ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 2 (465)

УДК 517.521

НГУЕН СУАН ТХАО

БАЗИСНЫЙ АНАЛОГ ОБОБЩЕННОЙ H-ФУНКЦИИ

1. Введение

В данной работе построен базисный аналог обобщенной H-функции с ядром, зависящим от дробно-рациональной функции от q-гамма-функций [1]–[6]. Этот аналог может включать, например, I_q-функцию [7], H_q-функцию [8], [9], G_q-функцию [8], [10], I-функцию [11]–[13], H-функцию Фокса [14], G-функцию Мейера [15]. Получены достаточное условие сходимости базисного аналога обобщенной H-функции, интегральные связи и некоторые формулы.

2. Базисный аналог обобщенной H-функции

Определение (ср. [7]). Базисным аналогом обобщенной H-функции назовем интеграл Меллина–Барнса

$$I_q(z \mid \theta(s)) \equiv I_q(z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_{L_s} \theta(s) z^s ds, \tag{1}$$

где

$$\frac{1}{\theta(s)} = \sin(\pi s) \sum_{i=1}^{r} Q^{p_i}_{\overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i}(s), \quad r \in N, \quad Q^{p_i}_{\overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i}(s) = \prod_{k=1}^{p_i} \Gamma_q^{m_{ik}}(A_{ik} + \alpha_{ik} s),$$

q-гамма-функция $\Gamma_q(s) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^s;q)_\infty}(1-q)^{1-s}$ определена в [1], [2], $(a,q)_\infty = \prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 - aq^n)$, $|q| < 1$, $A_{ik} = \frac{1}{2} - (a_{ik} - \frac{1}{2}) \operatorname{sign} \alpha_{ik}$, p_i — натуральное число, $i = \overline{1, r}$, $k = \overline{1, p_i}$; $\overline{m}_i = (m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{ip_i})$, m_{ik} — целые числа; $\overline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip_i})$, a_{ik} комплексные; $\overline{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2},, \dots, \alpha_{ip_i})$, α_{ik} — действительные числа; z^s определено в [15]–[**?**], $\omega = (-1)^{1/2}$. Контур интегрирования L_s идет от $-i\infty$ до $i\infty$, так что полюсы функций $\Gamma_q^{m_{ik}}(A_{ik} + \alpha_{ik} s)$ с $m_{ik} < 0$, $\alpha_{ik} < 0$ лежат справа от контура, а полюсы функций $\Gamma_q^{m_{ik}}(A_{ik} + \alpha_{ik} s)$ с $m_{ik} < 0$, $\alpha_{ik} > 0$, $i = \overline{1, r}$, $k = \overline{1, p_i}$, лежат слева и находятся по крайней мере на некотором расстоянии $\varepsilon > 0$ от контура.

Теорема 1 (ср. [7]). *Базисный аналог обобщенной H-функции* (1) *сходится, если* $|\arg z| < \pi$. *Если, кроме того,* $m_{ik} = -1$ *при* $i = \overline{1, r}$, $k = \overline{1, m+n}$, $a_{ik} = a_k$, $\alpha_{ik} = \alpha_k > 0$, $k = \overline{1, n}$; $a_{ik} = b_{k-n}$, $\alpha_{ik} = -\beta_{k-n} < 0$, $k = \overline{n+1, n+m}$; $m_{ik} = 1$ *при* $i = \overline{1, r}$, $k = \overline{m+n+1, A_i + B_i + 2}$; $a_{ik} = a_{i(k-m)}$, $\alpha_{ik} = -\alpha_{i(k-m)} < 0$, $k = \overline{m+n+1, m+A_i}$, $a_{i(A_i+m+1)} = 1$, $\alpha_{i(A_i+m+1)} = -1$; $a_{ik} = b_{i(k-A_i-1)}$, $\alpha_{ik} = \beta_{i(k-A_i-1)} > 0$, $k = \overline{A_i + m + 2, A_i + B_i + 1}$; $a_{i(A_i+B_i+2)} = 1$, $\alpha_{i(A_i+B_i+2)} = 1$, $p_i = A_i + B_i + 2$, *то справедливо равенство*

$$\lim_{q \to 1_-} I_q(z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i) = I^{m,n}_{A_i, B_i} \left[z \left| \begin{matrix} (a_j, \alpha_j)_{1,n}, \dots, (a_{ij}, \alpha_{ij})_{n+1,A} \\ (b_j, \beta_j)_{1,m}, \dots, (b_{ij}, \beta_{ij})_{m+1,B_i} \end{matrix} \right. \right],$$

в котором функция, стоящая справа, введена в [11].

