ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 9 (460)

УДК 517.51

А.Ю. ТРЫНИН

ОБ ОТСУТСТВИИ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

В работе изучаются вопросы устойчивости задачи представления непрерывной функции интерполяционным процессом Лагранжа $L_n^{SL}(f,x)$ по собственным функциям дифференциального оператора. Пусть $U_n(x)$ — n-я собственная функция регулярной задачи Штурма–Лиувилля

$$U'' + [\lambda - q(x)]U = 0, \tag{1}$$

$$U'(0) - hU(0) = 0,$$

$$U'(\pi) + HU(\pi) = 0, \tag{2}$$

где h и H — произвольные действительные числа, а потенциал q суммируем на $[0,\pi]$. Известно (см., напр., [1]–[5]), что U_n для любого $n \in N$ на интервале $(0,\pi)$ имеет ровно n простых нулей $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} < \pi$.

В [1] Г.И. Натансон предложил рассматривать интерполяционные процессы Лагранжа вида

$$L_n^{SL}(f,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})} f(x_{k,n}) = \sum_{k=1}^{n} l_{k,n}^{SL}(x) f(x_{k,n}). \tag{3}$$

Им установлена равномерная сходимость внутри $(0,\pi)$ таких процессов к функции f из класса Дини–Липшица. В [6] получен аналог критерия А.А. Привалова равномерной сходимости процессов Лагранжа–Чебышева в случае интерполирования по собственным функциям задачи (1)–(2) и тем самым описан класс непрерывных на $(0,\pi)$ функций таких, что для любого представителя этого класса процесс (3) равномерно сходится к f внутри интервала $(0,\pi)$. Необходимо отметить, что эти результаты сформулированы для случая непрерывного потенциала q ограниченной вариации в уравнении (1). Но доказательства как в [1], так и в [6] опираются на асимптотические формулы, не меняющие своего вида, если ограничиться требованием суммируемости потенциала q ограниченной вариации.

Основная цель работы:

1. показать отсутствие устойчивости задачи представления непрерывной функции процессом Лагранжа–Штурма–Лиувилля (3) при незначительном изменении как потенциала q уравнения (1) в $L[0,\pi]$ так и констант h, H в краевых условиях (2);

2. решить вопрос о равносходимости изучаемых конструкций (3) и классических интерполяционных процессов Лагранжа–Чебышева $Z_n(T, f(\arccos), \cos x)$ во внутренних точках интервала $(0,\pi)$, поставленный К.И. Осколковым.

Далее доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любого положительного ε и любой задачи Штурма–Лиувилля* (1)–(2) *существуют суммируемый на $[0,\pi]$ потенциал $\widetilde{q} : \|q - \widetilde{q}\|_{L[0,\pi]} < \varepsilon$ и множество E, плотное в отрезке $[0,\pi]$, такие, что для каждой точки $x_0 \in E$ найдется непрерывная на $[0,\pi]$ функция f,* *для которой выполняются соотношения*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |L_n^{SL}(f, x_0)| = \infty, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} |\widetilde{L}_n^{SL}(f, x) - f(x)| = 0 \ \ \textit{равномерно внутри} \ \ (0, \pi), \tag{5}$$

где L_n^{SL} *и* $\widetilde{L}_n^{SL}$ *— процессы Лагранжа–Штурма–Лиувилля, построенные по собственным функциям задач* (1)–(2) *с потенциалами* q *и* $\widetilde{q}$ *соответственно.*

Теорема 2. *Для любого положительного* ε *существуют* $\widetilde{H}(\widetilde{h}) : |H - \widetilde{H}| < \varepsilon$ $(|h - \widetilde{h}| < \varepsilon)$ *и множество* E, *плотное в отрезке* $[0, \pi]$, *такие, что для каждой точки* $x_0 \in E$ *найдется непрерывная на* $[0, \pi]$ *функция* f, *для которой выполняются соотношения* (4)–(5), *где* L_n^{SL} *и* $\widetilde{L}_n^{SL}$ *— процессы Лагранжа–Штурма–Лиувилля, построенные по собственным функциям задач* (1)–(2) *с потенциалом* $q \overset{\text{п.в.}}{=} 0$ *и константами* H *и* $\widetilde{H}$ (h *и* $\widetilde{h}$) *соответственно.*

Теорема 3. *Существуют* $H(h)$ *в краевых условиях задачи Штурма–Лиувилля* (1)–(2) *с нулевым потенциалом* q *и множество* E, *плотное в* $[0, \pi]$, $E \subset [0, \pi]$, *такие, что для каждой точки* $x_0 \in E$ *найдется непрерывная на* $[0, \pi]$ *функция* f, *для которой выполняется соотношение* (4) *и*

$$\lim_{n\to\infty} |Z_n(T, f(\cos\cdot), x) - f(\cos x)| = 0 \ \ \textit{равномерно внутри} \ \ (0, \pi).$$

Существует множество E_1, *плотное в* $[0, \pi]$, $E \subset [0, \pi]$, *такое, что для каждой точки* $x_0 \in E_1$ *найдется непрерывная на* $[0, \pi]$ *функция* g, *для которой выполняются соотношения*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |Z_n(T, g(\cos\cdot), x_0)| = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} |L_n^{SL}(g, x) - g(x)| = 0 \ \ \textit{равномерно внутри} \ \ (0, \pi).$$

Для доказательства этих теорем потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* U_n *— собственная функция задачи Штурма–Лиувилля* (1)–(2), *соответствующая собственному значению* λ_n, $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n} < \pi$ *— нули* $U_n(x)$. *Тогда имеют место следующие асимптотические формулы*:

$$U_n(x) = \cos nx + \frac{\beta(x)}{n} \sin nx + O(n^{-2}), \tag{6}$$

$$U_n'(x) = -n \sin nx + \beta(x) \cos nx + O(n^{-1}), \tag{7}$$

$$U_n''(x) = -n^2 \cos nx - n\beta(x) \sin nx + O(1), \tag{8}$$

$$U_n'(x_{k,n}) = (-1)^k n + O(n^{-1}), \tag{9}$$

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2n}\pi + \frac{1}{n^2}\beta\Big(\frac{2k-1}{2n}\pi\Big) + O(n^{-3}), \tag{10}$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + O(n^{-1}), \tag{11}$$

где

$$\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau, \quad c = \frac{1}{\pi}\Big(h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau\Big),$$

а оценка остаточного члена во всех формулах (6)–(10) *равномерна по* x *и* $k = \overline{1, n}$.

По поводу доказательства (6)–(7) и (11) см. [2]–[5]. Заметим, что применение метода Лиувилля–Стеклова к тождеству

$$U_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}\, x + \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\sqrt{\lambda_n}\, x + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^x \sin\{\sqrt{\lambda_n}(x - \tau)\} q(\tau) U_n(\tau) d\tau$$

(см., напр., [2], с. 12) позволяет ограничиться требованием суммируемости и ограниченности вариации потенциала q при получении (6), (7) и (11). Формула (8) следует из (1) и (11), а (9) — из (7). Подробное доказательство (10) можно найти в [6].

