^2(k) = \mu^2(k-1) - u^{0\top}[k-1, x[k-1]]u^0[k-1, x[k-1]], \quad k \geq k_0 + 1. \tag{2.8}$$

Справедливо

Утверждение 2.1. *Пусть $N = N(k, x[k])$ — наименьшее $N \geq k_0$, удовлетворяющее* (2.7), *а величина $\mu^2(k)$ выбирается в соответствии с* (2.8). *Тогда* (2.6) *является оптимальным управлением, найденным по принципу обратной связи в задаче* 1.2.

Замечание 2.2. При выполнении условия $c(k) \in R(D(k))$, $k \geq k_0$, левая часть неравенства (2.7) может быть записана в виде

$$f(k, x(k), N, \mu^2(k)) = c^\top(k) D^+(k) c(k) - \mu^2(k),$$

где $c(k)$ и $D^+(k)$ согласно (2.5) зависят от N.

3. Свойства времени быстродействия и функции $I[u^0; N]$

Теорема 3.1. *Пусть N^0 — оптимальное время окончания процесса управления в задаче* 1.1; *$u^0(k)$, $k = k_0, k_0+1, \ldots, N^0-1$, — соответствующее оптимальное по быстродействию программное управление*; *$N^0(k, x^0[k])$, $k \geq k_0$, — время окончания процесса в задаче* 1.2; *$u^0[kx^0[k]]$ — соответствующее оптимальное управление. Тогда справедливы равенства*

$$N^0(k, x^0[k]) = N^0, \quad u^0[k, x^0[k]] = u^0(k), \quad k = k_0, k_0+1, \ldots, N^0-1.$$

(*Иными словами, на оптимальном движении $x^0(k)$ времена быстродействия $N^0 - k_0$, $N^0(k, x^0[k]) - k_0$ и управления в задачах* 1.1 *и* 1.2 *совпадают.*)

Доказательство. Для удобства обозначим через $u^0[i; k, x^0[k]]$, $i = k, k+1, \ldots, N^0(k, x^0[k]) - 1$, оптимальный синтез, построенный в момент k для всего оставшегося промежутка времени управления процессом, т. е.

$$u^0[i; k, x^0[k]] = S^\top(i) D^+(k) c(k), \quad i = k, k+1, \ldots, N^0(k, x^0[k]) - 1.$$

Здесь $x^0[k]$ означает реализацию оптимального движения, порождаемого управлением $u^0[k, x^0[k]]$. Проведем доказательство методом математической индукции.

Равенства $N(k_0, x_0) = N^0$ и $u^0[k_0; k_0, x_0] = u^0(k_0)$ следуют из способа отыскания $N^0(k_0, x_0)$. Пусть утверждение верно для всех $k = k_0, k_0+1, \ldots, q < N^0 - 1$. Покажем, что оно верно и для $k = q+1$.

В силу индуктивного предположения до момента $k = q$ включительно времена окончания процесса и соответствующего управления совпадают. Следовательно, при $k = q+1$ в обоих случаях система находится в точке $x^0(q+1)$, располагая ресурсом

$$\mu^2(q+1) = \mu^2(k_0) - \sum_{k=k_0}^{q} u^{0\top}(k) u^0(k).$$

Допустим, что $N^0(q+1, x^0[q+1]) \neq N^0$. Рассмотрим две возможности.

1) $N^0(q+1, x^0[q+1]) > N^0$. Тогда $N^0(q+1, x^0[q+1])$ не является наименьшим временем окончания процесса управления в задаче 1.2 с начальными данными $k = q+1$, $x = x^0(q+1) = x^0[q+1]$, т. к. существует меньшее время N^0 такое, что система (1.1) может быть переведена из $x^0(q+1)$ в $x_1 = x(N^0)$, удовлетворяя ограничению

$$I[u^0; q+1, N] = \sum_{k=q+1}^{N^0-1} u^{0\top}(k) u^0(k) \leq \mu^2(q+1).$$

2) $N^0(q+1, x^0[q+1]) < N^0$. Обозначим для краткости $N^0(q+1, x^0[q+1]) = N^*$. Согласно сделанному предположению система (1.1) переводится из $x^0(q+1)$ в x_1 за время $N^* - (q+1)$ управлением $u^0[k; q+1, x^0[q+1]]$, $k = q+1, q+2, \ldots, N^*-1$, (2.6), причем выполнено неравенство

$$\sum_{k=q+1}^{N^*-1} u^{0\top}[k; q+1, x^0[q+1]] u^0[k; q+1, x^0[q+1]] \leq \mu^2(q+1).$$