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{s-1} I_q(xz \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i)dx = -\frac{z^{-s}}{\sin(\pi s)} \Big(\sum_{i=1}^r Q^{p_i}_{\overline{m}_i, \overline{a}_i, -\overline{\alpha}_i}(s) \Big)^{-1}$,

где $|\arg z| < \pi$, $0 < \operatorname{Re} s < 1$;

б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-1/2} I_q(x \mid r_1, p_{1i}, \overline{m}_{1i}, \overline{a}_{1i}, \overline{\alpha}_{1i}) I_q(zx \mid r_2, p_{2j}, \overline{m}_{2j}, \overline{a}_{2j}, \overline{\alpha}_{2j})dx =$

$$= z^{-1/2} I_q(z^{1/2} \mid r_1 + r_2, p_{1i} + p_{2j}, \overline{m}_{1i}, \overline{a}_{1i}, -\tfrac{1}{2}\overline{\alpha}_{1i}; \overline{m}_{2j}, \tfrac{1}{2}\overline{2a_{2j} - \alpha_{2j}}, \tfrac{1}{2}\overline{\alpha_{2j}}),$$

где $|\arg z| < \pi$.

Из (1), формул (1.10.5), (1.10.9), (1.10.11) в ([16], с. 38) вытекает

Теорема 3. *Имеют место равенства*

а) $z^{-k} I_q(z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i) = (-1)^k I_q(z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a_i + k\alpha_i}, \overline{\alpha}_i)$, k *— целое число;*

б) $q^{A_{k_0}} I_q(q^{\alpha_{k_0}} z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i) = I_q(z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a_i + k\alpha_i}, \overline{\alpha}_i) +$

$$+(q-1) I_q(z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i; 1, 1, a_{k_0} + 1, \alpha_{k_0}; 1, -1, a_{k_0}, \alpha_{k_0}),$$
$$m_{ik_0} = m_{k_0} < 0, \quad a_{ik_0} = a_{k_0}, \quad \alpha_{ik_0} = \alpha_{k_0}, \quad i = \overline{1, r}, \quad k_0 = \overline{1, p_i};$$

в) $q^{A_{k_0}-1} I_q(q^{\alpha_{k_0}} z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i) = I_q(z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a_i + k\alpha_i}, \overline{\alpha}_i) +$

$$+(q-1) I_q(z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i; 1, 1, a_{k_0}, \alpha_{k_0}; 1, -1, a_{k_0} - 1, \alpha_{k_0}),$$
$$m_{ik_0} = m_{k_0} > 0, \quad a_{ik_0} = a_{k_0}, \quad \alpha_{ik_0} = \alpha_{k_0}, \quad i = \overline{1, r}, \quad k_0 = \overline{1, p_i}.$$

Теорема 4. *Пусть* $I_q(a_{ij} \pm 1)$ *является базисным аналогом обобщенной* H*-функции, получающейся из* (1), *если в ее правой части множитель* $\Gamma_q^{m_{ij}}(A_{ij} + \alpha_{ij}s)$ *заменяется на* $\Gamma_q^{\operatorname{sign}(m_{ij})}(A_{ij} \pm 1 + \alpha_{ij}s) \Gamma_q^{m_{ij} - \operatorname{sign}(m_{ij})}(A_{ij} + \alpha_{ij}s)$. *Кроме этого, допустим, что* $m_{ij_0} = m_{j_0}$, $m_{ik_0} = m_{k_0}$, $a_{ij_0} = a_{j_0}$, $a_{ik_0} = a_{k_0}$, $\alpha_{ij_0} = \alpha_{ik_0} = \alpha_{k_0}$, $i = \overline{1, r}$, $j_0 = \overline{1, p_i}$, $k_0 = \overline{1, p_i}$. *Тогда справедливы равенства*

а) $(1-q)[I_q(\alpha_{j_0} + 1) - I_q(\alpha_{k_0} + 1)] = (q^{\pm\alpha_{k_0}} - q^{\pm\alpha_{j_0}}) I_q(q^{\mp\alpha_{k_0}} z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i)$,
$m_{j_0} \lessgtr 0$, $m_{k_0} \lessgtr 0$, $\alpha_{k_0} \lessgtr 0$;

б) $(1-q)[I_q(\alpha_{j_0} - 1) - I_q(\alpha_{k_0} - 1)] = (q^{\pm(\alpha_{k_0} - 1)} - q^{\pm(\alpha_{j_0} - 1)}) I_q(q^{\mp\alpha_{k_0}} z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i)$,
$m_{j_0} \gtrless 0$, $m_{k_0} \gtrless 0$, $\alpha_{k_0} \lessgtr 0$;

в) $(1-q)[I_q(\alpha_{j_0} + 1) - I_q(\alpha_{k_0} - 1)] = \begin{Bmatrix} q^{1-\alpha_{k_0}} - q^{-\alpha_{j_0}} \\ q^{\alpha_{j_0}-1} - q^{\alpha_{k_0}} \end{Bmatrix} I_q(q^{\mp\alpha_{k_0}} z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i)$.