Известен ([7], с. 231; [8]) критерий равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа $Z_n(T,f,x)$ с матрицей узлов интерполирования T, состоящей из нулей классических ортогональных многочленов Чебышева I рода. Приведем аналог этого критерия в случае интерполирования по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (1)–(2), доказанный в ([6], с. 1).

Для любых $0 < a < b < \pi$ и $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ положим

$$R_n(f,[a,b],\varepsilon) = \max_{p_1 \le p \le p_2} \left| {\sum_{m=m_1}^{m_2}}' \frac{f(x_{2m+1,n}) - 2f(x_{2m,n}) + f(x_{2m-1,n})}{p-2m} \right|, \tag{12}$$

где штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю, а индексы p_1, p_2, m_1 и m_2 определяются из неравенств

$$\begin{aligned} &x_{p_1,n} \le a+\varepsilon < x_{p_1+1,n}, \quad && x_{p_2,n} \le b-\varepsilon < x_{p_2+1,n},\\ &x_{k_1-1,n} \le a < x_{k_1,n}, && x_{k_2,n} < b \le x_{k_2+1,n},\\ &m_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right]+1, && m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right] \end{aligned}$$

после добавления к множеству нулей функции U_n $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} < \pi$ точек $x_{0,n} = 0$ и $x_{n+1,n} = \pi$.

Теорема 4. *Пусть функция $f \in C[0,\pi]$, $0 < a < b < \pi$, $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$. Тогда условие*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f,[a,b],\varepsilon) = 0$$

необходимо и достаточно для справедливости равенства

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a+\varepsilon,\, b-\varepsilon]} |L_n^{SL}(f,x) - f(x)| = 0. \tag{13}$$

При этом для всех $x \in (a,b)$

$$|f(x) - L_n^{SL}(f,x)| = \frac{|U_n(x)|}{2\pi} R_n(f,[a,b],\varepsilon) + O_x\left(\omega\left(f,\frac{\ln n}{n}\right) + \|f\|\frac{\ln n}{n}\right),$$

где остаточный член равномерен на $[a+\varepsilon,\, b-\varepsilon]$ и зависит лишь от h, H и q в (1)–(2).

Замечание 1. Из критерия А.А. Привалова [7], [8] и теоремы 4 следует, что для любой непрерывной на $(0,\pi)$ функции f интерполяционные процессы Лагранжа–Чебышева $Z_n(T, f(\arccos\cdot),\cos x)$ и Лагранжа–Штурма–Лиувилля $L_n^{SL}(f,x)$ по собственным функциям задачи (1)–(2) с $q \equiv 0$, $h = H = 0$ сходятся или расходятся внутри $(0,\pi)$ одновременно.

Следствие. В [6] показано, что из теоремы 4 вытекает результат Г.И. Натансона [1] о равномерной сходимости процессов (3) внутри $(0,\pi)$ для функций из класса Дини–Липшица, т. е. если модуль непрерывности f удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(f,\frac{1}{n}\right)\ln n = 0,$$

то справедливо (13) для любых $0 \le a < b \le \pi$, $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$.

Теорема 5. *Пусть* $0 \le \alpha < 1$, $C > 0$, *числовые последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такие, что*

$$0 \le a_n < b_n \le \pi, \quad b_n - a_n \ge C n^{-\alpha}. \tag{14}$$

Тогда для любых $h, H \in R$ *и* $q \in L[0,\pi]$ *существует номер* $n_0 \in N$, *начиная с которого функции и константы Лебега интерполяционного процесса Лагранжа по собственным функциям задачи* (1)–(2) *на отрезках* $[a_n, b_n]$ *будут удовлетворять неравенствам*

$$L_n^{SL}([a_n,b_n],x) = \sum_{k=l_n}^{m_n} |l_{k,n}^{SL}(x)| \ge C_\alpha |U_n(x)| \ln n - \frac{C_1}{n} \tag{15}$$

и

$$L_n^{SL}([a_n,b_n]) = \max_{x\in[a_n,b_n]} L_n^{SL}([a_n,b_n],x) \ge \frac{C_\alpha}{2}\ln n, \tag{16}$$

где $l_{k,n}(x)$ *— фундаментальные полиномы Лагранжа оператора* (3), $l_n : x_{l_n-1,n} < a_n \le x_{l_n,n}$, $m_n : x_{m_n,n} \le b_n < x_{m_n+1,n}$ *— номера наименьшего и наибольшего из нулей* $x_{k,n}$, *принадлежащих отрезку* $[a_n,b_n]$, *а константа* C_α *зависит только от параметров задачи* (1)–(2) *и* α.

Доказательство. Возьмем произвольное $x \in [a_n,b_n]$ и обозначим через k_0 номер ближайшего к x нуля функции U_n. Формулы (10) и (14) гарантируют существование такого номера n_1, начиная с которого в отрезки $[a_n,b_n]$ будет попадать хотя бы один узел $x_{k,n}$ и будут выполняться неравенства

$$|x - x_{k_0\pm 1,n}| \le \frac{9\pi}{4n} \tag{17}$$

и

$$\max_{k=\overline{1,n-1}} |x_{k+1,n} - x_{k,n}| \le \frac{3\pi}{2n}.$$

Оценим снизу функцию Лебега интерполяционного процесса $L_n^{SL}(f,x)$ на отрезках $[a_n,b_n]$ с помощью (7), (9) и формулы конечных приращений Лагранжа

$$\begin{aligned} L_n^{SL}([a_n,b_n],x) &= \sum_{k=l_n}^{m_n} \left|\frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})}\right| \ge \sum_{k=l_n}^{m_n} \frac{|U_n(x)|}{n|x-x_{k,n}|} - \sum_{k=l_n}^{m_n}\left|\frac{U_n(x)}{x-x_{k,n}}\right|\left|\frac{O(n^{-1})}{n^2+O(1)}\right| \ge \\ &\ge \frac{|U_n(x)|}{n}\sum_{k=l_n}^{k_0-2}\frac{1}{|x-x_{k,n}|} + \frac{|U_n(x)|}{n}\sum_{k=k_0+2}^{m_n}\frac{1}{|x-x_{k,n}|} - \sum_{k=l_n}^{m_n}\left|\frac{U_n'(\zeta_{k,n})(x-x_{k,n})}{(x-x_{k,n})}\right| |O(n^{-3})| \ge \\ &\ge \frac{|U_n(x)|}{n}\sum_{k=l_n}^{k_0-2}\frac{1}{|x-x_{k,n}|} + \frac{|U_n(x)|}{n}\sum_{k=k_0+2}^{m_n}\frac{1}{|x-x_{k,n}|} - \frac{C_2}{n}. \end{aligned} \tag{18}$$