Рассмотрим управляющее воздействие

$$\overline{u}(k) = \begin{cases} u^0(k) \ \ (2.2), & \text{где } N = N^0 \text{ при } k_0 \le k \le q; \\ u^0\big[k; q+1, x^0[q+1]\big] \ \ (2.6), & \text{где } N = N^* \text{ при } q+1 \le k \le N^* - 1. \end{cases}$$

В момент $k = k_0$ время окончания N^0 выбирается как наименьшее N, при котором выполняется условие (1.2), причем неравенство проверяется для управления с минимальной энергией при фиксированном N. Поэтому для любого $N < N^0$, а значит, и для N^* $I\big[u^0; N^*\big] > \mu^2(k_0)$, где $u^0(k)$ находится по формуле (2.2) для $N = N^*$. Поскольку

$$I\big[\overline{u}; N^*\big] = \sum_{k=k_0}^{N^*-1} \overline{u}^\top(k)\overline{u}(k) \ge \min_u I\big[u; N^*\big] = I\big[u^0; N^*\big],$$

получаем противоречие с выбором N^0. Итак, $N^0\big(q+1; x^0[q+1]\big) = N^0$, откуда согласно [3] имеем $u^0\big[q+1; q+1, x^0[q+1]\big] = u^0(q+1)$. $\square$

Установим одно полезное свойство $I\big[u^0; N\big]$ как функции аргумента N. Справедливо

Предложение 3.1. *Пусть $x(N) \equiv x_1 = 0$. Тогда функция $I\big[u^0; N\big] = \sum\limits_{k=k_0}^{N-1} u^{0\top}(k)u^0(k)$ монотонно убывает при возрастании N.*

Доказательство. Оптимальное управление, переводящее систему (1.1) из x_0 в $x(N) = 0$, имеет вид

$$u^0(k) = S^\top(k)D^+(k_0)\big(-A^{N-k_0}x_0\big), \quad k = k_0, k_0+1, \ldots, N-1. \tag{3.1}$$

Предположим, что система (1.1) может быть переведена из заданного начального состояния $x(k_0) = x_0$ в $x(N) = x_1 = 0$, причем $I\big[u^0; N\big] \le \mu^2(k_0)$. Рассмотрим задачу об управлении системой (1.1) [3] при тех же x_0 и x_1 за время $(N+1)$. Одним из допустимых управлений, решающих эту задачу, является

$$\overline{u}(k) = u^0(k) \ \ (\text{см. } (3.1)), \quad k = k_0, k_0+1, \ldots, N-1, \quad \overline{u}(N) \equiv 0. \tag{3.2}$$

Действительно, в момент N под действием $\overline{u}(k)$ (3.2) система перейдет в точку $x(N) = 0$ и на последнем $(N - k_0 + 1)$-м шаге останется в этой точке: $x(N+1) = Ax(N) + B\overline{u}(N) = 0$. Но оптимальное программное управление $\widetilde{u}^0(k)$, $k = k_0, k_0+1, \ldots, N$, переводящее систему (1.1) из x_0 в x_1 — это допустимое управление с минимальной энергией. Следовательно,

$$I\big[\widetilde{u}^0; N+1\big] = \sum_{k=k_0}^{N} \widetilde{u}^{0\top}(k)\widetilde{u}^0(k) = \min_u I\big[u; N+1\big] \le I\big[\overline{u}; N+1\big] =$$

$$= \sum_{k=k_0}^{N} \overline{u}^\top(k)\overline{u}(k) = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^{0\top}(k)u^0(k) = I\big[u^0; N\big] = \min_u I\big[u; N\big].$$

Здесь $\widetilde{u}^0(k)$, $k = k_0, k_0+1, \ldots, N$, имеет вид (3.1) с заменой N на $N+1$. Заметим, что поскольку $u^0(k)$, $k_0 \le k \le N-1$, удовлетворяло ограничению (1.2), построенное с его помощью $\overline{u}(k)$, $k_0 \le k \le N$, (3.2) также удовлетворяет указанному ограничению. Итак, $I\big[u^0; N\big] \ge I\big[u^0; N+1\big]$. $\square$

4. Геометрическая трактовка решения задач 1.1 и 1.2

При нахождении минимального момента времени $N \geq k_0$, являющегося решением неравенства (2.4) или (2.7), могут возникнуть трудности, связанные со сложной зависимостью функции $I[u^0; N]$ в (2.4) или $I[u^0[k;x];k;N]$ в (2.7) от N, что затрудняет отыскание времени быстродействия. Обсудим подход к решению задач 1.1 и 1.2, позволяющий несколько облегчить поиск оптимального времени переходного процесса.