Доказательство основано на формуле (1.10.5) в ([16], с. 38) и (1).

Теорема 5 (ср. [7]). *Имеют место следующие равенства:*

$$(1-q)^{-\sigma} \int_0^1 x^{\sigma-1} E_q(qx) I_q(zx^{-\delta} \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i) d_q x =$$
$$= I_q\big((1-q)^{-\delta} z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i; 1, 1, \sigma, -\delta\big), \quad \operatorname{Re}\sigma > 0, \quad \operatorname{Re}\delta > 0, \quad |\arg z| < \pi;$$
$$\Gamma_q^{-1}(\beta) \int_0^1 x^{\sigma-1} (1-q)_{\delta-\sigma-1} I_q(zx^{-\gamma} \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i) d_q x =$$
$$= I_q(z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i; 1, 1, \alpha, -\gamma; 1, -1, \alpha + \beta, -\gamma),$$
$$\operatorname{Re}\sigma > 0, \quad \operatorname{Re}\delta > 0, \quad \operatorname{Re}\gamma > 0, \quad \operatorname{Re}(\delta - \sigma) > 0, \quad |\arg z| < \pi;$$

$$\frac{(1 - q^{\sigma-1})}{2\pi\omega} \int_L x^{-\sigma} e_q(qx) I_q(zx^{\delta} \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i) dx =$$
$$= I_q\big((1-q)^{\delta} z \mid r, p_i, \overline{m}_i, \overline{a}_i, \overline{\alpha}_i; 1, -1, \sigma, -\delta\big), \quad \operatorname{Re}\sigma > 0, \quad |\arg z| < \pi.$$

Литература

1. Thomae J. *Beiträge zur Theorie der durch die Heinesche Reihe*: $1+\frac{1-q^a}{1-q}\cdot\frac{1-q^b}{1-q^c}\cdot x+\frac{1-q^a}{1-q}\cdot\frac{1-q^{a+1}}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^b}{1-q^c}\cdot\frac{1-q^{b+1}}{1-q^{c+1}}\cdot x^2+\cdots$ *darstellbaren Functionen* // J. reine angew. Math. – 1869. – Bd. 70. – S. 258–281.
2. Jackson F.H. *A generalization of the functions* $\Gamma(n)$ *and* x^n // Proc. Roy. Soc. London. – 1904. – V. 74. – P. 64-72.
3. Askey R. *The q-gamma and q-beta functions* // Appl. Anal. – 1978. – V. 8. – P. 125–141.
4. Moak D.S. *The q-gamma function for* $q > 1$ // Aequat. Math. – 1980. – V. 20. – P. 278–285.
5. Маричев О.И., Ву Ким Туан. *О некоторых свойствах q-гамма функции* $\Gamma_q(z)$ // ДАН БССР. – 1982. – Т. 26. – № 6. – С. 488–491.
6. Ismail M.E.H., Lorch L., Muldon M.E. *Completely monotonic functions associated with the gamma function and its q-analogues* // J. Math. Anal. Appl. – 1986. – V. 116. – № 1. – P. 1–9.
7. Saxena R.K., Kumar R. *A basic analogue of generalized H-function* // Matematiche. – 1995. – V. 50. – № 2. – P. 263–271.
8. Saxena R.K., Modi G.C., Kalla S.L. *A basic analogue of Fox's H-function* // Rev. Tec. Ing. Univ. Zulia. – 1983. – V. 6. – P. 139–143.
9. Saxena R.K., Kumar R. *Recurrence relations for the basic analogue of H-function* // Nat. Acad. Math. – 1990. – V. 8. – P. 48–54.
10. Saxena R.K., Kumar R. *Certain finite expansions associated with a basic analogue of G-function* // Rev. Tec. Ing. Univ. Zulia. – 1990. – V. 13. – P. 111–116.
11. Saxena V.P. *Formal solution of certain new pair of dual integral equation involving H-function* // Proc. Nat. Acad. Sci. India. – 1982. – V. 52(A). – № 3. – P. 366–375.
12. Vaishya G.D., Jain Renu, Varma R.C. *Certain properties of the I-function* // Proc. Nat. Acad. Sci. India. – 1989. – V. 59(A). – № 2. – P. 329–337.
13. Sharma C.K., Ahmad S.S. *Expansion formulae for generalized hypergeometric function* // Math. Studia. – 1992. – V. 61. – № 1–4. – P. 233–237.
14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Дополнительные главы.* – М.: Наука, 1986. – 800 с.
15. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* I. – М.: Наука, 1965. – 294 с.
16. Гаспер Дж., Рахман М. *Базисные гипергеометрические ряды.* – М.: Мир, 1993. – 352 с.

Новгородский государственный университет

Поступили
полный текст 11.11.1997
краткое сообщение 03.05.2000