Опустив неотрицательные слагаемые, мы только усилим неравенство. Поэтому при $x \le \frac{b_n+a_n}{2}$ в оценке (18) будет участвовать только вторая сумма, а при $x > \frac{b_n+a_n}{2}$ — только первая. Рассуждения в обеих ситуациях будут совершенно аналогичные, поэтому ограничимся разбором случая $x \le \frac{b_n+a_n}{2}$. В силу (14) найдутся константы C_3 и номер $n_2 \ge n_1$, начиная с которого

$$\frac{b_n-a_n}{2} - \frac{3\pi}{2n} \ge \frac{Cn^{-\alpha}}{2} - \frac{3\pi}{2n} \ge C_3 n^{-\alpha}.$$

Тогда для любого $n \ge n_2$ из (17) и (18) получим

$$L_n^{SL}([a_n,b_n],x) \ge \frac{|U_n(x)|}{n} \sum_{k=k_0+2}^{m_n} \frac{1}{x_{k,n}-x_{k-1,n}} \int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}} \frac{dt}{t-x} - \frac{C_2}{n} \ge$$
$$\ge \frac{2|U_n(x)|}{3\pi} \int_{x_{k_0+1,n}}^{x_{m_n,n}} \frac{dt}{t-x} - \frac{C_2}{n} \ge \frac{2|U_n(x)|}{3\pi}\left(\ln\left|\frac{b_n-a_n}{2} - \frac{3\pi}{2n}\right| + \ln n + C_4\right) - \frac{C_2}{n} \ge$$
$$\ge \frac{2|U_n(x)|}{3\pi}((1-\alpha)\ln n + C_5) - \frac{C_2}{n},$$

где C_4 и C_5 — абсолютные константы, а C_2 зависит только от параметров задачи Штурма–Лиувилля (1)–(2). Выбирая $C_\alpha > 0$ и $n_3 \ge n_2$ таким образом, чтобы для всех $n \ge n_3$ выполнялось неравенство $\frac{1}{3\pi}((1-\alpha)\ln n + C_5) \ge C_\alpha \ln n$, получим (15). Из (6) и (14) следует, что начиная с некоторого номера $n_0 \ge n_3$, в отрезок $[a_n,b_n]$ будет попадать хотя бы одна точка $\frac{\pi k}{n}$ и выполняться неравенство $\max\limits_{x\in[a_n,b_n]} |U_n(x)| \ge \frac{1}{2}$. Отсюда следует (16) и утверждение теоремы 5. $\square$

Лемма 2. *Если $0 < \gamma < 1$, $0 \le \alpha < 1$, последовательность отрезков $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условиям* (14) *и*

$$I_n(\gamma) = \bigcup_{k=1}^{n} \delta_{k,n}, \tag{19}$$

где $\delta_{k,n} = [\frac{\pi k - \arccos\gamma}{n}, \frac{\pi k + \arccos\gamma}{n}]$, $k = \overline{1,n}$, то найдется такой номер $n_0 \in N$, что для всех $n \ge n_0$ и $x \in I_n(\gamma)\bigcap[a_n,b_n]$

$$L_n^{SL}([a_n,b_n],x) \ge \frac{C_\alpha \gamma}{2}\ln n. \tag{20}$$

Доказательство. Если $x \in I_n(\gamma)$, то $|\cos nx| \ge |\cos(\arccos\gamma + \pi k)| = \gamma$, но в силу (6) $|U_n(x)| = |\cos nx + O(n^{-1})| \ge |\cos nx| - \frac{C_6}{n}$. Выберем n_0 настолько большим, чтобы $\frac{C_6+C_1}{n} < \frac{\gamma}{2}$ для всех $n \ge n_0$ и выполнялось условие теоремы 5. Теперь из (15) имеем (20). $\square$

Замечание 2. Из определения отрезков $\delta_{k,n}$ (19) видно, что если концы отрезков $[a_n,b_n]$ удовлетворяют условиям (14), то существует номер n_0, начиная с которого для каждого $[a_n,b_n]$ найдется индекс $k = k(a_n,b_n) \in [1,n]$ такой, что $\delta_{k,n} \subset [a_n,b_n]$.

Рассмотрим функционал $y(x,q,\lambda)$, ставящий в соответствие элементу множества $\Omega = [0,\pi] \times L[0,\pi] \times R$ значение в точке $x \in [0,\pi]$ решения задачи Коши

$$y'' + [\lambda - q(x)]y = 0, \tag{21}$$
$$y(0,q,\lambda) = 1, \tag{22}$$
$$y'(0,q,\lambda) = h. \tag{23}$$

Подчеркнем, что это решение $y(x,q,\lambda)$ есть n-я собственная функция задачи Штурма–Лиувилля (1)–(2) при $\lambda = \lambda_n[q]$. Зафиксируем некоторые $n \in N$ и $1 \le k \le n$, $k \in N$. Обозначим через $x_{k,n}[q]$ функционал, ставящий в соответствие потенциалу q k-й нуль n-й собственной функции $y(x,q,\lambda_n) \equiv U_n(x)$, а через $\lambda_n[q]$ — функционал, который ставит в соответствие q n-е собственное значение $\lambda_n = \lambda_n[q]$. Пусть $D\varphi[q,w] = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\varphi(q+tw)-\varphi(q)}{t}$ — дифференциал Гато функционала $\varphi : L[0,\pi] \to R$ при приращении $w \in L[0,\pi]$ (см. [9], с 482).

Теорема 6. *Пусть $w \in L[0,\pi]$, тогда дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ при приращении w ($n \in N$, $1 \le k \le n$) удовлетворяет соотношению*

$$Dx_{k,n}[q,w] = \frac{1}{[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)]^2}\Big\{ \int_0^{x_{k,n}} w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau - \\ - \frac{\int\limits_0^{x_{k,n}} y_n^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau}{\|y(\cdot,q,\lambda)\|_{L^2}^2} \int_0^{\pi} w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau \Big\}. \quad (24)$$

Доказательство. Дифференциал Гато функционала $y(x,q,\lambda)$ при приращении $w \in L[0,\pi]$ на поверхности множества Ω, определяемой уравнением $y(x_{k,n},q,\lambda_n) = 0$, равен нулю:

$$Dy(x,q,\lambda)[q,w]|_{y(x_{k,n},q,\lambda_n)=0} = y'(x_{k,n},q,\lambda_n)Dx_{k,n}[q,w] + \\ + Dy(x_{k,n},q,\lambda_n)[q,w] + \dot{y}(x,q,\lambda)D\lambda_n[q,w]|_{y(x_{k,n},q,\lambda_n)=0} = 0. \quad (25)$$

Здесь и далее $y'(x,q,\lambda) = \frac{\partial}{\partial x}y(x,q,\lambda)$, $\dot{y}(x,q,\lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda}y(x,q,\lambda)$. Полный дифференциал Гато функционала $y(x,q,\lambda)$ при $x = \pi$ и приращении $w \in L[0,\pi]$ есть

$$Dy(\pi,q,\lambda)[q,w]|_{\lambda=\lambda_n} = Dy(\pi,q,\lambda_n)[q,w] + \dot{y}(\pi,q,\lambda_n)D\lambda_n[q,w]. \quad (26)$$