Для задачи 1.1 при фиксированном конечном состоянии x_1 системы (1.1) опишем области управляемости, т. е. множества $M_{N-k_0}(x_1)$, из каждой точки которых система (1.1) может быть переведена в $x(N) = x_1$ за время $N - k_0$, удовлетворяя ограничению на ресурсы управления (1.2). При $N = k_0 + 1$

$$M_1(x_1) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = x_1 - Bu(k_0), \quad \text{где } \ u(k_0) \in \mathbb{R}^m \ \text{ и } \ u^\top(k_0)u(k_0) \leq \mu^2(k_0)\}.$$

Пусть $\{b^{(1)}, \ldots, b^{(s_1)}\}$ — базис пространства столбцов матрицы $[x_1, B]$. Тогда равенство $Ax = x_1 - Bu(k_0)$ имеет место для некоторого $u(k_0) \in \mathbb{R}^m$, лишь если существуют такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s_1}$, что $Ax = \sum\limits_{\ell=1}^{s_1} \alpha_\ell b^{(\ell)}$. Рассуждая аналогично, получаем $x \in M_{N-k_0}(x_1)$ тогда и только тогда, когда существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s_{N-k_0}}$ такие, что

$$A^{N-k_0}x = \sum_{\ell=1}^{s_{N-k_0}} \alpha_\ell b^{(\ell)} = x_1 - \sum_{k=k_0}^{N-1} A^{N-k-1}Bu(k),$$

где $\{b^{(1)}, \ldots, b^{(s_{N-k_0})}\}$ — базис пространства столбцов $[x_1, B, AB, \ldots, \ A^{N-k_0-1}B]$, причем $\sum\limits_{k=k_0}^{N-1} u^\top(k)u(k) \leq \mu^2(k_0)$.

Учитывая, что перебор всех управлений $u(k_0), \ldots, u(N-1)$, для которых выполнено неравенство (1.2), представляет трудности, ограничимся проверкой выполнимости (1.2) лишь для программного управления с минимальной энергией, соответствующего $x(k_0) = x$, $x(N) = x_1$ и $N = k_0, k_0 + 1, \ldots$ В этом случае области управляемости имеют вид

$$M_{N-k_0}(x_1) = \Bigl\{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_{s_{N-k_0}} : A^{N-k_0}x = \sum_{\ell=1}^{s_{N-k_0}} \alpha_\ell b^{(\ell)} = \sum_{k=k_0}^{N-1} A^{N-k-1}Bu^0(k),$$
$$\text{где } \ u^0(k) = \bigl(A^{N-k-1}B\bigr)^\top D_N^+(k_0)(x_1 - A^{N-k_0}x), \ \text{ причем } \ \sum_{k=k_0}^{N-1} u^{0\top}(k)u^0(k) \leq \mu^2(k_0)\Bigr\}.$$

Замечание 4.1. В формуле для $u^0(k)$ матрица $D_N(k_0)$ определена согласно (2.3), а индекс N подчеркивает ее зависимость от N, что существенно при решении задачи 1.2.

Итак, зная вид $M_{N-k_0}(x_1)$ при $N = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots$, для решения задачи 1.1 достаточно найти минимальное значение $N - k_0 \geq 1$, при котором $x_0 \in M_{N-k_0}(x_1)$. В условиях замечания 2.1 проверка справедливости последнего включения сводится к проверке выполнимости неравенств

$$\bigl(x_1 - A^{N-k_0}x_0\bigr)^\top D_N^+(k_0)\bigl(x_1 - A^{N-k_0}x_0\bigr) - \mu^2(k_0) \leq 0 \tag{4.1}$$

для $N = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots$ Таким образом, значение N, при котором впервые выполнится неравенство (4.1), и будет оптимальным временем окончания процесса управления.

Замечание 4.2. Представляет интерес случай, когда $x_1 = 0$. Тогда при каждом N достаточно знать базис пространства столбцов матрицы $[B, AB, \ldots, A^{N-k_0-1}B]$. При этом, если

$$A^{N-k_0}x = -\sum_{k=k_0}^{N-1} A^{N-k-1}Bu(k) \ \text{ и } \ \sum_{k=k_0}^{N-1} u^\top(k)u(k) \leq \mu^2(k_0),$$

то

$$A^{N-k_0+1}x+\sum_{k=k_0}^{N}A^{N-k}Bu(k)=A\Big(A^{N-k_0}x+\sum_{k=k_0}^{N-1}A^{N-k-1}Bu(k)\Big)+Bu(N)=0$$

при $u(N)\equiv 0$. Значит, управления $u(k_0),\dots,u(N-1)$, переводящие систему (1.1) из состояния $x(k_0)=x$ в состояние $x(\overline{N})=0$ для некоторого $N=\overline{N}$ и удовлетворяющие ограничению на ресурсы (1.2), решают ту же задачу для $x(k_0)=x$, $x(N)=0$ и в случае большего N, если положить остальные управления $u(k)\equiv 0$ при $k\geq\overline{N}$.