Аналогично записывается полный дифференциал Гато для функционала $y'(x,q,\lambda)$ при $x = \pi$:

$$Dy'(\pi,q,\lambda)[q,w]|_{\lambda=\lambda_n} = Dy'(\pi,q,\lambda_n)[q,w] + \dot{y}'(\pi,q,\lambda_n)D\lambda_n[q,w]. \quad (27)$$

Теперь в силу (2), (26) и (27) имеем

$$0 = D\{y'(\pi,q,\lambda) + Hy(\pi,q,\lambda)\}[q,w]|_{\lambda=\lambda_n} = D\{y'(\pi,q,\lambda_n) + Hy(\pi,q,\lambda_n)\}[q,w] + \\ + \{\dot{y}'(\pi,q,\lambda_n) + H\dot{y}(\pi,q,\lambda_n)\}D\lambda_n[q,w]. \quad (28)$$

Подсчитаем частный дифференциал Гато $Dy(x,q,\lambda)[q,w]$ при фиксированных x и λ и приращении $w \in L[0,\pi]$. Заменяя в уравнении (21) q на $q + tw$, получим

$$y'' + [\lambda - q(x)]y = twy. \quad (29)$$

Обозначим $\Phi(x,\lambda,\tau) = \begin{vmatrix} \varphi(x,\lambda) & \psi(x,\lambda) \\ \varphi(\tau,\lambda) & \psi(\tau,\lambda) \end{vmatrix}$, где $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ — решения типа sin и cos соответственно уравнения (21) (т. е. $\varphi(0,\lambda) = 0$, $\varphi'(0,\lambda) = 1$, $\psi(0,\lambda) = 1$, $\psi'(0,\lambda) = 0$). Тогда для решений задач Коши (21)–(23) и (29), (22), (23) будет верно тождество

$$y(x,q+tw,\lambda) - y(x,q,\lambda) = t\int_0^x \Phi(x,\lambda,\tau)w(\tau)y(\tau,q+tw,\lambda)d\tau.$$

Разделим обе части полученного тождества на t и перейдем к пределу при $t \to 0$

$$Dy(x,q,\lambda)[q,w] = \lim_{t\to 0}\frac{y(x,q+tw,\lambda) - y(x,q,\lambda)}{t} = \int_0^x \Phi(x,\lambda,\tau)w(\tau)y(\tau,q,\lambda)d\tau. \quad (30)$$

Предельный переход под знаком интеграла возможен, т. к. каждая $y(\tau,q+tw,\lambda)$ есть непрерывная на $[0,\pi]$ функция, равномерная сходимость $y(\tau,q+tw,\lambda)$ к $y(\tau,q,\lambda)$ при $t \to 0$ следует, например, из теоремы о дифференцируемости по параметрам решения задачи Коши (см. [10], с. 187, теорема 1.6).

Теперь из (28) и (30) следует

$$D\lambda_n[q,w] = -\frac{1}{\dot{y}'(\pi,q,\lambda_n)+H\dot{y}(\pi,q,\lambda_n)}\{Dy'(\pi,q,\lambda_n)[q,w]+HDy(\pi,q,\lambda_n)[q,w]\} =$$
$$= -\frac{1}{\dot{y}'(\pi,q,\lambda_n)+H\dot{y}(\pi,q,\lambda_n)}\left\{\int_0^\pi \Phi'_x(\pi,\lambda_n,\tau)w(\tau)y(\tau,q,\lambda_n)d\tau + \right.$$
$$\left. + H\int_0^\pi \Phi(\pi,\lambda_n,\tau)w(\tau)y(\tau,q,\lambda_n)d\tau\right\} =$$
$$= -\frac{1}{\dot{y}'(\pi,q,\lambda_n)+H\dot{y}(\pi,q,\lambda_n)}\int_0^\pi \Phi_1(\lambda_n,\tau)w(\tau)y(\tau,q,\lambda_n)d\tau, \quad (31)$$

где

$$\Phi_1(\lambda_n,\tau) = \begin{vmatrix} \varphi'(\pi,\lambda_n)+H\varphi(\pi,\lambda_n) & \psi'(\pi,\lambda_n)+H\psi(\pi,\lambda_n) \\ \varphi(\tau,\lambda_n) & \psi(\tau,\lambda_n). \end{vmatrix}.$$

Так как

$$y(x,q,\lambda_n) = \psi(x,\lambda_n)+h\varphi(x,\lambda_n),$$

то из (2) следует равенство $-h(\varphi'(\pi,\lambda_n)+H\varphi(\pi,\lambda_n)) = \psi'(\pi,\lambda_n)+H\psi(\pi,\lambda_n)$ и

$$\Phi_1(\lambda_n,\tau) = (\varphi'(\pi,\lambda_n)+H\varphi(\pi,\lambda_n))\begin{vmatrix} 1 & -h \\ \varphi(\tau,\lambda_n) & \psi(\tau,\lambda_n) \end{vmatrix} = (\varphi'(\pi,\lambda_n)+H\varphi(\pi,\lambda_n))y(\tau,q,\lambda_n). \quad (32)$$

Так как уравнение (21) не содержит первых производных, то определитель Вронского фундаментальной системы φ, ψ $W = \mathrm{const} = -1$.

Подсчет определителя (32) при $\tau = \pi$ дает $\Phi_1(\lambda_n,\pi) = -W = 1$. Теперь из (32) при $\tau = \pi$ следует $\varphi'(\pi,\lambda_n)+H\varphi(\pi,\lambda_n) = \frac{1}{y(\pi,q,\lambda_n)}$. Продолжая подсчет (31) и учитывая (32), получим

$$D\lambda_n[q,w] = -\frac{1}{\dot{y}'(\pi,q,\lambda_n)+H\dot{y}(\pi,q,\lambda_n)}\frac{1}{y(\pi,q,\lambda_n)}\int_0^\pi w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau. \quad (33)$$

В силу (25), (30) и (33) получим

$$Dx_{k,n}[q,w] = -\frac{1}{y'(x_{k,n},q,\lambda_n)}\left\{\int_0^{x_{k,n}} \Phi(x_{k,n},\lambda_n,\tau)w(\tau)y(\tau,q,\lambda_n)d\tau - \right.$$
$$\left. - \frac{\dot{y}(x_{k,n},q,\lambda_n)}{(\dot{y}'(\pi,q,\lambda_n)+H\dot{y}(\pi,q,\lambda_n))y(\pi,q,\lambda_n)}\int_0^\pi w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau\right\}. \quad (34)$$

Заметим, что $\Phi(x_{k,n},\lambda_n,\tau)$ есть решение задачи Коши с уравнением (21) и начальными условиями $y(x_{k,n}) = 0$, $y'(x_{k,n}) = W = -1$. По теореме Пикара $\Phi(x_{k,n},\lambda_n,\tau) = -\frac{y(\tau,q,\lambda_n)}{y'(x_{k,n},q,\lambda_n)}$. Теперь из (34) получаем

$$Dx_{k,n}[q,w] = \frac{1}{[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)]^2}\int_0^{x_{k,n}} w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau +$$
$$+ \frac{\dot{y}(x_{k,n},q,\lambda_n)}{\dot{y}'(\pi,q,\lambda_n)+H\dot{y}(\pi,q,\lambda_n)}\frac{1}{y'(x_{k,n},q,\lambda_n)y(\pi,q,\lambda_n)}\int_0^\pi w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau. \quad (35)$$

Учитывая (2), это равенство можно переписать в виде

$$Dx_{k,n}[q,w] = \frac{1}{[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)]^2}\int_0^{x_{k,n}} w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau -$$
$$- \frac{\dot{y}(x_{k,n},q,\lambda_n)H}{\dot{y}'(\pi,q,\lambda_n)+H\dot{y}(\pi,q,\lambda_n)}\frac{1}{y'(x_{k,n},q,\lambda_n)y'(\pi,q,\lambda_n)}\int_0^\pi w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau.$$

При переходе к пределу при $h\to\infty$, $H\to\infty$ из этой формулы получаем результат работы [11], в которой посчитан $Dx_{k,n}[q,w]$ при краевых условиях первого рода $U(0) = U(\pi) = 0$.

Далее, продифференцируем уравнение (21) по λ (по λ решение задачи Коши (21)–(23) есть целая функция, см. [2]–[4]), умножим на $y(x,q,\lambda)$ и проинтегрируем в пределах от x до π.

$$\int_x^\pi y\frac{\partial y''}{\partial\lambda}d\tau+\int_x^\pi y[\lambda-q(\tau)]\frac{\partial y}{\partial\lambda}d\tau+\int_x^\pi y^2d\tau=0.$$

После двукратного интегрирования по частям первого интеграла получаем

$$y\frac{\partial y'}{\partial\lambda}-y'\frac{\partial y}{\partial\lambda}\bigg|_x^\pi+\int_x^\pi\{y''+[\lambda-q(\tau)]y\}\frac{\partial y}{\partial\lambda}d\tau+\int_x^\pi y^2d\tau=0. \tag{36}$$

Так как y есть решение уравнения (21), то второй интеграл в (36) исчезает. Подставим $x=x_{k,n}$, $\lambda=\lambda_n$ в полученное тождество (36). Учитывая, что $y(x,q,\lambda_n)$ превратится в собственную функцию задачи (1)–(2) $y(x_{k,n},q,\lambda_n)$, из краевых условий (2) получим

$$y(\pi,q,\lambda_n)[\dot y'(\pi,q,\lambda_n)+H\dot y(\pi,q,\lambda_n)]+\dot y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)+\int_{x_{k,n}}^\pi y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau=0.$$

Преобразуем (35)

$$\begin{aligned}Dx_{k,n}[q,w]&=\frac{1}{[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)]^2}\int_0^{x_{k,n}}w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau-\\&-\frac{\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)}{y'(x_{k,n},q,\lambda_n)}\frac{1}{\Big[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)+\int\limits_{x_{k,n}}^{\pi}y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau\Big]}\int_0^\pi w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau=\\&=\frac{1}{[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)]^2}\int_0^\pi w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\beta_{k,n}d\tau,\end{aligned} \tag{37}$$

где

$$\beta_{k,n}=\begin{cases}1-\alpha_{k,n}, & \text{если } \tau\in[0,x_{k,n}];\\ -\alpha_{k,n}, & \text{если } \tau\in(x_{k,n},\pi],\end{cases}\qquad \alpha_{k,n}=\frac{\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)y'(x_{k,n},q,\lambda_n)}{\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)y'(x_{k,n},q,\lambda_n)+\int\limits_{x_{k,n}}^{\pi}y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau}.$$

Заметим, что в силу теоремы об осцилляции [2] $y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)>0$ и $\int\limits_{x_{k,n}}^{\pi}y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau>0$, поэтому $\alpha_{k,n}\in(0,1)$ для любых $n\in N$ и $1\le k\le n$. Значение $\alpha_{k,n}$ не зависит от выбора приращения $w\in L[0,\pi]$. Подсчитаем $\alpha_{k,n}$. Для этого положим $w\equiv1$. Очевидно, $Dx_{k,n}[q,1]=0$ для всех $n\in N$ и $1\le k\le n$. Из (37) получаем

$$(1-\alpha_{k,n})\int_0^{x_{k,n}}y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau-\alpha_{k,n}\int_{x_{k,n}}^\pi y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau=0 \tag{38}$$

или

$$\alpha_{k,n}=\frac{1}{\|y(\cdot,q,\lambda_n)\|^2_{L^2[0,\pi]}}\int_0^{x_{k,n}}y^2(\tau,q,\lambda_n)d\tau.$$

Теперь формулы (35) или (37) могут быть записаны в виде (24). □

Замечание 3. Из теоремы о связи между слабой и сильной дифференцируемостью (см., напр., [9], с. 484) следует, что дифференциал Гато (24) на самом деле является производной Фреше функционала $x_{k,n}[q]$.

Лемма 3. *Какой бы суммируемый потенциал q ни взять, для всех $n\in N$ и $k\in N$, $1\le k\le n$, дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ при приращении*

$$w=\begin{cases}1, & \textit{если } x\in[0,\frac{\pi}{2}];\\ 0, & \textit{если } x\in(\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases} \tag{39}$$

будет положителен, т. е. $Dx_{k,n}[q,w] > 0$.

Доказательство. Если $w \equiv 1$, то в силу того, что $y^2(x,q,\lambda_n)$ почти всюду положительна на $[0,\pi]$ и $\alpha_{k,n} \in (0,1)$, интеграл (37) разбивается на два: на интервале $(0, x_{k,n})$ он положителен, а на $(x_{k,n}, \pi)$ отрицателен. В силу (38) константы $\alpha_{k,n}$ обладают тем свойством, что по абсолютной величине эти два интеграла равны. Если же в качестве приращения взять (39), то для всех $k = \overline{1,n}$, $n \in N$ "положительная" часть интеграла (37) будет строго больше абсолютной величины "отрицательной" части. Здесь важную роль играет тот факт, что все нули $x_{k,n}$, $k = \overline{1,n}$, $n \in N$, лежат внутри интервала $(0,\pi)$. $\square$

Лемма 4. *Для любых* $h, H \in R$, *произвольного суммируемого потенциала* q *и положительного* ε *существует множество* $T \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, *мощности континуум, такое, что все собственные функции задач Штурма–Лиувилля вида* (1)–(2) *с потенциалами* q *и* $q + tw$, *где* $t \in T$, *а* w *определяется равенством* (39), *не имеют ни одного общего нуля, т. е.*

$$\{x : y_n(x,q,\lambda_n) = 0,\ n \in N\} \bigcap \{x : y_m(x, q+tw, \lambda_m) = 0,\ m \in N\} = \emptyset.$$

Доказательство. Для каждого натурального $n \in N$ и $k = \overline{1,n}$ рассмотрим функцию $x_{k,n}(t) = x_{k,n}[q + tw]$, где w определяется равенством (39). Из теоремы 6 следует дифференцируемость каждой функции $x_{k,n}(t)$ на $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Лемма 3 гарантирует положительность производной $x'_{k,n}(t) > 0$ при $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Следовательно, каждая $x_{k,n}(t)$ осуществляет взаимно однозначное отображение $[-\varepsilon, \varepsilon]$ на некоторый отрезок $I_{k,n} = [x_{k,n}(-\varepsilon), x_{k,n}(\varepsilon)] \subset (0,\pi)$.