Таким образом, области управляемости при $x_1=0$ вкладываются друг в друга:

$$M_1(0)\subset M_2(0)\subset M_3(0)\subset\cdots.$$

Этого не будет в случае $x_1\neq 0$, т.к. действие матрицы A само по себе изменяет состояние системы, если x_1 уже достигнуто в момент N, а требующееся для нейтрализации множителя A управление $u(N)$ увеличивает затраченные ресурсы управления.

Рассмотрим теперь задачу 1.2 в предположении, что для заданных $k=k_0$, $x(k_0)=x_0$, $x(N)=x_1$ и $\mu^2(k_0)$ существуют оптимальное программное время $N(k_0,x_0)$ окончания процесса и соответствующее оптимальное программное управление. Пусть $k=k_0+1$, и известна реализация $x[k_0+1]=x$. Достаточно найти минимальное $N=N(k_0+1,x)$, для которого выполнено включение $x\in M_{N(k_0+1,x)-(k_0+1)}(x_1)$, где $M_{N(k_0+1,x)-(k_0+1)}$ определяется подобно $M_{N-k_0}(x_1)$ с заменой k_0, N, $D_N(k_0)$ и $u^0(k)$ соответственно на k_0+1, $N(k_0+1,x)$, $D_{N(k_0+1)}(k_0+1)$ и $u^0[k;k_0+1,x]$ (2.6). Рассуждая аналогично, нетрудно видеть, что для отыскания минимального времени $N^0(k,x)$ окончания процесса на k-м шаге необходимо, последовательно проверяя условия

$$x\in M_1(x_1),\ x\in M_2(x_1),\dots,x\in M_{N(k,x)-k}(x_1),\dots, \tag{4.2}$$

найти наименьшее $N(k,x)$, для которого (4.2) выполнится. При этом проверка справедливости (4.2) в k-й момент времени равносильна проверке выполнимости неравенств

$$\sum_{\ell=k}^{N(k,x)-1}u^0[\ell;k,x]^\top u^0[\ell;k,x]\leq\mu^2(k),\quad N(k,x)=k+1,k+2,\dots,$$

где $x=x[k]$, $u^0[\ell;k,x]$ и $\mu^2(k)$ находим в соответствии с (2.6) и (2.8).

В условиях замечания 2.2 это означает, что достаточно найти $N(k,x)$, при котором впервые выполнится неравенство

$$\big(x_1-A^{N(k,x)-k}x\big)^\top D^+_{N(k,x)}(k)\big(x_1-A^{N(k,x)-k}x\big)-\mu^2(k)\leq 0;$$

окончание процесса управления наступит при $k=N(k,x)$.

5. Устойчивость оптимального синтеза

Предположим, что сигналы обратной связи, доставляющие в регулятор информацию о реализовавшихся значениях $x^0[k]$ фазового вектора x, в каждый текущий момент времени k сопровождаются помехами $p(k)$, и реализация оптимального управления $u^0[k,x]$ происходит по закону

$$u^0[k,y[k]+p(k)]=S^\top(k)D^+(k)\big(x_1-A^{N^0-k}(y[k]+p(k))\big),\quad k=k_0,\dots,N^0-1. \tag{5.1}$$

Возмущенное движение $y(k)$ управляемого объекта является решением системы первых разностей

$$y(k+1)=Ay(k)+Bu^0[k,y(k)+p(k)] \tag{5.2}$$

при начальном условии

$$y(k_0)=x_0+p(k_0). \tag{5.3}$$

Время быстродействия в процессе с помехами определим как наименьшее время, за которое система (5.2) переводится допустимым управлением, удовлетворяющим ограничению на ресурсы, из точки $y(k)$ в сколь угодно малую окрестность точки x_1. При этом будем обозначать оптимальное время окончания процесса, найденное в k-й момент, через $N\big(k, y[k]\big)$; соответственно, время быстродействия в k-й момент равно $N\big(k, y[k]\big) - k$.

Будем считать оптимальный синтез $u^0[k,x]$ *устойчивым к помехам* в каналах обратной связи, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать величину $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такую, что возмущенное движение $y(k)$ системы (5.2), порождаемое начальным условием (5.3), при всех k, $k_0 \le k \le N^0(k_0, x_0)$, удовлетворяет неравенству $\|y(k) - x^0(k)\| < \varepsilon$, если только $\|p(k)\| < \delta$, $k_0 \le k \le N^0(k_0, x_0) - 1$. Здесь $N^0(k_0, x_0) = N^0$ — оптимальное время окончания процесса в задаче 1.2 при отсутствии возмущений, $x^0(k)$ — соответствующая ему оптимальная траектория невозмущенной системы (1.1).