Обозначим через A множество всех нулей $x_{k,n}(0)$ всех собственных функций $y_n(x,q,\lambda_n)$ задачи (1)–(2), $k = \overline{1,n}$, $n \in N$. Оно счетно, $A \subset (0,\pi)$. Пусть $\tau_{k,n}$ — множество тех $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, для которых $x_{k,n}(t) \in A$. В силу биективности $x_{k,n}(\cdot)$ каждое $\tau_{k,n}$ счетно, $k = \overline{1,n}$, $n \in N$. Теперь рассмотрим множество всех $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, для которых ни одна собственная функция задачи (1)–(2) с потенциалом $q + tw$ не имеет ни одного общего нуля ни с одной собственной функцией задачи (1)–(2) с потенциалом q

$$T = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{n} ([-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \tau_{k,n}) = [-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n} \tau_{k,n}.$$

Это множество имеет мощность континуум как разность континуального и счетного множеств. $\square$

Теорема 7. *Если множества нулей* $N = \{x_{k,n};\ k = \overline{1,n},\ n \in N\}$ *и* $\widetilde{N} = \{\widetilde{x}_{k,n};\ k = \overline{1,n},\ n \in N\}$ *двух задач Штурма–Лиувилля вида* (1)–(2) *с потенциалами* q *и* $\widetilde{q}$, *константами* h, H *и* $\widetilde{h}$, $\widetilde{H}$ *в краевых условиях соответственно не пересекаются, т. е.* $N \bigcap \widetilde{N} = \emptyset$, *то существует множество* E, *плотное в отрезке* $[0,\pi]$, *такое, что для каждой точки* $x_0 \in E$ *найдется непрерывная на* $[0,\pi]$ *функция* f, *для которой выполняются соотношения*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |L_n^{SL}(f,x)| = \infty, \tag{40}$$

$$\lim_{n\to\infty} |\widetilde{L}_n^{SL}(f,x) - f(x)| = 0 \ \text{ равномерно внутри } \ (0,\pi), \tag{41}$$

где L_n^{SL} *и* $\widetilde{L}_n^{SL}$ *— процессы Лагранжа–Штурма–Лиувилля* (3), *построенные по собственным функциям* $U_n(x)$ *и* $\widetilde{U}_n(x)$ *соответствующих задач* (1)–(2).

Доказательство. Будем обозначать через $R_n(f,[a,b],\varepsilon)$ и $\widetilde{R}_n(f,[a,b],\varepsilon)$ величины, построенные по определению (12) соответствующих задач (1)–(2).

Из последовательности натуральных чисел выберем такую, чтобы

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n_i}} \le C < \infty \tag{42}$$

и

$$L_{n_k}^{SL}\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln n_i}}<\frac{1}{k},\quad k\in N, \tag{43}$$

где $L_{n_k}^{SL}=L_{n_k}^{SL}([0,\pi])$ — константы Лебега интерполяционного процесса Лагранжа–Штурма–Лиувилля (3) (см. (15), (16)). Возьмем произвольный интервал $(a,b)\subset[0,\pi]$, и $0<\gamma<1$, $0\le\alpha<1$.

Найдем номер j_0, начиная с которого в формуле $x_{k,n_j}=\frac{2k-1}{2n_j}+O(n_j^{-2})$ (10) остаточный член по модулю не будет превосходить $\frac{\pi-2\arccos\gamma}{4n_j}=\frac{\widetilde{\gamma}}{n_j}$. Тогда в силу леммы 2 и замечания 2 найдется номер $j_1\ge j_0$, $n_{j_1}^{\alpha}(b-a)\ge 1$ и отрезок $\delta_{k_1,n_{j_1}}\subset(a,b)$, в каждой точке которого будет выполняться неравенство

$$L_{n_{j_1}}^{SL}([a,b],x)\ge\frac{C_\alpha\gamma}{2}\ln n_{j_1},\quad x\in\delta_{k_1,n_{j_1}}.$$

В силу выбора j_0, (10) и определения $\delta_{k,n}$ (19)

$$\min_{1\le k\le n_{j_1}}\rho(x_{k,n_{j_1}},\delta_{k,n_{j_1}})\ge\frac{\widetilde{\gamma}}{n_{j_1}}.$$

Из последовательности $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ выберем номер $n_{j_2}\ge n_{j_1}$ такой, чтобы $n_{j_2}^{\alpha}\operatorname{mes}\delta_{k_1,n_{j_1}}\ge 1$. Тогда в силу замечания 2 к лемме 2 найдется отрезок $\delta_{k_2,n_{j_2}}\subset\delta_{k_1,n_{j_1}}$, в каждой точке которого будет выполняться неравенство

$$L_{n_{j_2}}^{SL}(\delta_{k,n_{j_1}},x)\ge\frac{C_\alpha\gamma}{2}\ln n_{j_2},\quad x\in\delta_{k_2,n_{j_2}},$$

и, кроме того,

$$\min_{k=\overline{1,n_{j_2}}}\rho(x_{k,n_{j_2}},\delta_{k_2,n_{j_2}})\ge\frac{\widetilde{\gamma}}{n_{j_2}}.$$

Продолжая процесс неограниченно, построим последовательность вложенных друг в друга отрезков $\delta_{i,j}$ и номеров $\{n_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}\subset\{n_i\}_{n=1}^{\infty}$, для которых выполняется условие

$$n_{i_j}^{\alpha}\operatorname{mes}\delta_{i_{j-1}}\ge 1,\quad 0<\alpha<1,\quad j=1,2,3,\ldots,$$
$$(a,b)\supset\delta_{i_1}\supset\delta_{i_2}\supset\cdots\supset\delta_{i_j}\supset\cdots$$

и для всех $x\in\delta_{i_j}$

$$L_{n_{i_j}}^{SL}(\delta_{i_{j-1}},x)\ge\frac{C_\alpha\gamma}{2}\ln n_{i_j}, \tag{44}$$

где C_α выбирается с помощью теоремы 5, а γ любое из $(0,1)$. Подпоследовательности $\{n_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\delta_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ вновь будем обозначать $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$. По теореме Кантора найдется точка $x_0\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\delta_i\subset(a,b)$, для которой выполняется неравенство

$$L_{n_i}^{SL}(\delta_{i-1},x_0)\ge\frac{C_\alpha\gamma}{2}\ln n_i,\quad i=1,2,3,\ldots$$

Положим

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\ln n_i}}\operatorname{sign}l_{k,n_i}^{SL}(x_0), & x=x_{k,n_i}\in\delta_{i-1};\\ 0 & \text{при } x=\widetilde{x}_{k,n},\ \ 1\le k\le n,\ \ n=1,2,\ldots,n_i^2;\\ \text{линейная} & \text{при } x\ne x_{k,n_i} \text{ и при } x\ne\widetilde{x}_{k,n}.\end{cases} \tag{45}$$

Так как $N\bigcap\widetilde{N}=\emptyset$, то каждая функция φ_i принадлежит классу Липшица $\operatorname{Lip}_{M_i}1$ как ломаная с конечным числом звеньев. Теорема 4 и следствие обеспечивают возможность выбора подпоследовательности $\{n_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ таким образом. Пусть $n_{i_1}=n_1$, а каждый следующий номер n_{i_k} выбираем настолько большим, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$\left|L^{SL}_{n_{i_k}}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\varphi_{i_l},x_0\right)-\sum_{l=1}^{k-1}\varphi_{i_l}(x_0)\right|<\frac{1}{k}, \tag{46}$$

$$\left|\widetilde{R}_n\left(\sum_{l=1}^{k-1}\varphi_{i_l},[a',b'],\varepsilon\right)\right|<\frac{1}{k}\quad \text{для всех}\ \ n\ge n_{i_k}, \tag{47}$$

где отрезок $[a',b']$ и положительное число ε выбираются так, чтобы

$$[a,b]\subset[a'+\varepsilon,\ b'-\varepsilon]\subset[a',b']\subset(0,\pi).$$

Покажем, что функция

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{i_k}(x) \tag{48}$$

и точка x_0 удовлетворяют соотношениям (40), (41). По теореме Вейерштрасса из сходимости ряда (42) следует непрерывность функции f (48). В силу (44) и (45)

$$L^{SL}_{n_{i_j}}(\varphi_{i_j},x_0)=L^{SL}_{n_{i_j}}(\delta_{i_j-1},x_0)\ge\frac{C_\alpha\gamma}{2}\ln n_{i_j}. \tag{49}$$

Используя свойство линейности оператора $L^{SL}_n(f,x)$, неравенства (43), (46), (48) и (49), получим

$$|L^{SL}_{n_{i_k}}(f,x_0)|\ge|L^{SL}_{n_{i_k}}(f,x_0)-f(x_0)|-|f(x_0)|\ge|L^{SL}_{n_{i_k}}(\varphi_{i_k},x_0)|-$$
$$-\left|L^{SL}_{n_{i_k}}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\varphi_{i_l},x_0\right)-\sum_{l=1}^{k-1}\varphi_{i_l}(x_0)\right|-L^{SL}_{n_{i_k}}\left\|\sum_{l=k+1}^{\infty}\varphi_{i_l}\right\|-2|f(x_0)|\ge\frac{C_\alpha\gamma}{2}\ln n_{i_k}-\frac{2}{k}-C.$$

То есть имеет место неограниченная расходимость интерполяционного процесса $L^{SL}_n(f,\cdot)$ в точке x_0 (40).

Осталось проверить соотношение (41). Возьмем произвольное натуральное n. Пусть

$$n_{i_k}\le n<n_{i_{k+1}}, \tag{50}$$

тогда

$$\widetilde{R}_n(f,[a',b'],\varepsilon)=\max_{p_1\le p\le p_2}\left|{\sum_{m=m_1}^{m_2}}'\frac{f(\widetilde{x}_{2m+1,n})-2f(\widetilde{x}_{2m,n})+f(\widetilde{x}_{2m-1,n})}{p-2m}\right|=$$
$$=\max_{p_1\le p\le p_2}\left|{\sum_{m=m_1}^{m_2}}'\frac{\sum\limits_{l=1}^{\infty}\varphi_{i_l}(\widetilde{x}_{2m+1,n})-2\varphi_{i_l}(\widetilde{x}_{2m,n})+\varphi_{i_l}(\widetilde{x}_{2m-1,n})}{p-2m}\right|\le$$
$$\le\max_{p_1\le p\le p_2}\left|{\sum_{m=m_1}^{m_2}}'\frac{\sum\limits_{l=1}^{k-1}(\varphi_{i_l}(\widetilde{x}_{2m+1,n})-2\varphi_{i_l}(\widetilde{x}_{2m,n})+\varphi_{i_l}(\widetilde{x}_{2m-1,n}))}{p-2m}\right|+$$
$$+\max_{p_1\le p\le p_2}\left|{\sum_{m=m_1}^{m_2}}'\frac{\varphi_{i_l}(\widetilde{x}_{2m+1,n})-2\varphi_{i_l}(\widetilde{x}_{2m,n})+\varphi_{i_l}(\widetilde{x}_{2m-1,n})}{p-2m}\right|+$$
$$+\max_{p_1\le p\le p_2}\left|{\sum_{m=m_1}^{m_2}}'\frac{\sum\limits_{l=k+1}^{\infty}(\varphi_{i_l}(\widetilde{x}_{2m+1,n})-2\varphi_{i_l}(\widetilde{x}_{2m,n})+\varphi_{i_l}(\widetilde{x}_{2m-1,n}))}{p-2m}\right|=P_1+P_2+P_3. \tag{51}$$

Оценка P_1 следует из выбора n_{i_k} (47)

$$P_1 = \widetilde{R}_n\biggl(\sum_{l=1}^{k-1}\varphi_{i_l}, [a', b'], \varepsilon\biggr) \le \frac{1}{k}. \tag{52}$$

В силу того, что для любого натурального $n_{i_{k+1}} \le n^2_{i_{k+1}}$, из построения функций $\varphi_i(x)$ (45) следует

$$P_3 = 0. \tag{53}$$

Перейдем к оценке P_2. Возможны два случая: $n^2_{i_k} \ge n_{i_{k+1}}$ и $n^2_{i_k} < n_{i_{k+1}}$. В первом случае из неравенств (50) и определения функций $\varphi_i(x)$ (45) получаем

$$P_2 = 0; \tag{54}$$

во втором случае при $n \le n^2_{i_k}$ также справедливо равенство (54). Пусть

$$n^2_{i_k} < n < n_{i_{k+1}}. \tag{55}$$

Мы определили функцию φ_i в (45) так, что ее график есть ломаная с конечным числом звеньев. Причем в силу (10) и (45) носитель $\operatorname{supp}\varphi_{i_k}$, начиная с некоторого n_{i_k}, содержится в объединении непересекающихся отрезков $d_{j,n_{i_k}}$ длины $\frac{2\pi}{n^2_{i_k}}$, каждому из которых принадлежит j-й нуль функции $U_{n_{i_k}}$ ($x_{j,n_{i_k}} \in d_{j,n_{i_k}}$). Поэтому в силу (10) для достаточно больших n_{i_k} минимальное расстояние между отрезками d_j, n_{i_k} будет удовлетворять неравенству

$$\min_{j=1,n_{i_k}-1}\rho(d_{j+1,n_{i_k}}, d_{j,n_{i_k}}) \ge \min_{j=\overline{1,n_{i_k}-1}}\left|x_{j+1,n_{i_k}} - x_{j,n_{i_k}} - \frac{4\pi}{n^2_{i_k}}\right| \ge \frac{\pi}{2n_{i_k}}. \tag{56}$$