Поскольку оптимальный синтез $u^0[k,x] = S^\top(k)D^+(k)c(k)$, $k = k_0, k_0+1, \ldots, N-1$, в задаче об управлении системой (1.1) с фиксированным временем N окончания процесса устойчив к постоянно действующим возмущениям, ограниченным в каждый момент времени [3], величину $\delta(\varepsilon)$ можно выбрать так, что суммарная затраченная энергия в процессе с помехами отличается от энергии при отсутствии помех сколь угодно мало [6]. А именно, при любом k, $k_0 \le k \le N-1$,

$$\big|I\big[u^0[k, y+p]; k; N\big] - I\big[u^0; k; N\big]\big| =$$
$$= \left|\sum_{i=k}^{N-1} u^{0\top}\big[i; y[i] + p(i)\big] u^0\big[i; y[i]+p(i)\big] - \sum_{i=k}^{N-1} u^{0\top}\big[i; x^0[i]\big] u^0\big[i; x^0[i]\big]\right| < \varepsilon$$

для любого заданного $\varepsilon > 0$.

Предположим, что при отсутствии помех величина $I\big[u^0; k_0; N^0\big]$ в задаче 1.2 удовлетворяет неравенству

$$I\big[u^0; k_0; N^0\big] < \mu^2(k_0). \tag{5.4}$$

Тогда из предыдущих рассуждений следует, что для любого ε, $0 < \varepsilon < \mu^2(k_0) - I\big[u^0; k_0; N^0\big]$, система (5.2) при начальном условии (5.3) переводится при $k = N^0$ допустимым управлением (5.1) в ε-окрестность точки x_1, удовлетворяя ограничению (1.3), если $\|p(k)\| < \delta(\varepsilon)$, $k_0 \le k \le N^0 - 1$, где $\delta(\varepsilon)$ — некоторое известное число. Таким образом, справедливо

Утверждение 5.1. *При выполнении условия* (5.4) *оптимальное время окончания процесса* $N^0\big(k, y[k]\big)$ *при наличии возмущений удовлетворяет для любого* k, $k_0 \le k \le N^0 - 1$, *неравенству*

$$N^0\big(k, y[k]\big) \le N^0.$$

При этом, если $N\big(k, y[k]\big) = N^0$ *при* $k = k_0, k_0+1, \ldots, N^0-1$, *то оптимальный синтез* $u^0[k,x]$ (2.6) *в задаче быстродействия устойчив к помехам в каналах обратной связи, ограниченным в каждый текущий момент времени.*

Замечание 5.1. Если $I\big[u^0; N^0\big] = \mu^2(k_0)$, т. е. отсутствует запас ресурса, корректирующего влияние помех, то уже при $k = k_0$ может оказаться, что $N^0\big(k_0, y[k_0]\big) > N^0$, и устойчивость отсутствует, что иллюстрируется следующим примером (см. замечание 5.2).

Пример 5.1. Рассмотрим задачу о быстродействии для системы первых разностей

$$x_1(k+1) = x_2(k), \quad x_2(k+1) = x_1(k) + u(k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{5.5}$$

при условиях $x(0) = x_0 = [0.5\ 0.5]^\top$, $x(N) = x_1 = [1\ 1]^\top$, $\mu^2(0) = 0.6$. Найдем оптимальное время переходного процесса и соответствующее ему оптимальное программное управление.

Систему (5.5) запишем в виде

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),$$

где $k = 0, 1, \dots;$ $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, $x(k) = \left[\begin{smallmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{smallmatrix}\right]$, $u(k) \in \mathbb{R}$. Поскольку для любого $u(0) \in \mathbb{R}$ $x_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \neq \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \cdot u(0) = \left[\begin{smallmatrix} 0.5 \\ 0.5+u(0) \end{smallmatrix}\right]$, то время $N = 1$ не является возможным временем окончания процесса. Покажем, что искомое время $N = N^0 = 2$. Согласно формулам (2.3), (2.2) при $N = 2$ имеем

$$c(0, x_0) = x_1 - A^2 x_0 = [0.5\ 0.5]^\top, \quad S(0) = AB = [1\ 0]^\top, \quad S(1) = B = [0\ 1]^\top,$$
$$D(0) = S(0)S^\top(0) + S(1)S^\top(1) = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] = E,$$

следовательно, $D^+(0) = D^{-1}(0) = E$,

$$u^0(0) = S^\top(0)D^+(0)c(0, x_0) = 0.5; \quad u^0(1) = S^\top(1)D^+(0)c(0, x_0) = 0.5.$$

При этом

$$x^0(1) = Ax(0) + Bu^0(0) = [0.5\ 1]^\top, \quad x^0(2) = Ax^0(1) + Bu^0(1) = [1\ 1]^\top = x_1,$$
$$I[u^0; 2] = \big(u^0(0)\big)^2 + \big(u^0(1)\big)^2 = 0.5 < \mu^2(0) = 0.6.$$

Таким образом, имеющихся ресурсов управления достаточно для перевода системы (5.5) из x_0 в x_1 в момент $N^0 = 2$. Оптимальное время переходного процесса $N^0 - k_0$ также равно 2 (т. к. $k_0 = 0$). Заметим, что в силу теоремы 3.1, с учетом введенных в ней обозначений справедливы равенства

$$u^0[0; 0, x[0]] = u^0(0), \quad u^0[1; 1, x^0[1]] = u^0(1), \quad N^0(0; x[0]) = N^0(1; x^0[1]) = N^0.$$

Итак, получены решения задач 1.1 и 1.2 для указанной системы.

Покажем, что оптимальный синтез $u^0[k, x]$ (2.6) при заданных A, B, x_0, x_1 и $\mu^2(0)$ устойчив к помехам в каналах обратной связи. Пусть задано произвольно малое значение ε, $0 < \varepsilon < 0.1$ (ограничение сверху на ε является естественным, т. к. нас интересуют малые ε). Предположим, что в момент $k = 0$ согласно (5.2), (5.3) на $x(0)$ и на управление $u^0[0, x[0]]$ действует возмущение $p(0) = \big[p_1(0)\ p_2(0)\big]^\top$, причем $\|p(0)\| = \sqrt{p_1^2(0) + p_2^2(0)} < \delta$, где $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (определим $\delta(\varepsilon)$ ниже).

При ε достаточно малом $N = 1$ не является оптимальным временем окончания процесса. Действительно,

$$y(1) = A(x_0 + p(0)) + Bu(0) = \begin{bmatrix} 0.5 + p_2(0) \\ 0.5 + p_1(0) + u(0) \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем $\|y(1) - x_1\| \le \varepsilon$, лишь если $p_2(0) = 0.5 \pm \varepsilon_1$ $(0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon)$, но тогда $\|p(0)\| = \sqrt{0.25 \pm \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + p_1^2(0)} \ge 0.4$, т. е. $\|p(0)\|$ достаточно велика относительно ε.

Покажем, что при соответствующем выборе δ оптимальное время окончания процесса $N^0(0, y[0])$, найденное в момент $k = 0$, равно 2. Используя (2.5), (2.6) для $N = 2$, находим

$$c(0, y[0]) = x_1 - A^2(x_0 + p(0)) = \big[0.5 - p_1(0)\ 0.5 - p_2(0)\big]^\top.$$

При $N = 2$ $S(0)$, $S(1)$ и $D^+(0)$ те же, что и выше, поэтому

$$u^0[0; 0, y[0]] = S^\top(0)D^+(0)c(0, y[0]) = 0.5 - p_1(0),$$
$$u^0[1; 0, y[0]] = S^\top(1)D^+(0)c(0, y[0]) = 0.5 - p_2(0)$$

(заметим, что $u^0[1; 0, y[0]] = u^0[1; 1, y[1]] = S^\top(1)D^+(1)c(1; y[1])$). Получаем предсказанные в момент $k = 0$ состояния системы (5.5):

$$y(1) = [0.5 + p_2(0)\ 1]^\top = y[1], \quad y(2) = [1\ 1]^\top = x_1,$$

при этом

$$I[u^0; 0; 2] = \big(0.5 - p_1(0)\big)^2 + \big(0.5 - p_2(0)\big)^2 \le 0.5 + \|p(0)\|^2 + |p_1(0)| + |p_2(0)|;$$

учитывая, что $|p_i(0)| \le \|p(0)\|$, $i=1,2$, получаем оценку

$$I[u^0;0;2] \le 0.5+\delta^2+2\delta. \tag{5.6}$$

Требуя, чтобы $0.5+\delta^2+2\delta \le 0.6$, находим положительные решения последнего неравенства $0<\delta<-1+\sqrt{1.1}\approx 0.049$. Учитывая (5.6), заключаем $N^0(0,y(0))=2$, если только $\delta(\varepsilon)=\min\{\varepsilon;-1+\sqrt{1.1}\}$. В самом деле, для любой реализовавшейся в момент $k=0$ помехи $p(0)$ такой, что $\|p(0)\|<\delta$, выполнены условия

$$\|y(1)-x^0(1)\| = \sqrt{\big(0.5+p_2(0)-0.5\big)^2+(1-1)^2} = |p_2(0)| \le \delta \le \varepsilon,$$
$$I[u^0;0;2]\le 0.6, \quad y(2)=x_1.$$