Оценим снизу $r(n,k)$ — количество точек $\widetilde{x}_{2m,n}$ таких, что $\widetilde{x}_{2m+1,n}$, $\widetilde{x}_{2m,n}$ и $\widetilde{x}_{2m-1,n}$ лежат между отрезками $d_{j+1,n_{i_k}}$ и $d_{j,n_{i_k}}$, $j \in [1, n_{i_k}]$. Из (10), (55) и (56) следует

$$r(n,k) \ge \frac{\pi}{2n_{i_k}} : \frac{3\pi}{n} = \frac{n}{6n_{i_k}}. \tag{57}$$

Осталось заметить, что в силу линейности функции φ_{i_k} (45) между точками x_{k,n_i} и $\widetilde{x}_{l,p}$, $p = \overline{1, n_i^2}$, сумма в P_2 состоит из не более чем $[\frac{n_{i_l}}{2}]$ групп отличных от нуля слагаемых. В каждой группе может быть не более трех слагаемых. Между любыми двумя такими группами индекс суммирования m в P_2 пробегает не менее $r(n,k)$ нулевых слагаемых. Поэтому (45), (51), (55) и (57) обеспечивают оценку

$$P_2 \le \frac{4}{\sqrt{\ln n_{i_k}}}\, 3\, \frac{6n_{i_k}}{n}\, 2 \sum_{s=1}^{[\frac{n_{i_k}}{2}]}\frac{1}{s} \le \frac{Cn_{i_k}\sqrt{\ln n_{i_k}}}{n} \le \frac{C\sqrt{\ln n_{i_k}}}{n_{i_k}}.$$

Отсюда, (51)–(54) и теоремы 4 в силу произвольности выбора k и того, что $n_{i_k\to\infty}$, следует равномерная сходимость интерполяционного процесса $\widetilde{L}_n^{SL}(f,x)$ к функции f внутри отрезка $[a', b']$. $\square$

Лемма 5. *Для любого положительного ε существует такое H, $0 < |H - \widetilde{H}| < \varepsilon$, что собственные функции задач Штурма–Лиувилля*

$$\begin{aligned} U'' + \lambda U &= 0, \\ U'(0) &= 0, \\ U'(\pi) + HU(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{58}$$

и

$$
\begin{aligned}
\widetilde{U}'' + \lambda \widetilde{U} &= 0,\\
\widetilde{U}'(0) &= 0,\\
\widetilde{U}'(\pi) + \widetilde{H}\widetilde{U}(\pi) &= 0
\end{aligned}
\tag{59}
$$

не имеют ни одного общего нуля, т. е. $x_{k,n} \neq \widetilde{x}_{l,m}$ *при всех* $k \in [1,n]$, $l \in [1,m]$, $n,m,k,l \in N$.

Доказательство. Обозначим через $S_n = \sqrt{\lambda_n}$, где λ_n — n-е собственное значение задачи (58). Известно [2]–[5], что $S_n \geq 0$, причем нулевое собственное значение задача (58) имеет только в случае $H = 0$, и соответствует оно константе: $U_0 = \mathrm{const}$. Из общей теории собственных функций и собственных значений линейных дифференциальных операторов [2]–[5] известно, что собственные значения задачи (58) суть квадраты корней уравнения

$$H = S_n \operatorname{tg} S_n \pi,$$

а собственные функции —

$$U_n(x) = \cos S_n x. \tag{60}$$

Рассмотрим систему функций $H_n(S_n) = S_n \operatorname{tg} S_n \pi$. Каждая из H_n осуществляет взаимно однозначное отображение сегмента $(n-\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2})$ на R. Следовательно, для каждого $n \in N$ существует обратная функция $S_n(H)$, ставящая в соответствие каждому H n-е собственное значение задачи (58). Выделим отдельно случай $H = \widetilde{H}$. Обозначим $\widetilde{U}_m = \cos \widetilde{S}_m x$ m-ю собственную функцию задачи (59). Из (60) видно, что нули $x_{k,n}$ и $\widetilde{x}_{l,m}$ совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{2k-1}{2S_n}\pi = \frac{2l-1}{2\widetilde{S}_m}\pi.$$

Таким образом, для того чтобы нуль $\widetilde{x}_{l,m}$ функции $\widetilde{U}_m$ совпадал с k-м нулем функции U_n, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

$$n - \frac{1}{2} < \frac{S_m(2k-1)}{(2l-1)} < n + \frac{1}{2}$$

и

$$H = H_n\Big(\frac{S_m(2k-1)}{(2l-1)}\Big).$$

Обозначим через $Q = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k,l,m: n-\frac{1}{2} < \frac{S_m(2k-1)}{(2l-1)} < n+\frac{1}{2}} H_n(\frac{S_m(2k-1)}{(2l-1)})$, т. е. множество значений H, при которых собственные функции задач (58) и (59) имеют хотя бы один общий нуль. Q не более чем счетно как счетное объединение не более чем счетных множеств. Следовательно, существует континуум точек $H \in (\widetilde{H} - \varepsilon,\ \widetilde{H} + \varepsilon) \setminus Q$ таких, что ни одна из собственных функций задачи (58) не имеет общих нулей ни с одной собственной функцией задачи (59). $\square$

Теперь можно легко доказать первые три теоремы.

Доказательство теоремы 1 следует из теоремы 7 и леммы 4.

Доказательство теоремы 2 опирается на теорему 7 и лемму 5. Осталось только заметить, что доказательство существования константы $\widetilde{h}$ сводится к рассмотренному случаю преобразованием $y = \pi - x$.

Доказательство теоремы 3 следует из теоремы 7, утверждения леммы 5 при условии $\widetilde{H} = 0$ и замечания 1.

Литература

1. Натансон Г.И. *Об одном интерполяционном процессе* // Учен. зап. Ленинград. гос. пед. ин-та. – 1958. –Т. 166. – С. 213–219.
2. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака.* – М.: Наука, 1988. – 432 с.
3. Сансоне Дж. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Т. 1. – М.: Ин. лит., 1953. – 346 с.
4. Сансоне Дж. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Т. 2. – М.: Ин. лит., 1954. – 415 с.
5. Левитан Б.М. *Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – С. 1–160.
6. Трынин А.Ю. *О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа–Штурма–Лиувилля.* – Саратовский ун-т. – 1991. – 32 с. – Деп. в ВИНИТИ 26.04.91, № 1763–В91.
7. Привалов А.А. *Теория интерполирования функций.* – Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1990.
8. Привалов А.А. *Критерий равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 5. – С. 49–59.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1981. – 543 с.
10. Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1982. – 329 с.
11. McLaughlin J.R. *Inverse spectral theory using nodal points as data — a uniqueness result* // J. Diff. Eq. – 1988. – V. 73. – № 2. – P. 354–362.

Саратовский государственный университет

Поступила
17.03.1999