Пусть теперь $k=1$; система (5.5) находится в точке $y[1]$, располагая ресурсом $\mu^2(1)=0.6-\big(0.5-p_1(0)\big)^2$; $N^0(1,y[1])=N^0(0,y[0])=2$ в силу теоремы 3.1, т. к. $y[1]$ есть точка оптимальной траектории системы (5.5) при условии (5.3). Пусть на управление действует возмущение $p(1)=\big[p_1(1)\ \ p_2(1)\big]^\top$, $\|p(1)\|<\delta$. Тогда реализовавшееся в момент $k=1$ управляющее воздействие имеет вид

$$u[1;1,y[1]] = u^0(1;1,y[1]+p(1)) = S^\top(1)D^+(1)c(1;y[1]+p(1)).$$

Здесь $D(1)=S(1)S^\top(1)=\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$, $D^+(1)=\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]=D(1)$; $c(1,y[1]+p(1))=x_1-A(y[1]+p(1))=\big[-p_2(1)\ \ 0.5-p_2(0)-p_1(1)\big]^\top$, откуда находим

$$u[1;1,y[1]] = 0.5-p_2(0)-p_1(1), \quad y(2)=\big[1\ \ 1-p_1(1)\big]^\top.$$

Справедлива оценка $\|y(2)-x_1\| = |p_1(1)| < \delta \le \varepsilon$.

Проверим справедливость неравенства (2.7) для $u[1;1,y[1]]$. Реальное

$$I[u;1;2] = \big(0.5-p_2(0)-p_1(1)\big)^2 \le \mu^2(1) = 0.6-\big(0.5-p_1(0)\big)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p_1^2(0)+p_2^2(0)+p_1^2(1)+2p_2(0)p_1(1)-p_1(1)-p_2(0)-p_1(0) \le 0.1.$$

Учитывая оценки $p_1^2(0)+p_2^2(0)<\delta^2$, $p_1^2(1)<\delta^2$, $|p_i(k)|<\delta$, $i=1,2$; $k=0,1$; $p_2(0)p_1(1)<\delta^2$, получаем неравенство для отыскания δ:

$$4\delta^2+3\delta-0.1\le 0,$$

положительные решения которого $0<\delta\le\frac{-3+\sqrt{10.6}}{8}\approx 0.032$ нас устраивают. Окончательно имеем: для любого, сколь угодно малого ε $(0<\varepsilon\le 0.1)$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)=\min\{\varepsilon;\frac{-3+\sqrt{10.6}}{8}\}$ такое, что для $k=0,1$ оптимальный синтез (2.6) устойчив к любой помехе $p(k)$ в каналах обратной связи, если только $\|p(k)\|<\delta$.

Замечание 5.2. Предположим, что величина $\mu^2(0)$, ограничивающая ресурсы управления в момент $k_0=0$ для системы (5.5) при тех же x_0 и x_1, равна 0.5. Тогда уже при $k=0$ существуют помехи, для которых $N^0(0,y[0])\ge 3$. Например, рассмотрим $p(0)$ вида $p(0)=\big[-\delta_1\ \ -\delta_1\big]^\top$, где $\delta_1>0$ такое, что $\|p(0)\|=\delta_1\sqrt{2}<\varepsilon$ для сколь угодно малого заданного $\varepsilon>0$. При $N=2$ для указанной реализации помехи оптимальные управления имеют вид $u^0(0;0;y[0])=0.5+\delta_1=u^0(1;0;y[0])$, но тогда $I[u^0;2;2]=2(0.5+\delta_1)^2>0.5$ при любом δ_1, $0<\delta_1<\varepsilon/\sqrt{2}$. Последнее означает, что $N=2$ не является оптимальным временем окончания процесса. Нетрудно также убедиться, что неравенство $\|y(1)-x^0(1)\|<\varepsilon$ не выполнится в этом случае и при $N^0(0,y[0])=3$. Итак, устойчивость в данном случае отсутствует. Причиной этого является невыполнение условия $N^0(k_0,y[k_0])=N^0$.

Замечание 5.3. Предыдущий пример показывает, что влияние помех может увеличить время быстродействия, если $I[u^0; N^0] = \mu^2(k_0)$. Но иногда возможна и обратная ситуация: реализовавшаяся помеха $p(k)$ такова, что $N^0(k, y[k]) < N^0$, вследствие чего оптимальный синтез (2.6) также неустойчив. Сказанное относится и к случаю, когда, например, вектор $y[k]$ является собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ, и $x_1 = \lambda y[k]$. Уменьшение времени $N^0(k, y[k])$ также возможно, если $y[k] \in \ker A$, а $x_1 = 0$ (все сказанное справедливо и для матрицы A^s, $s \in \mathbb{N}$, при условии $N^0 - k_0 > s$).

Отметим также, что реальная точность измерения (а значит, и допустимая минимальная погрешность) конечна, иными словами, величина ε обычно ограничена снизу. Ниже рассмотрим пример, показывающий, как при фиксированном $\varepsilon > 0$ может оказаться, что $N^0(0, y[0]) < N^0$.

Пример 5.2. Решим задачу 1.2 для системы

$$x_1(k+1) = 2x_2(k), \quad x_2(k+1) = 2x_1(k) + u(k), \quad k = 0, 1, \dots, \tag{5.7}$$

при условиях $x(0) = x_0 = [1 \;\; 1-\varepsilon/4]^\top$, $x_1 = [2\;2]^\top$, $\mu^2(0) = 6$. Здесь ε $(0 < \varepsilon < 1)$ — фиксированная малая величина.

При отсутствии возмущений в каналах обратной связи оптимальное время окончания процесса (оно же — время быстродействия при $k_0 = 0$) $N^0 = 2$. Покажем это. При $N = 1$

$$Ax_0 + Bu(0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\varepsilon/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\varepsilon/2 \\ 2+u(0) \end{bmatrix} \neq x_1,$$

каким бы ни было $u(0) \in \mathbb{R}$, т. к. $\varepsilon > 0$. При $N = 2$ имеем

$$c(0, x_0) = x_1 - A^2 x_0 = [-2 \quad -2+\varepsilon]^\top, \quad S(0) = AB = [2\;0]^\top, \quad S(1) = B = [0\;1]^\top,$$
$$D(0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^+(0) = D^{-1}(0) = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

откуда находим

$$u^0(0) = u^0[0; 0, x_0] = -1; \quad u^0(1) = u^0[1; 0, x_0] = -2 + \varepsilon.$$

При этом $x^0(1) = [2-\varepsilon/2 \;\; 1]^\top$, $x^0(2) = [2\;\;2]^\top = x_1$, $I[u^0; 2] = (-1)^2 + (\varepsilon - 2)^2 = 5 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon < 6$ при $0 < \varepsilon < 1$. Итак, $N^0(0, x_0) = N^0 = 2$.

Пусть теперь в каналах обратной связи существуют помехи. Рассмотрим два случая.

а) При $k = 0$ реализовалась помеха $p(0) = [0 \;\; \varepsilon/4]^\top$. Тогда $A(x_0 + p(0)) = [2\;\;2]^\top = x_1$, т. е. за время $N = 1$ (равное здесь $N^0(0, y[0])$) система (5.7) приводится в состояние x_1 нулевым управлением.

б) Пусть $p(0) = [0 \;\; \delta]^\top$, где $|\delta| < \varepsilon/4$. Рассмотрим так же, как и в случае а), $u^0[0; 0, y[0]] \equiv 0$ и $N = 1$. Тогда

$$y(1) = A(x_0 + p(0)) = \begin{bmatrix} 2 + 2\delta - \varepsilon/2 \\ 2 \end{bmatrix} \neq x_1,$$

но $\|y(1) - x_1\| = 2|\delta - \varepsilon/4| < \varepsilon$, следовательно, нулевым управлением за время $N = 1$ система (5.7) переводится в ε-окрестность точки x_1.

В обоих случаях $N^0(0, y[0]) = 1 < N^0 = 2$, $\|y(1) - x^0(1)\| \geq 1$, и устойчивость отсутствует. В данном примере существенно то обстоятельство, что при отсутствии возмущений мы обязаны приводить систему точно в точку x_1, а в процессе с помехами достаточно достичь заданной ε-окрестности.

Автор выражает благодарность Э.Г. Альбрехту за постановку задачи и полезные обсуждения результатов работы.

Литература

1. LaSalle J.P. *The stability and control of discrete processes.* – Appl. Math. Sci. – V. 62. – New York: Springer-Verlag Inc. 1986. – 150 p.
2. Красовский Н.Н. *Теория управления движением. Линейные системы.* – М.: Наука, 1968. – 476 с.
3. Сазанова Л.А. *Синтез оптимального управления в линейных дискретных системах* // Пробл. теор. и прикл. матем. Тез. докл. 30-й рег. молод. конф. – Екатеринбург, 1999. – С. 66–67.
4. Воеводин В.В. *Линейная алгебра.* Учеб. пособие. – М.: Наука. 1980. – 400 с.
5. Ланкастер П. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1978. – 280 с.
6. Сазанова Л.А. *Устойчивость оптимального синтеза в задаче о быстродействии для линейных дискретных систем* // Пробл. теор. и прикл. матем. Тез. докл. 31-й рег. молод. конф. – Екатеринбург, 2000. – С. 97–98.

Уральский государственный университет

Поступила 04.09.2000